Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Фаньола, Р. Монте, Квантовые расширения полугрупп, порождаемых бесселевскими процессами, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 519–537

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1860>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:35:29

КВАНТОВЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ БЕССЕЛЕВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Ф. Фаньола, Р. Монте

1. Введение

Понятие о квантовом стохастическом процессе на $*$ -алгебре $\mathcal{A}$ со значениями в $*$ -алгебре $\mathcal{B}$ как о семействе $(j_t)_{t \geq 0}$ $*$ -гомоморфизмов $j_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ было введено Аккарди, Фриджеро и Льюисом в работе [1]. Оно является обобщением понятия классического стохастического процесса $(x_t)_{t \geq 0}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$. Действительно, такой процесс может быть определен через семейство гомоморфизмов

$$j_t: L^\infty(E, \mathcal{E}) \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad j_t(f) = f(x_t).$$

В квантовой теории вероятностей, как и в классической, можно строить марковские процессы с помощью их полугрупп, являющихся ультраслабо непрерывными вполне положительными полугруппами на некоммутативной алгебре фон Неймана (см. [2]). Квантовый марковский процесс, полученный таким путем, является квантовым расширением классического марковского процесса, если сужение вполне положительной полугруппы на абелеву подалгебру (алгебру функций) совпадает с классической марковской полугруппой.

Квантовые расширения некоторых классических марковских процессов были описаны в работах [3]–[6] с помощью аппарата квантового стохастического исчисления. В этом случае квантовый стохастический процесс удовлетворяет некоторому явно заданному квантовому стохастическому дифференциальному уравнению. Однако, при рассмотрении простейших классических процессов, область определения которых имеет границу, возникает много аналитических трудностей (см. [7]), так как не ясно, каким образом классические граничные условия влияют на область определения инфинитезимального генератора вполне положительной полугруппы.

В этой статье, следуя общей схеме, развитой в работах [3] и [7] (см. также [4]), мы построили квантовые расширения полугрупп, порождаемых

классическими бесселевскими процессами порядка $\nu \geq 1$, на алгебру фон Неймана всех ограниченных операторов на $L^2(0, +\infty)$. Эта схема подходит для большого класса классических марковских процессов, так как она не зависит от частных свойств рассматриваемых процессов. Однако, она требует глубокого анализа свойств операторов, связанных с инфинитезимальным генератором. В разделе 4, где представлен этот анализ, строится квантовая динамическая полугруппа, являющаяся кандидатом на то, чтобы быть требуемым расширением при всех действительных параметрах размерности $\nu > 0$. Используя достаточное условие консервативности квантовой динамической полугруппы из работы [8], мы показали, что это так в случае $\nu \geq 1$. В последнем разделе мы описали связь квантовой динамической полугруппы, расширяющей классическую полугруппу, порождаемую бесселевским процессом целой размерности n , с квантовой динамической полугруппой, расширяющей полугруппу классического n -мерного броуновского движения. Этот результат является операторным обобщением хорошо известной классической формулы.

В работе [9], используя некоторые специфические свойства квантового броуновского движения, был построен некоммутативный аналог бесселевской полугруппы на порождаемой гайзенберговской группой C^* -алгебре, но только для целых размерностей. Наш подход основывается на общей схеме построения квантовых расширений, однако он может быть применен к более широкому классу классических процессов и позволяет также строить квантовые потоки, являющиеся расширениями классических бесселевских процессов.

2. Квантовое расширение транзитивной полугруппы, порождаемой классическим марковским процессом

Пусть E – замкнутое подпространство евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $L^\infty(E)$ – банахово пространство всех ограниченных борелевских комплексных функций на E , снабженных нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Полугруппа T_t на $L^\infty(E)$ называется *транзитивной*, если для каждого $t > 0$ оператор T_t является положительным сжатием, сохраняющим единицу.

Хорошо известно, что любой классический марковский процесс на пространстве состояний E канонически определяет такую транзитивную полугруппу через свое семейство переходных вероятностей. Пусть T_t – транзитивная полугруппа на $L^\infty(E)$ и пусть $\mathcal{C}$ – замкнутое в $L^\infty(E)$ подпространство непрерывных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Говорят, что T_t обладает *феллеровским свойством относительно $\mathcal{C}$* , если

- 1) подпространство $\mathcal{C}(E)$ T_t -инвариантно при каждом $t \geq 0$;

- 2) сужение T_t на $\mathcal{C}(E)$ является сильно непрерывной сжимающей полугруппой.

Если транзитивная полугруппа T_t обладает феллеровским свойством относительно подходящего подпространства непрерывных функций $\mathcal{C} \subset L^\infty(E)$, то обычно рассматривают ее сужение на $\mathcal{C}$ и определяют ее инфинитезимальный генератор как оператор $A: D(A) \rightarrow \mathcal{C}(E)$, действующий по формуле

$$D(A) = \{f \in \mathcal{C}(E) \mid \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(T_t - I)f \in \mathcal{C}(E)\},$$

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(T_t - I)f.$$

Некоторые авторы (см., например, [10]) указывают при определении феллеровского свойства вполне определенное подпространство пространства $L^\infty(E)$, а именно, пространство $C_0(E)$ всех непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Для наших целей необходимо, чтобы пространство $\mathcal{C}$ содержало характеристические функции 1_E борелевских множеств E . Доказательство следующего утверждения с небольшими изменениями может быть перенесено из работы [10, гл. III, (2.4), с. 84].

ТЕОРЕМА 2.1. *Транзитивная полугруппа T_t обладает феллеровским свойством тогда и только тогда, когда*

- 1) *подпространство $\mathcal{C}(E)$ T_t -инвариантно при каждом $t \geq 0$;*
- 2) *для каждой $f \in \mathcal{C}(E)$ и каждого $x \in X$ справедливо*

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_t f(x) = f(x).$$

В дальнейшем полугруппа T_t предполагается обладающей феллеровским свойством относительно подпространства $\mathcal{C} \subset L^\infty(E)$, являющегося унитарной (т.е. содержащей единицу) алгеброй непрерывных функций.

