Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Чаргой, Гладкая аппроксимация решений возмущенных уравнений Вейля и Дирака, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 538–555

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1861>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 04:58:11

ГЛАДКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЕЙЛЯ И ДИРАКА

Иесус Чаргой

1. Введение и обозначения. В работе [1] было показано, что решение уравнения Дирака допускает стохастическую интерпретацию в терминах полугруппы, связанной с решением уравнения Вейля. Если $d\sigma_{n-1}$ — элемент поверхности единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и если σ_{n-1} — область S^{n-1} , то $ds_{n-1} = \sigma_{n-1}^{-1} d\sigma_{n-1}$ определяет вероятностную меру. Через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ обозначим матрицы Дирака порядка $N \times N$. Матричнозначная мера $d\mu(\xi) = (I + \alpha \cdot \xi) ds_{n-1}(\xi)$ порождает взвешенное сферическое среднее от начальных условий φ :

$$[T(t)\varphi](x) = \int_{S^{n-1}} \varphi(x + nt\xi) d\mu(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим $T_m(t) = T(t/m)$, $t \in \mathbb{R}$, и рассмотрим случайное блуждание

$$X_0 = x, \quad X_m = X_0 + \sum_{j=1}^m \frac{nt}{m} \xi_j,$$

где $\xi_1, \dots, \xi_m$ представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения на сфере S^{n-1} с распределением ds_{n-1} . Рассмотрим итерации:

$$\begin{aligned} T_m^m(t)\varphi(x) &= \int_{S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}} (I + \alpha \cdot \xi_m) \cdots (I + \alpha \cdot \xi_1) \\ &\quad \times \varphi\left(x + \frac{nt}{m} \sum_{j=1}^m \xi_j\right) ds_{n-1}(\xi_1) \cdots ds_{n-1}(\xi_m). \end{aligned}$$

Определим множество $\Omega = \prod_{j=1}^{\infty} S^{n-1}$, меру $d\mu = \bigotimes_1^{\infty} ds_{n-1}$ и проекцию $\pi_m: \Omega \rightarrow \prod_{j=1}^m S^{n-1}$, $\pi_m(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_m)$; $d\mu_m = \pi_m(d\mu) = \bigotimes_{j=1}^m ds_{n-1}$ для $m = 1, 2, \dots$. Видно, что указанные итерации представляют собой математическое ожидание E от $L^2(\mathbb{R}^n)^N$ -значных функционалов $\Phi_m(\omega) = [\prod_{j=0}^{m-1} (I + \alpha \cdot \xi_{m-j})] \varphi(X_m)$, $m = 1, 2, \dots$, т.е.

$$T_m^m(t)\varphi = E\Phi_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

В [2] было показано, что эти итерации аппроксимируют решение свободного уравнения Вейля:

$$\lim_m E\Phi_m =_{L^2(\mathbb{R}^n)^N} e^{t\alpha \cdot \nabla} \varphi, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)^N.$$

С точки зрения приложений целесообразно обобщить этот результат на несвободный случай, когда начальные условия и потенциал – гладкие. При этом возникает естественный вопрос: какой тип сходимости может быть обеспечен для возмущенных сферических аппроксимаций решения? Тот же вопрос можно поставить и для сходимости решения вместе с производными по пространству и времени. В настоящей статье мы отвечаем на эти вопросы для некоторого класса потенциалов и начальных условий без ограничений на порядок их роста при $\|x\| \rightarrow \infty$. Мы опишем метод, который позволяет одновременно аппроксимировать решения возмущенных уравнений Вейля и Дирака.