Пусть h – гильбертово пространство $L^2(E)$ всех интегрируемых с квадратом комплексных борелевских функций на E , снабженных скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_E \bar{f}(x)g(x) dx$, где dx есть лебегова мера. Банахово пространство $L^\infty(E)$ оказывается изоморфным максимальной абелевой унитарной алгебре фон Неймана $\mathcal{B}(h)$, если сопоставить каждому элементу $L^\infty(E)$ оператор умножения на h . Поэтому естественно попытаться расширить классическую марковскую полугруппу до полугруппы, действующей на $\mathcal{B}(h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Назовем *квантовой динамической полугруппой* (КДП) любую ультраслабо непрерывную вполне положительную полугруппу на $\mathcal{B}(h)$. Будем говорить, что КДП $\mathcal{T}_t$ является консервативной, если $\mathcal{T}_t(I) = I$ при всех $t \geq 0$, где I – единичный оператор на h .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Говорят, что КДП $\mathcal{T}_t$ на $\mathcal{B}(h)$ является квантовым расширением транзитивной полугруппы T_t , если ее сужение на унитарную под- $*$ -алгебру $\mathcal{C}$ на $\mathcal{B}(h)$ согласовано с T_t .

Возьмем из работы [8] некоторые результаты в подходящем для наших приложений виде.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть G и $(L_l)_{l=1}^{\infty}$ – операторы в h , удовлетворяющие следующим предположениям:

- 1) G является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной сжимающей полугруппы P_t , действующей в пространстве h ;
- 2) области определения операторов L_l содержат область определения $D(G)$ оператора G и при всех $u, v \in D(G)$ справедливо

$$\langle v, Gu \rangle + \langle Gv, u \rangle + \sum_{l=1}^{\infty} \langle L_l u, L_l v \rangle = 0,$$

где ряд сходится абсолютно.

Тогда существует КДП $\mathcal{T}_t$, удовлетворяющая уравнению

$$\langle v, \mathcal{T}_t(X)u \rangle = \langle v, Xu \rangle + \int_0^t \langle v, \mathcal{L}(\mathcal{T}_s(X))u \rangle ds \quad (1)$$

при всех $v, u \in D(G)$ и $X \in \mathcal{B}(h)$, где

$$\langle v, \mathcal{L}(X)u \rangle = \langle v, XGu \rangle + \langle Gv, Xu \rangle + \sum_{l=1}^{\infty} \langle L_l v, X L_l u \rangle. \quad (2)$$

Отметим, что форма $\mathcal{L}(X)$ совпадает с оператором

$$w^* - \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (\mathcal{T}_t(X) - X)$$

всякий раз, когда X принадлежит области определения инфинитезимального генератора полугруппы $\mathcal{T}_t$.

Следующая теорема представляет собой весьма мощное условие, которое мы применим для доказательства единственности и консервативности. За ее доказательством мы отсылаем к работе [8, теорема 4.2].

ТЕОРЕМА 2.3. В условиях теоремы 2.2 предположим также, что

- 1) существуют ядро D оператора G и положительный самосопряженный оператор C , такой что $D \subseteq D(C^{1/2})$ и для всех $v, u \in D$ справедливо

$$\langle C^{1/2}v, C^{1/2}u \rangle = -\langle v, Gu \rangle - \langle Gv, u \rangle;$$

- 2) существует положительная постоянная b такая, что каждое $u \in D$ принадлежит $D(C^{-1})$ и

$$-2\langle Gu, C^{-1}u \rangle \leq \|u\|^2,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \langle L_l P_t u, C_\varepsilon L_l P_t u \rangle dt \leq \|C^{1/2}u\|^2 + b\|u\|^2,$$

$\varepsilon > 0$, где $C_\varepsilon = C(I + \varepsilon C)^{-1}$ – ограниченная регуляризация самосопряженного оператора C .

Тогда КДП, удовлетворяющая (1), единственна и консервативна.

Как показано в работе [7, теорема 2.4], первым шагом на пути построения квантового расширения транзитивной полугруппы является представление ее инфинитезимального генератора в линдбладовской форме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Говорят, что инфинитезимальный генератор $A: D(A) \rightarrow \mathcal{C}(E)$ транзитивной полугруппы T_t представим в линдбладовской форме, если существуют операторы G и L_l , удовлетворяющие при условиях 1 и 2 теоремы 2.2 равенству

$$\langle v, A f u \rangle = \langle v, f G u \rangle + \langle G v, f u \rangle + \sum_{l=1}^{\infty} \langle L_l v, f L_l u \rangle$$

для всех $u, v \in D(G)$ и любой функции $f \in D(A)$. В этом случае для каждого $X \in \mathcal{B}(h)$ обозначим через $\mathcal{L}_A(X)$ форму на h с областью определения $D \times D$, определенную формулой (2).

Ниже мы используем фундаментальную теорему о квантовых расширениях (см. [7, теорема 2.4]).

ТЕОРЕМА 2.4. *Предположим, что генератор A транзитивной полугруппы T_t представим в линдбладовской форме с помощью операторов G и L_l . Если существует (единственная) консервативная КДП $\mathcal{T}_t$, инфинитезимальный генератор $\mathcal{L}_A$ которой определяет для каждого $X \in \mathcal{B}(h)$ форму $\mathcal{L}_A(X)$, то $\mathcal{T}_t$ является квантовым расширением транзитивной полугруппы T_t .*

3. Классические бесселевские процессы BES^ν

Классические бесселевские процессы “размерности” $\nu > 0$, BES^ν , являются наиболее интересными марковскими процессами в пространстве состояний $[0, +\infty[$.