Пусть $\mathcal{E}_n^N$ – пространство Фреше $C^\infty(\mathbb{R}^n)^N$, топология которого порождается системой полунорм

$$\|\varphi\|_l = \max_{\substack{|\mathbf{a}| \leq l \\ \|x\| \leq l}} \|\partial^{\mathbf{a}} \varphi(x)\|, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^N, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad l \in \mathbb{N},$$

где $\|\cdot\|$ обозначает обычную евклидову норму, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ – мультииндекс, $\partial^{\mathbf{a}} = \partial_{x_1}^{a_1} \dots \partial_{x_n}^{a_n}$ и $|\mathbf{a}| = a_1 + \dots + a_n$. В $\mathcal{E}_n^N$ каждое замкнутое ограниченное подмножество есть компакт. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$ пространство ограниченных операторов в $\mathcal{E}_n^N$, снабженное локально выпуклой топологией, порождаемой системой полунорм $\|L\|_{l,\Omega} := \sup_{u \in \Omega} \|Lu\|_l$ для каждого $l \in \mathbb{N}$ и ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{E}_n^N$.

В этой топологии последовательность $\{T_m\}_m \subset \mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$ сходится тогда и только тогда, когда для каждого $u \in \mathcal{E}_n^N$ существует $\lim_m T_m u$ (см. [3]). Отсюда следует, что всякая последовательность Коши сходится в $\mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$. Пусть $\mathcal{M}_N$ – пространство комплексных матриц порядка $N \times N$, задающих норму операторов в $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$. Данные выше определения можно продолжить на пространство гладких $\mathcal{M}_N$ -значных отображений,

$\mathcal{E}_n^{N,N} = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_N)$. Наша цель состоит в решении задач (A), (B), (C), описанных ниже.

Сначала мы рассмотрим $N \times N$ комплексные матрицы $P \in \mathcal{E}_n^{N \times N}$ с произвольным поведением коэффициентов $P(x)$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ и докажем следующее.

- (A) Существование и единственность в пространстве операторов $\mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$ решения задачи Коши

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (\alpha \cdot \nabla + P)\psi, \quad \psi(0) = I, \quad \psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)),$$

где $I \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$ есть тождественный оператор, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

$$[(\alpha \cdot \nabla + P)\varphi](x) := \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) + P(x)\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

а $\varphi \in \mathcal{E}_n^N$ ведет себя произвольно при $\|x\| \rightarrow \infty$.

Во-вторых, мы покажем, что

$$(B) \quad \|[T_{P,m}(t)^m - \psi(t)]\varphi\|_l = O\left(\frac{t^2}{m}\right) \|\varphi\|_{l+5n+7}$$

и

$$(C) \quad \|D_t[T_{P,m}^m(t) - \psi(t)]\varphi\|_l = \left[O\left(\frac{t^2}{m}\right) + O\left(\frac{|t|}{m}\right) \right] \|\varphi\|_{l+7n+10},$$

где

$$T_{P,m}(t) = T_m(t) + \frac{t}{m}P = T\left(\frac{t}{m}\right) + \frac{t}{m}P.$$

Доказательство этих утверждений приводится в четвертой части статьи. В доказательствах существенно используются метод Нельсона и формула Тейлора, а также некоторые неравенства, которые обосновываются во второй и третьей частях.

2. Равномерная ограниченность $T_{P,m}^k$. Для применения метода Нельсона необходимо получить равномерные оценки итераций $T_{P,m}^k$, $1 \leq k \leq m$. Поскольку наши оценки локальны по временным и пространственным переменным, достаточно получить локальные равномерные оценки (см. теоремы 2.1, 2.2).

Нам потребуются некоторые определения и их простые следствия, которые могут быть легко проверены, так что их доказательство будет опущено.

Обозначим через $W_{p,q}(\mathbb{R}^n, E)$ пространство борелевских функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ со значениями в банаховом пространстве $(E, \|\cdot\|_E)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{p,q}^p = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|)^q \|f(y)\|_E^p dy < \infty.$$

Для мультииндекса $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ и $f \in W_{1,q}(\mathbb{R}^n, E)$ определим $\mathfrak{z}^{\mathbf{b}} = (z_1, \dots, z_n)^{\mathbf{b}} = z_1^{b_1} \dots z_n^{b_n}$ и

$$\|\mathfrak{z}^{\mathbf{b}} f\|_{L^1} = \|\mathfrak{z}^{\mathbf{b}} \|f\|_E\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathfrak{z}^{\mathbf{b}} f(\mathfrak{z})\|_E d\mathfrak{z}.$$

Для краткости в дальнейшем будем писать $W_{p,q}^N = W_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ и $W_{p,q}^{N,N} = W_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_N)$. Если $*$ обозначает свертку, то $(W_{1,0}^{N,N}, *)$ есть банахова алгебра. Более того, используя теорему Фубини и формулу

$$(y + \mathfrak{z})^{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{a} \leq \mathbf{b}} \binom{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} y^{\mathbf{a}} \mathfrak{z}^{\mathbf{b}-\mathbf{a}}, \quad \text{где } y, \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \binom{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \binom{b_1}{a_1} \dots \binom{b_n}{a_n},$$

можно проверить, что

$$\|\mathfrak{z}^{\mathbf{b}} f * g\|_{L^1} \leq \sum_{\mathbf{a} \leq \mathbf{b}} \binom{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \|\mathfrak{z}^{\mathbf{a}} f\|_{L^1} \|\mathfrak{z}^{\mathbf{b}-\mathbf{a}} g\|_{L^1}. \quad (1)$$

$f \in W_{1,0}^{N,N}$ и $g \in W_{1,0}^N$ удовлетворяют неравенству $\|f * g\| \leq \|f\|_{\mathcal{M}} * \|g\|$ и для их Фурье-образов $\widehat{f}, \widehat{g}$ справедливо $\widehat{f} \in W_{1,0}^{N,N}$, $\widehat{g} \in W_{1,0}^N$ и $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$. Положим $\langle \mathfrak{z}, y \rangle = z_1 y_1 + \dots + z_n y_n$ и определим

$$\widehat{T}(t)(\mathfrak{z}) = \int_{S^{n-1}} e^{i \text{int}(\mathfrak{z}, \xi)} (I + \alpha \cdot \xi) ds_{n-1}(\xi), \quad \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда получим $\widehat{T}(t) \in \mathcal{E}_n^{N,N}$ и

$$[T(t)f]^{\wedge}(\mathfrak{z}) = \widehat{T}(t)(\mathfrak{z}) \widehat{f}(\mathfrak{z}) \quad \text{для } f \in W_{1,0}^N \text{ и } \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку в [2] доказано, что $\|\widehat{T}(t)u\| \leq \|u\|$ для $u \in \mathbb{C}^N$, отсюда вытекает, что для $f \in W_{1,0}^{N,N}$ и $g \in W_{1,0}^N$

$$\|[\widehat{T}(\tau) + \widehat{f} *]^k \widehat{g}\|(\mathfrak{z}) \leq [1 + \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} *]^k \|\widehat{g}\|(\mathfrak{z}) \quad (2)$$

для $\tau \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{z} \in \mathbb{R}^n$ и $k = 0, 1, 2, \dots$. Для упрощения обозначений положим $T_{P,m}^k = T_{P,m}^k(t)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $j, l \in \mathbb{N}$, $P_0 \in \mathcal{E}_n^{N,N}$ — гладкое отображение с компактным носителем, $\varphi_0 \in \mathcal{E}_n^N$. Тогда для $m \in \mathbb{N}$ и $0 \leq k \leq m$ существуют константы $M_1(j, l, P_0)$ и $M'_1(j, l, P_0, n)$ такие, что

- (а) $\sup_{|t| \leq j} \|T_{P_0,m}^k(t) \varphi_0\|_l \leq M_1(j, l, P_0) \|\widehat{\varphi}_0\|_{1,l};$
- (б) если $\varphi_0(x) = 0$ для $\|x\| \geq r$, справедливо

$$\sup_{|t| \leq j} \|T_{P_0,m}^k(t) \varphi_0\|_l \leq M'_1(n, j, l, P_0) r^n \sup_{\substack{\|y\| \leq r \\ |\mathbf{a}| \leq n+l+1}} \|\partial^{\mathbf{a}} \varphi(y)\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|\mathbf{b}| \leq l$, то преобразование Фурье дает