В случае целых размерностей ($\nu = n$) бесселевские процессы могут быть реализованы как модуль соответствующего n -мерного броуновского движения. Если $0 < \nu < 2$, то точка 0 достигается п.н. траекторией случайного процесса и происходит мгновенное отражение, в то время

как при $\nu \geq 2$ точка 0 является *невозвратной*. В случае размерностей $0 < \nu \leq 2$ процессы BES^ν являются *рекуррентными*, а в случае $\nu > 2$ — *транзитивными* (см. [10, гл. XI]).

Действие на $L^\infty(0, +\infty)$ транзитивной полугруппы $T_t^{(\nu)}$, порождаемой процессом BES^ν , описывается формулой

$$T_t^{(\nu)} f(x) = \int_0^{+\infty} f(y) p_t^{(\nu)}(x; y) dy,$$

где $(p_t^{(\nu)})_{t>0}$ есть семейство плотностей, определяемых как

$$p_t^{(\nu)}(x; y) = \begin{cases} 2^{1-\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1} y^{\nu-1} t^{-\nu/2} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right), & \text{если } x = 0, \\ x^{1-\nu/2} y^{\nu/2} t^{-1} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_{\nu/2-1}\left(\frac{xy}{t}\right), & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где Γ обозначает гамма-функцию, а $I_{\nu/2-1}(z)$ — модифицированную функцию Бесселя порядка $\nu/2 - 1$.

Напомним, что функция $I_\nu(z)$ вместе с функцией Макдональда $K_\nu(z)$ образуют пару фундаментальных решений модифицированного уравнения Бесселя

$$z^2 u'' + zu' - (\nu^2 + z^2)u = 0. \quad (3)$$

Как мы увидим далее, основные свойства этих функций (см. [11] в качестве полностью исчерпывающей ссылки) играют решающую роль при доказательстве многих результатов. Например, учитывая теорему 2.1, непосредственные выкладки с использованием свойств функции $I_\nu(z)$ (подробнее см. [12]) дают следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 3.1. *При каждом $\nu > 0$ транзитивная полугруппа $T_t^{(\nu)}$ обладает феллеровским свойством относительно замкнутого подпространства непрерывных функций $C[0, +\infty[\subset L^\infty(0, +\infty)$, имеющих предел при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow +\infty$.*

Более того, следуя схеме, предложенной в работе [10, гл. VII, (1.10), с. 264] для броуновского движения, и применяя свойства функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ (см. [12]), мы получаем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3.2. *При любом $\nu > 0$ инфинитезимальный генератор $A_\nu: D(A_\nu) \rightarrow C[0, +\infty[$ группы $T_t^{(\nu)}$ выражается формулой*

$$D(A_\nu) = \{f \in C^2[0, +\infty[\mid f'(0) = 0\}, \quad (A_\nu f)(x) = \frac{1}{2} f''(x) + \frac{\nu - 1}{2x} f'(x),$$

где $C^2[0, +\infty[$ обозначает подпространство $C^0[0, +\infty[$ всех дважды непрерывно дифференцируемых функций с производными из $C^0[0, +\infty[$.

4. Квантовое расширение процесса BES^ν

4.1 Линдбладовская форма инфинитезимального генератора процесса BES^ν . Первым шагом на пути построения квантового расширения процесса BES^ν является представление инфинитезимального генератора A_ν транзитивной полугруппы $T_t^{(\nu)}$ в линдбладовской форме. С этой целью, следуя рассуждениям из работы [3, ч. 5], рассмотрим дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве $h = L^2(0, +\infty)$

$$D(L_\nu) = \left\{ u \in h \mid u' - \frac{(\nu-1)u}{2x} \in h \right\}, \quad L_\nu u = u' - \frac{\nu-1}{2x}u, \quad (4)$$

$$D(G_\nu) = \{ u \in h \mid u \in D(L_\nu), L_\nu u \in D(L_\nu^*) \}, \quad G_\nu = -\frac{1}{2}L_\nu^*L_\nu. \quad (5)$$

Оператор L_ν плотно определен и замкнут (см. [13, гл. VII, следствие к теореме 2, с. 196]). Легко видеть, что сопряженным к нему является минимальный дифференциальный оператор

$$v \rightarrow -v' - \frac{\nu-1}{2x}v$$

с областью определения $C_c^\infty(0, +\infty)$ – плотным линейным подмногообразием пространства h всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. По теореме фон Неймана оператор G_ν является отрицательным и самосопряженным (см. [13, гл. VII, теорема 2, с. 200]). Следовательно, он является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы $P_t^{(\nu)}$ на h [13, следствие к теореме Филлипса–Лумера, с. 251].

Нам понадобятся свойства операторов L_ν и G_ν , связанные с зависимостью от параметра ν . Обозначим через $AC_{loc}(0, +\infty)$ линейное подмногообразие локально абсолютно непрерывных функций в пространстве h .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $u \in D(L_\nu)$. Тогда:

- 1) при всех $\nu > 0$ имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$;
- 2) если $0 < \nu < 2$, то существует $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)/x^{(\nu-1)/2}$;
- 3) если $\nu > 1$, то $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$;
- 4) если $\nu > 1$, то функция $x \rightarrow u(x)/\sqrt{x}$ принадлежит h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если $x^{-1}u$ принадлежит $L^2(1, +\infty)$ и $u \in D(L_\nu)$, то и u' принадлежит $L^2(1, +\infty)$. Таким образом, функция $\bar{u}u'$ является интегрируемой на $(1, +\infty)$ и

$$|u(x)|^2 - |u(y)|^2 = 2 \operatorname{Re} \int_y^x \bar{u}(s)u'(s) ds$$

для всех $x, y \in (1, +\infty)$. Из этого следует первое утверждение.