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \partial_x^{\mathbf{b}} \left[T_m + \frac{t}{m} P_0 \right]^k \varphi_0(x) \right\| \leq \left\| \mathfrak{z}^{\mathbf{b}} \left[\widehat{T} \left(\frac{t}{m} \right) + \frac{t}{m} \widehat{P}_0^* \right]^k \widehat{\varphi}_0 \right\|_{L^1}. \quad (3)$$

Отсюда, используя формулы (1), (2), получим

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{z}^{\mathbf{b}} \left[\widehat{T} \left(\frac{t}{m} \right) + \frac{t}{m} \widehat{P}_0^* \right]^k \widehat{\varphi}_0 \right\|_{L^1} &= \left\| \mathfrak{z}^{\mathbf{b}} \left\| \left(\widehat{T} \left(\frac{t}{m} \right) + \frac{t}{m} \widehat{P}_0^* \right)^k \widehat{\varphi}_0 \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right\| \\ &\leq \left\| \mathfrak{z}^{\mathbf{b}} \left[1 + \frac{|t|}{m} (\|\widehat{P}_0\|_{\mathcal{M}^*}) \right]^k \|\widehat{\varphi}_0\| \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left(\frac{|t|}{m} \right)^s \left\| \mathfrak{z}^{\mathbf{b}} (\|\widehat{P}_0\|_{\mathcal{M}^*})^s \|\widehat{\varphi}_0\| \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\mathfrak{z}^{\mathbf{b}} \widehat{\varphi}_0\|_{L^1} + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} \left(\frac{|t|}{m} \right)^s \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{b}_s \leq \dots \leq \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}} \left[\prod_{j=0}^{s-1} \binom{\mathbf{b}_j}{\mathbf{b}_{j+1}} \|\mathfrak{z}^{\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_{j+1}} \widehat{P}_0\|_{L^1} \right] \|\mathfrak{z}^{\mathbf{b}_s} \widehat{\varphi}_0\|_{L^1} \\ &\leq \|\widehat{\varphi}_0\|_{1,l} + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} \left(\frac{|t|}{m} \right)^s \sum_{\mathbf{b}_s \leq \dots \leq \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}} \left[\prod_{j=0}^{s-1} \binom{\mathbf{b}_j}{\mathbf{b}_{j+1}} \|\widehat{P}_0\|_{1,l} \right] \|\widehat{\varphi}_0\|_{1,l} \\ &= \|\widehat{\varphi}_0\|_{1,l} \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left(\frac{|t|}{m} \|\widehat{P}_0\|_{1,l} \right)^s (s+1)^l \\ &= \|\widehat{\varphi}_0\| \left(\frac{d}{d\tau} \right)_{\tau=0}^l e^{\tau} \left(1 + \frac{|t|e^{\tau}}{m} \|\widehat{P}_0\|_{1,l} \right)^k \\ &\leq \|\widehat{\varphi}_0\|_{1,l} \left(\frac{d}{d\tau} \right)_{\tau=0}^l e^{\tau} e^{|t|e^{\tau}} \|\widehat{P}_0\|_{1,l}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |t| \leq j}} \|\partial_x^{\mathbf{b}} T_{P_0, m}^k \varphi_0(x)\| &\leq M_1(j, l, P_0) \|\widehat{\varphi}_0\|_{1,l}, \\ \text{где } M_1(j, l, P) &= \left(\frac{d}{d\tau} \right)_{\tau=0}^l e^{\tau + j e^{\tau}} \|\widehat{P}_0\|_{1,l}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь утверждение (а) вытекает из определения нормы $\|\cdot\|_l$.