Так как $u \in AC_{\text{loc}}(0, +\infty)$, то, полагая $\tilde{u} = u' - u/(2x)$ и интегрируя дифференциальное уравнение

$$u' - \frac{\nu - 1}{2x}u = \tilde{u},$$

находим, что

$$\frac{u(x)}{x^{(\nu-1)/2}} - \frac{u(y)}{y^{(\nu-1)/2}} = \int_y^x \frac{\tilde{u}(t)}{t^{(\nu-1)/2}} dt \quad (6)$$

для всех $x, y \in]0, +\infty[$. Функция $\tilde{u}(t)/t^{(\nu-1)/2}$ интегрируема на $(0, 1)$, так как и $t^{(1-\nu)/2}$, и $\tilde{u}$ интегрируемы с квадратом на интервале $(0, 1)$ при $0 < \nu < 2$. Устремляя x, y к нулю, получаем второе утверждение.

Наконец, при наших предположениях должен существовать предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \operatorname{Re}[\bar{u}(t)(L_\nu u)(t)] dt = \operatorname{Re}\langle u, L_\nu u \rangle.$$

С другой стороны, при каждом $x > 0$

$$\begin{aligned} & \int_x^{+\infty} \operatorname{Re}(\bar{u}(t)(L_\nu u)(t)) dt \\ &= \int_x^{+\infty} \operatorname{Re}(\bar{u}(t)u'(t)) dt - \frac{\nu - 1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{|u(t)|^2}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 dt - \frac{\nu - 1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{|u(t)|^2}{t} dt \\ &= -\left(\frac{1}{2} |u(x)|^2 + \frac{\nu - 1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{|u(t)|^2}{t} dt \right). \end{aligned}$$

Следовательно, предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} |u(x)|^2 + \frac{\nu - 1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{|u(t)|^2}{t} dt \right)$$

также должен существовать и быть конечным. Так как при $\nu > 1$ второе слагаемое суммы является положительным и неубывающим, а первое – положительным, то существование предела суммы при $x \rightarrow 0$ влечет за собой существование пределов обоих слагаемых. А именно, должны существовать оба предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} |u(x)| \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \frac{|u(t)|^2}{t} dt.$$

Таким образом, $x \rightarrow u/\sqrt{x}$ интегрируема с квадратом и $\lim_{x \rightarrow 0} |u(x)| = 0$.

Отметим, что для функций $u(x)$, удовлетворяющих условию предложения 4.1, при $\nu < 1$ предел $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ может не существовать. Действительно, функция $u(x) = x^{(\nu-1)/2} e^{-x}$ удовлетворяет этому условию, но $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Сопряженный к L_ν оператор L_ν^* выражается формулой*

$$D(L_\nu^*) = \left\{ v \in h \mid v' + \frac{\nu-1}{2x}v \in h, \lim_{x \rightarrow 0+} v(x)u(x) = 0 \ \forall u \in D(L_\nu) \right\},$$

$$(L_\nu^*v)(x) = -v'(x) - \frac{\nu-1}{2x}v(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in h$ такова, что $v' + (\nu-1)v/(2x)$ интегрируема с квадратом. Аналогично предложению 4.1 можно показать, что v стремится к нулю на бесконечности. Очевидно, что v принадлежит $AC_{loc}(0, +\infty)$. Для каждой $u \in D(L_\nu)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle v, L_\nu u \rangle &= \int_0^{+\infty} \bar{v}(t) \left(u'(t) - \frac{\nu-1}{2t}u(t) \right) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty} \left(\int_x^y \bar{v}(t)u'(t)dt - \int_x^y \frac{\nu-1}{2t}\bar{v}(t)u(t)dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty} \left([\bar{v}(t)u(t)]_x^y - \int_x^y (\bar{v}'(t) + \frac{\nu-1}{2t}\bar{v}(t))u(t)dt \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь, если для $u \in D(L_\nu)$ $\lim_{x \rightarrow 0} v(x)u(x) = 0$, то мы получаем формулу

$$\langle v, L_\nu u \rangle = - \int_0^{+\infty} \left(\bar{v}'(t) + \frac{\nu-1}{2t}\bar{v}(t) \right) u(t) dt.$$

Это показывает, что v принадлежит области определения L_ν^* , а выражение для L_ν^*v записано в требуемой форме. Обратно, если v принадлежит области определения L_ν^* , то существует $w \in h$, такое что при каждом $u \in D(L_\nu)$ справедливо

$$\langle v, L_\nu u \rangle = \langle w, u \rangle. \quad (8)$$

Интегрируя по частям, получаем, что как обобщенная функция v должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$v' + \frac{\nu-1}{2x}v = -w.$$

Таким образом, $v \in AC_{loc}(0, +\infty)$, и это вместе с (7) дает, что

$$\langle v, L_\nu u \rangle = \langle w, u \rangle - \lim_{x \rightarrow 0+} \bar{v}(x)u(x).$$

Предел должен быть равен нулю при всех $u \in D(L_\nu)$ ввиду формулы (8).

Для того, чтобы представить оператор A_ν в линдбладовской форме, докажем следующую предварительную лемму.

ЛЕММА 4.1. При всех $u, v \in D(G_\nu)$ для каждой $f \in C_b^2[0, +\infty[$ таковой, что $f'(0) = 0$, справедливо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \bar{v}(x) f'(x) u(x) = 0 \quad (9)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\nu - 1}{2x} \bar{v}(x) f(x) u(x) - \frac{1}{2} \bar{v}'(x) f(x) u(x) - \frac{1}{2} \bar{v}(x) f(x) u'(x) \right] = 0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $0 < \nu < 1$ при помощи правила Лопиталя получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\nu-1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^\nu f''(x) = 0.$$

Вместе с предложением 4.1, 2), это дает

$$\lim_{x \rightarrow 0} \bar{v}(x) f'(x) u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\nu-1} f'(x) \cdot \frac{\bar{v}(x)}{x^{(\nu-1)/2}} \cdot \frac{u(x)}{x^{(\nu-1)/2}} = 0$$

для любого ν , удовлетворяющего $0 < \nu \leq 1$. При $\nu > 1$ справедливость формулы (9) немедленно следует из предложения 4.1, 3).