Для доказательства (b) рассмотрим соотношение

$$(i\mathbf{z})^{\mathbf{a}} \widehat{\varphi}_0(\mathbf{z}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^{\mathbf{a}} \varphi_0)(y) e^{-i\langle \mathbf{z}, y \rangle} dy.$$

Применяя стандартные методы (см. [4]), получим оценку

$$\|\widehat{\varphi}_0(\mathbf{z})\| \leq \frac{c(n, l)}{(1 + \|\mathbf{z}\|)^{n+l+1}} r^n \sup_{\substack{\|y\| \leq r \\ |\mathbf{a}| \leq n+l+1}} \|\partial^{\mathbf{a}} \varphi_0(y)\|, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

где $c(n, l) = (1 + n)^{n+l+1} V$ и V есть объем единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\varphi}_0\|_{1, l} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\mathbf{z}\|)^l \|\widehat{\varphi}_0(\mathbf{z})\| d\mathbf{z} \\ &\leq c(n, l) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathbf{z}}{(1 + \|\mathbf{z}\|)^{n+l+1}} r^n \sup_{\substack{\|y\| \leq r \\ |\mathbf{a}| \leq n+l+1}} \|\partial^{\mathbf{a}} \varphi_0(y)\|. \end{aligned} \quad (5)$$

Поэтому можем положить

$$M'_1(n, j, l, P_0) = c(n, l) M_1(j, l, P_0) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathbf{z}}{(1 + \|\mathbf{z}\|)^{n+l+1}}.$$

Теперь мы откажемся от предположения о компактности носителя для начальных условий и возмущения.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть даны $\varphi \in \mathcal{E}_n^N$ и $P \in \mathcal{E}_n^{N, N}$. Для каждой $j, l \in \mathbb{N}$ можно указать константу $M''_1(n, j, l, P)$ такую, что для всякого $m \geq 2nj$, $m \in \mathbb{N}$, справедливо

$$\sup_{\substack{|t| \leq j \\ 1 \leq k \leq m}} \|T_{P, m}^k(t) \varphi\|_l \leq M''_1(n, j, l, P) \|\varphi\|_{l+n+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала возьмем $f_l \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, обладающую свойством $f_l = 1$ при $\|y\| \leq l + \frac{1}{2}$ и $f_l = 0$ при $\|y\| \geq l + 1$. Так как $T_m = T(t/m)$, видно, что для каждого $\|x\| \leq l$

$$\left\{ \left[T_m + \frac{t}{m} f_l P \right] f_l \varphi \right\}(x) = f_l(x) T_{P, m} \varphi(x) = T_{P, m} \varphi(x).$$

Повторяя это рассуждение, для $\|x\| \leq l$ получим

$$\left\{ \left[T_m + \frac{t}{m} f_l P \right]^k f_l \varphi \right\}(x) = T_{P, m}^k \varphi(x), \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (6)$$

Так как $f_l P$ и $f_l \varphi$ имеют компактные носители, заменив $P_0 = f_l P$, $\varphi_0 = f_l \varphi$ и подставив (3) и (4) в (6), получим оценку

$$\sup_{\substack{\|x\| \leq l \\ |\mathbf{b}| \leq l, |t| \leq j}} \|\partial_x^{\mathbf{b}} T_{P,m}^k \varphi(x)\| \leq \|(f_l \varphi)^\wedge\|_{1,l} \left(\frac{d}{d\tau}\right)_{\tau=0}^l e^{\tau+j e^\tau} \|(f_l P)^\wedge\|_{1,l}.$$

В силу (5) для соответствующей константы $c'(n, l)$

$$\|(f_l \varphi)^\wedge\|_{1,l} \leq c'(n, l) l^n \|f_l\|_{n+l+1} \|\varphi\|_{n+l+1}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{\|x\| \leq l \\ |\mathbf{b}| \leq l, |t| \leq j}} \|\partial_x^{\mathbf{b}} T_{P,m}^k \varphi(x)\| \leq M_1''(n, j, l, P) \|\varphi\|_{n+l+1},$$

где

$$M_1''(n, j, l, P) = l^n c'(n, l) \|f_l\|_{n+l+1} \left(\frac{d}{d\tau}\right)_{\tau=0}^l e^{\tau+j e^\tau} \|(f_l P)^\wedge\|_{1,l}.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\sup_{|t| \leq j} \|T_{P,m}^k(t) \varphi\|_l \leq M_1''(n, j, l, P) \|\varphi\|_{n+l+1}.$$

3. Равномерная ограниченность $D_t T_{P,m}^k$.