Первое утверждение доказано. Чтобы доказать второе, достаточно записать уравнение (10) как

$$\frac{1}{2} f(x) \left[\left(\frac{\nu - 1}{2x} u(x) - u'(x) \right) \bar{v}(x) + \left(\frac{\nu - 1}{2x} \bar{v}(x) - \bar{v}'(x) \right) u(x) \right]$$

и применить предложение 4.2, заметив, что обе функции

$$\frac{\nu - 1}{2x} u(x) - u'(x) \quad \text{и} \quad \frac{\nu - 1}{2x} \bar{v}(x) - \bar{v}'(x)$$

принадлежат области определения L_ν^* .

ТЕОРЕМА 4.1. Инфинитезимальный генератор A_ν процесса BES^ν может быть представлен в линдбладовской форме

$$\langle v, (A_\nu f) u \rangle = \langle v, f G_\nu u \rangle + \langle G_\nu v, f u \rangle + \langle L_\nu v, f L_\nu u \rangle \quad (11)$$

при $u, v \in D(G_\nu)$ и $f \in D(A_\nu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственные выкладки показывают, что формула (11) справедлива тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \bar{v}(t) f(t) u'(t) \Big|_x^y + \frac{1}{2} \bar{v}'(t) f(t) u(t) \Big|_x^y - \frac{\nu - 1}{2t} \bar{v}(t) f(t) u(t) \Big|_x^y - \frac{1}{2} \bar{v}(t) f'(t) u(t) \Big|_x^y \right] = 0$$

для $u, v \in D(G_\nu)$ и $f \in D(A_\nu)$.

Рассуждения, аналогичные приведенным в предложении 4.1, для функции u' показывают, что при каждом $u \in D(G_\nu)$ производная u' стремится к нулю на бесконечности. Таким образом, каждое слагаемое стремится к 0 при $y \rightarrow +\infty$. Сумма также зануляется при x , стремящемся к 0. Действительно, сумма первых трех членов зануляется ввиду формулы (10), а последний член – ввиду формулы (9).

Мы отсылаем к работе [12] для подробного изучения операторов L_ν , L_ν^* , G_ν .

4.2. Консервативность квантовой динамической полугруппы. Применяя теорему 2.3, мы докажем консервативность КДП $\mathcal{T}_t^{(\nu)}$, построенной при помощи операторов G_ν и L_ν , представленных в предыдущем подразделе. В качестве первого шага определим ядро оператора G_ν .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Линейное многообразие $C_c^\infty(0, +\infty)$ является ядром G_ν тогда и только тогда, когда $\nu \geq 4$. Если $0 < \nu < 4$, то ядром G_ν является линейная оболочка этого многообразия и функции Макдональда $x^{3/2} K_{2-\nu/2}(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G_ν является отрицательным самосопряженным оператором, то точка $1/2$ принадлежит резольвентному множеству G_ν , и оператор $(\frac{1}{2}I - G_\nu)^{-1}$ определен и ограничен всюду на h . Следовательно, плотное линейное подмногообразие D_ν пространства h , принадлежащее $D(G_\nu)$, является ядром G_ν тогда и только тогда, когда линейное многообразие $(\frac{1}{2}I - G_\nu)(D_\nu)$ плотно в h [14, гл. III, 3, предложение 5.19, с. 166].

Пусть $u \in h$ – вектор, ортогональный $(\frac{1}{2}I - G_\nu)(C_c^\infty(0, +\infty))$. Несложная выкладка показывает, что u как обобщенная функция должна быть решением в h дифференциального уравнения

$$u'' - \left(1 + \frac{(\nu - 1)(\nu - 3)}{4x^2} \right) u = 0. \quad (12)$$

С другой стороны, хорошо известно, что такое решение может быть представлено с точностью до множества меры нуль функцией, принадлежащей $C^\infty(0, +\infty)$. Следовательно, мы можем искать классические решения уравнения (12), принадлежащие $D(G_\nu)$. Путем замены переменных

$u \rightarrow x^{1/2}u$ и $\nu \rightarrow (1 - \nu/2)$ уравнение (12) может быть сведено к однородному модифицированному уравнению Бесселя (3). Его фундаментальным решением является

$$c_1 x^{1/2} I_{1-\nu/2}(x) + c_2 x^{1/2} K_{1-\nu/2}(x)$$

с произвольными постоянными c_1 и c_2 . Если $\nu \geq 4$, то эти функции являются квадратично интегрируемыми только при $c_1 = c_2 = 0$. Это следует из того, что при $\nu \geq 4$ многообразие $C_c^\infty(0, +\infty)$ является ядром оператора G_ν .

В случае $0 < \nu < 4$ единственным решением в $\mathcal{h}$ уравнения (12) является функция

$$u(x) = cx^{1/2} K_{1-\nu/2}(x)$$

с произвольной постоянной c . Таким образом, ядро G_ν задается линейной оболочкой $C_c^\infty(0, +\infty)$ и, возможно, решениями в $D(G_\nu)$ дифференциального уравнения

$$u'' - \left(1 + \frac{(\nu-1)(\nu-3)}{4x^2}\right)u = x^{1/2} K_{1-\nu/2}(x). \quad (13)$$

Его единственным решением является функция

$$u(x) = x^{1/2} \left(c K_{1-\nu/2}(x) - \frac{1}{4} x (K_{2-\nu/2}(x) + K_{\nu/2}(x)) \right)$$

с произвольной постоянной c . Ввиду определения $D(G_\nu)$ мы вынуждены положить $c = (\nu/2 - 1)/2$. Получаем

$$u(x) = -\frac{1}{2} x^{3/2} K_{2-\nu/2}(x)$$

(подробнее см. [12]). Доказательство завершено.

Далее нам потребуются следующие свойства ядра D_ν .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $u(x) = x^{3/2} K_{2-\nu/2}(x)$ и $v = L_\nu u$. Тогда при $0 < \nu < 4$ обе функции $x^{-1}v$ и v' принадлежат $\mathcal{h}$ и

$$L_\nu(D_\nu) \subseteq D(L_\nu) \cap D(L_\nu^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, $v(x) = -x^{3/2}K_{1-\nu/2}(x)$, откуда при $x \rightarrow 0$ имеем следующие асимптотики:

$$x^{-1}v \sim \begin{cases} -2^{\nu/2-2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)x^{(3-\nu)/2}, & \text{если } \nu > 2, \\ x^{1/2}\ln x, & \text{если } \nu = 2, \\ -2^{-\nu/2}\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)x^{(\nu-1)/2}, & \text{если } \nu < 2. \end{cases}$$

Отсюда $x^{-1}v$ принадлежит $\mathfrak{h}$, так как функция Макдональда экспоненциально стремится к нулю на бесконечности. Более того, так как $v' + (\nu - 1)v/(2x) \in \mathfrak{h}$ ввиду $u \in D(G_\nu)$, то v' также принадлежит $\mathfrak{h}$.

Теперь мы докажем три более полезные для приложений технические леммы.

ЛЕММА 4.2. При каждом $u \in D_\nu$ справедливо

$$\langle L_\nu L_\nu u, L_\nu L_\nu u \rangle = 4\langle G_\nu u, G_\nu u \rangle - (\nu - 1) \left\langle \frac{1}{x} L_\nu u, \frac{1}{x} L_\nu u \right\rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записав $v = L_\nu u$, из предложения 4.4 имеем

$$L_\nu v = L_\nu^* v + 2v',$$

откуда

$$\begin{aligned} \langle L_\nu^2 u, L_\nu^2 u \rangle &= \left\langle \left(L_\nu^* + 2\frac{d}{dx} \right) L_\nu u, \left(L_\nu^* + 2\frac{d}{dx} \right) L_\nu u \right\rangle \\ &= \langle L_\nu^* L_\nu u, L_\nu^* L_\nu u \rangle + 4\operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dx} L_\nu u, L_\nu^* L_\nu u + \frac{d}{dx} L_\nu u \right\rangle \\ &= 4\langle G_\nu u, G_\nu u \rangle - 2(\nu - 1) \operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dx} L_\nu u, \frac{1}{x} L_\nu u \right\rangle. \end{aligned}$$

Но тогда, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty} t^{-1} |v(t)|^2 \Big|_x^y = 0$$

при $v \in C_c^\infty(0, +\infty)$ или $v(x) = L_\nu u = -x^{3/2}K_{1-\nu/2}$ в случае $0 < \nu < 4$, имеем

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \left\langle v', \frac{1}{x} v \right\rangle &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} 2\operatorname{Re}(\bar{v}(x)v'(x)) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} |v(x)|^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} |v(x)|^2 dx = \left\langle \frac{1}{x} v, \frac{1}{x} v \right\rangle, \end{aligned}$$

откуда следует наше утверждение.

Введем положительный самосопряженный оператор

$$C_\nu = I - 2G_\nu$$

с областью определения $D(C_\nu) = D(G_\nu)$, и пусть $C_\varepsilon^{(\nu)} = C_\nu(I + \varepsilon C_\nu)^{-1}$.

ЛЕММА 4.3. При каждом $u \in D_\nu$ справедливо

$$\langle L_\nu u, C_\varepsilon^{(\nu)} L_\nu u \rangle \leq -2\langle u, G_\nu u \rangle + \langle L_\nu L_\nu u, L_\nu L_\nu u \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно отметим, что оператор $(I + \varepsilon C_\nu)^{-1}$ коммутирует с положительным оператором $L_\nu^* L_\nu$ ввиду того, что он коммутирует с $(\lambda I - L_\nu^* L_\nu)^{-1}$ при $\lambda = -(1 + \varepsilon)/\varepsilon$ [14, гл. III, теорема 6.5, с. 173]. Следовательно, $(I + \varepsilon C_\nu)^{-1}$ также коммутирует с самосопряженным положительным оператором $|L_\nu| = (L_\nu^* L_\nu)^{1/2}$, имеющим область определения $D(|L_\nu|) = D(L_\nu)$ [14, гл. V, теорема 3.35, с. 281].

Рассмотрим полярное разложение L_ν

$$L_\nu = U_\nu |L_\nu|,$$

где U_ν – частичная изометрия [14, гл. VI, с. 334]. Принимая во внимание предложение 4.4, для каждого $u \in D_\nu$ имеем

$$\begin{aligned} \langle L_\nu u, C_\varepsilon^{(\nu)} L_\nu u \rangle &= \langle L_\nu u, C_\nu (I + \varepsilon C_\nu)^{-1} L_\nu u \rangle \\ &= \langle L_\nu u, (I + L_\nu^* L_\nu)(I + \varepsilon C_\nu)^{-1} L_\nu u \rangle \\ &\leq \langle L_\nu u, L_\nu u \rangle + \langle |L_\nu| L_\nu u, (I + \varepsilon C_\nu)^{-1} |L_\nu| L_\nu u \rangle \\ &\leq \langle L_\nu u, L_\nu u \rangle + \langle |L_\nu| L_\nu u, |L_\nu| L_\nu u \rangle \\ &= -2\langle u, G_\nu u \rangle + \langle U_\nu |L_\nu| L_\nu u, U_\nu |L_\nu| L_\nu u \rangle \\ &= -2\langle u, G_\nu u \rangle + \langle L_\nu L_\nu u, L_\nu L_\nu u \rangle, \end{aligned}$$

что доказывает лемму.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\nu \geq 1$. Тогда при $\varepsilon > 0$ и $u \in D(G_\nu)$ справедливо

$$\langle L_\nu u, C_\varepsilon^{(\nu)} L_\nu u \rangle \leq -2\langle u, G_\nu u \rangle + 4\langle G_\nu u, G_\nu u \rangle. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (14) верно для $u \in D_\nu$ ввиду лемм 4.2 и 4.3. Так как D_ν – ядро оператора G_ν , то это неравенство верно и для любого $u \in D(G_\nu)$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\nu \geq 1$. Тогда КДП $\mathcal{T}_t^{(\nu)}$ является консервативной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем операторы

$$\tilde{G}_\nu = -\frac{1}{2}I + G_\nu, \quad \tilde{L}_{\nu,1} = I, \quad \tilde{L}_{\nu,2} = L_\nu,$$

которые вместе с $C_\nu = -2\tilde{G}_\nu$ удовлетворяют условиям 1), 2) теоремы 2.2. Наша теорема будет доказана, если мы покажем, что эти операторы удовлетворяют также условию теоремы 2.3 (см. [8, ч. 3]). Очевидно, что условие 1) выполнено.

Из определения $C_\varepsilon^{(\nu)}$ при $u \in D(G_\nu)$ имеем

$$\langle \tilde{P}_t^{(\nu)} u, C_\varepsilon^{(\nu)} \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle \leq -2 \langle \tilde{P}_t^{(\nu)} u, \tilde{G}_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle.$$

Далее, по лемме 4.4

$$\begin{aligned} \langle L_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u, C_\varepsilon^{(\nu)} L_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle &\leq -2 \langle \tilde{P}_t^{(\nu)} u, G_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle + 4 \langle G_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u, G_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle \\ &= 2 \langle \tilde{P}_t^{(\nu)} u, \tilde{G}_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle + 4 \langle \tilde{G}_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u, \tilde{G}_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 \int_0^{+\infty} \exp(-t) \langle \tilde{L}_{\nu,n} \tilde{P}_t^{(\nu)} u, C_\varepsilon^{(\nu)} \tilde{L}_{\nu,n} \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle dt \\ \leq 4 \int_0^{+\infty} \exp(-t) \langle \tilde{G}_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u, \tilde{G}_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle dt \\ = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-t) \frac{d}{dt} \langle \tilde{P}_t^{(\nu)} u, \tilde{G}_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle dt \\ = -2 \langle u, \tilde{G}_\nu u \rangle + 2 \int_0^{+\infty} \exp(-t) \langle \tilde{P}_t^{(\nu)} u, \tilde{G}_\nu \tilde{P}_t^{(\nu)} u \rangle dt \\ \leq \langle u, C_\nu u \rangle. \end{aligned}$$

Это доказывает, что условие 2) также выполнено.

5. Связь с квантовым расширением классического n -мерного броуновского движения

В этом разделе мы покажем, что построенное нами квантовое расширение полугруппы, порождаемой процессом BES^n при натуральном n , может быть получено путем квантового расширения полугруппы, порождаемой n -мерным броуновским движением, описанной в работе [3]. Обозначим через BM^n (соответственно BES^n) все объекты, связанные с классическим n -мерным броуновским движением (соответственно классическими n -мерными бесселевскими процессами).

Действие на $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ транзитивной полугруппы $T_t^{\text{BM}^n}$, порождаемой классическим n -мерным броуновским движением, выражается формулой

$$T_t^{\text{BM}^n} f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) p_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

где $(p_t^{\text{BM}^n})$ – семейство плотностей, определяемых через

$$p_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{2t}\right)$$

При помощи унитарного оператора $Uu(x) = \rho^{-(n-1)/2}u(\rho)$ можно установить изоморфность гильбертова пространства $h = L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ пространству $L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$, а гильбертово тензорное произведение $L^2(\mathbb{R}_+, \mu) \otimes L^2(S^{n-1}, \omega)$ оказывается изоморфным гильбертову пространству $L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x})$ посредством единственного унитарного расширения оператора $V(f \otimes g) = f \diamond g$, где для каждой $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$ и каждой $g \in L^2(S^{n-1}, \omega)$

$$f \diamond g(\mathbf{x}) = f(\rho)g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2}, \vartheta_{n-1}).$$

Обозначим через φ чистое состояние на $\mathcal{B}(L^2(S^{n-1}, \sigma))$ оператора плотности $|\varphi\rangle\langle\varphi|$, ассоциированное с нормированной постоянной функцией на сфере S^{n-1} такой, что для $B \in \mathcal{B}(L^2(S^{n-1}, \sigma))$

$$\varphi(B) = \text{Tr}(B|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \langle\varphi, B\varphi\rangle.$$

Пусть

$$E_\varphi: \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+, \mu) \otimes L^2(S^{n-1}, \omega)) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+, \mu))$$

есть условное ожидание в состоянии φ , а $I_{L^2(S^{n-1}, \omega)}$ – единичный оператор на $L^2(S^{n-1}, \omega)$.

Естественным претендентом на место КДП $\mathcal{T}_t^{\text{BES}^n}(X)$ является КДП $\mathcal{T}_t^{(n)}(X)$, определенная как

$$\mathcal{T}_t^{(n)}(X) \rightarrow U^* E_\varphi [V^* \mathcal{T}_t^{\text{BM}^n}(V(UXU^* \otimes I_{L^2(S^{n-1}, \omega)})V^*)V]U$$

при $t \geq 0$ и $X \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+, dx))$. Так как обе полугруппы консервативны, то для того, чтобы показать, что $\mathcal{T}_t^{(n)}(X)$ совпадает с $\mathcal{T}_t^{\text{BES}^n}(X)$, достаточно проверить, что обе они удовлетворяют уравнению (1) с одним и тем же видом (2) отображения $\mathcal{L}(X)$.

Действительно, мы хотим показать, что КДП $\mathcal{T}_t^{(n)}(X)$ удовлетворяет уравнению (1) с инфинитезимальным генератором $\mathcal{L}_{\text{BES}^n}$ полугруппы $\mathcal{T}_t^{\text{BES}^n}(X)$. А именно, мы хотим показать, что

$$\begin{aligned} \langle v, \mathcal{T}_t^{(n)}(X)u \rangle &= \langle v, Xu \rangle + \int_0^t \langle v, \mathcal{L}_{\text{BES}^n}(\mathcal{T}_t^{(n)}(X))u \rangle ds \\ &= \langle v, Xu \rangle + \int_0^t \langle v, \mathcal{T}_t^{(n)}(X)G_n u \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle G_n v, \mathcal{T}_t^{(n)}(X)u \rangle ds + \int_0^t \langle L_n v, \mathcal{T}_t^{(n)}(X)L_n u \rangle ds \end{aligned} \quad (15)$$

при $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ и $X \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+, dx))$. С этой целью предварительно заметим, что для каждой $u \in L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ справедливо

$$\Delta V(Uu \otimes \varphi) = V(V^* \Delta V)(Uu \otimes \varphi),$$

где $V^* \Delta V$ – оператор Лапласа в сферических координатах с радиальной компонентой

$$(V^* \Delta V)_r = \rho^{-(n-1)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$$

и угловой компонентой $(V^* \Delta V)_s$ такой, что

$$\begin{aligned} (V^* \Delta V)(Uu \otimes \varphi) &= (V^* \Delta V)_r(Uu) \otimes \varphi + \rho^{-(n-2)} Uu \otimes (V^* \Delta V)_s \varphi \\ &= \rho^{-(n-1)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial \rho} Uu \right) = 2UG_n u. \end{aligned}$$

Отметим также, что справедливо равенство

$$\partial_k V(Uu \otimes \varphi) = V(V^* \partial_k V)(Uu \otimes \varphi),$$

где $(V^* \partial_k V)$ – оператор k -й частной производной в сферических координатах такой, что

$$\begin{aligned} (V^* \partial_k V)(Uu \otimes \varphi) &= \left(\frac{\rho}{\partial_k} \frac{\partial}{\partial \rho} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \right) (Uu \otimes \varphi) \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \rho} Uu \right) \otimes \varphi + Uu \otimes \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \varphi \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x_k} (UL_n u) \otimes \varphi. \end{aligned}$$

Запишем теперь

$$\mathbf{X} = V(UXU^* \otimes I_{L^2(S^{n-1}, \omega)})V^*, \quad \mathbf{u} = V(Uu \otimes \varphi), \quad \mathbf{v} = V(Uv \otimes \varphi).$$

Непосредственные выкладки (подробнее см. [12]) показывают, что

$$\begin{aligned} \langle v, \mathcal{T}_t^{(n)}(X)x \rangle &= \langle v, U^* E_\varphi [V^* \mathcal{T}_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{X})V]Uu \rangle \\ &= \text{Tr} \left(V^* \mathcal{T}_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{X})V (|Uu\rangle\langle Uv| \otimes |\varphi\rangle\langle \varphi|) \right) \\ &= \langle Uv \otimes \varphi, V^* \mathcal{T}_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{X})V(Uu \otimes \varphi) \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathcal{T}_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{X})\mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $\langle v, Xu \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{X}\mathbf{u} \rangle$ и

$$\begin{aligned} \langle v, \mathcal{T}_t^{(n)}(X)G_n u \rangle &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathcal{T}_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{X})\Delta \mathbf{u} \rangle, \\ \langle G_n v, \mathcal{T}_t^{(n)}(X)u \rangle &= \frac{1}{2} \langle \Delta \mathbf{v}, \mathcal{T}_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{X})\mathbf{u} \rangle, \\ \langle L_n v, \mathcal{T}_t^{(n)}(X)L_n u \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle \partial_k \mathbf{v}, \mathcal{T}_t^{\text{BM}^n}(\mathbf{X})\partial_k \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

при $\sum_{k=1}^n (\partial \rho / \partial x_k)^2 = 1$. Следовательно, обе пологруппы $\mathcal{T}_t^{(n)}(X)$ и $\mathcal{T}_t^{\text{VES}^n}(X)$ удовлетворяют уравнению (15). Таким образом, учитывая единственность решения, мы доказали, что они совпадают.

Мы хотим поблагодарить Б. В. Р. Бхата и Ф. Биана за участие в обсуждении связи между квантовыми расширениями пологрупп, порождаемых броуновским движением и бесселевскими процессами.

Università di Genova
 Università di Palermo
E-mail: fagnola@dima.unige.it
 monte@ipamat.math.unipa.it

Поступило
 20.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum stochastic processes // Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 1982. V. 18. P. 97–133.
- [2] Bhat B. V. R., Parthasarathy K. R. Markov dilations of non conservative dynamical semigroups and a quantum boundary theory // Annal. Inst. H. Poincaré. 1995. V. 31. № 4. P. 601–651.
- [3] Fagnola F. Diffusion processes in Fock space // Preprint UTM. V. 379, 1992; // Quantum Probability and Related Topics. V. 9, 1994. P. 189–214.
- [4] Fagnola F. Extending quantum flows of classical Markov processes to quantum flows in Fock space // Probability towards 2000 / ed. L. Accardi, C. Heyde.
- [5] Meyer P.-A. Quantum Probability for Probabilists. Lecture Notes in Math. V. 1538. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer Verlag, 1993.
- [6] Parthasarathy K. R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel: Birkhäuser Verlag, 1992.
- [7] Bhat B. V. R., Fagnola F., Sinha K. B. On quantum extensions of semigroups of Brownian motions on an half-line // Russ. J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 1. P. 13–28.
- [8] Chebotarev A. M., Fagnola F. Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups // J. Funct. Anal. 1993. V. 118. P. 131–153.
- [9] Biane Ph. Quelques propriétés du mouvement brownien non-commutatif. Prépublication du Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris VI. № 242, June 1994.
- [10] Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1991.
- [11] Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1922.
- [12] Monte R. Sull'estensione quantistica dei processi di Markov classici // Tesi di dottorato: Università di Palermo.
- [13] Yosida K. Functional Analysis. 6th ed. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1980.
- [14] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1995.