ТЕОРЕМА 3.1. Для $\varphi \in \mathcal{E}_n^N$ и $P \in \mathcal{E}_n^{N,N}$ существуют константы $M_i''(n, j, l, P)$, $i = 2, 3$, такие, что для любого $\nu \geq nj$

- (a) $\sup_{|s| \leq 1/n} \left\| \frac{d}{ds} T_{P,1}(s) \varphi \right\|_l \leq 2(n^2 + 2^{l-1} \|P\|_l) \|\varphi\|_{l+1}$, $l \in \mathbb{N}$;
- (b) $\sup_{\substack{|s| \leq j \\ 1 \leq r \leq \nu}} \left\| \frac{d}{ds} T_{P,\nu}^r(s) \varphi \right\|_l \leq \frac{r}{\nu} M_2''(n, j, l, P) \|\varphi\|_{l+2n+3}$;
- (c) $\sup_{|s| \leq j} \left\| \left(\frac{d}{ds}\right)^2 T_{P,\nu}^\nu(s) \varphi \right\|_l \leq M_3''(n, j, l, P) \|\varphi\|_{l+3n+5}$;
- (d) $\|[T_{P,1}(s) - T_{P,\nu}^\nu(s)] \varphi\|_l \leq s^2 M_3''(n, j, l, P) \|\varphi\|_{l+3n+5}$ для $|s| \leq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $|\mathbf{a}| \leq l$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \in \mathbb{R}$, $\|x\| \leq l$, $|\tau| \leq 1/n$, имеем

$$\begin{aligned} \|\partial_x^{\mathbf{a}} D_\tau T(\tau) \varphi(x)\| &= n \left\| \sum_{i=1}^n \int_{s^{n-1}} (I + \alpha \cdot \xi) \xi_i \partial_{x_i} \partial_x^{\mathbf{a}} \varphi(x + n\tau\xi) ds_{n-1}(\xi) \right\| \\ &\leq n \sum_{i=1}^n \int_{s^{n-1}} \|I + \alpha \cdot \xi\| \mathcal{M} \|\partial_{x_i} \partial_x^{\mathbf{a}} \varphi(x + n\tau\xi)\| ds_{n-1}(\xi) \\ &\leq n \sum_{i=1}^n \int_{s^{n-1}} 2\|\varphi\|_{l+1} ds_{n-1}(\xi) = 2n^2 \|\varphi\|_{l+1}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\partial_x^{\mathbf{a}} D_\tau [\tau P \varphi](x)\| &= \left\| \sum_{\mathbf{b} \leq \mathbf{a}} \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} [\partial_x^{\mathbf{a}-\mathbf{b}} P] [\partial_x^{\mathbf{b}} \varphi](x) \right\| \\ &\leq \sum_{\mathbf{b} \leq \mathbf{a}} \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \|P\|_l \|\varphi\|_l \leq 2^l \|P\|_l \|\varphi\|_{l+1}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает утверждение (а).

Обозначим $Q(\tau) = T_{P,1}(\tau)$, $Q_\nu(\tau) = Q(\tau/\nu)$ и

$$DQ(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(a+h) - Q(a)}{h}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} DQ_\nu^r(s) &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^r Q_\nu^{i-1}(s) \left[DQ\left(\frac{s}{\nu}\right) \right] Q_\nu^{r-i}(s), \\ \sup_{|\tau| \leq 1/n} \|DQ(\tau)\varphi\|_l &\leq 2(n^2 + 2^{l-1} \|P\|_l) \|\varphi\|_{l+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $\nu \geq nj$ и $|s| \leq j$, то $|s/\nu| \leq 1/n$. Теорема 2.2 и оценка (7) дают

$$\begin{aligned} \|DQ_\nu^r(s)\varphi\|_l &\leq \frac{c_1}{\nu} \sum_{i=1}^r \left\| DQ\left(\frac{s}{\nu}\right) Q_\nu^{r-i}(s)\varphi \right\|_{l+n+1} \\ &\leq \frac{c_2}{\nu} \sum_{i=1}^r \|Q_\nu^{r-i}(s)\varphi\|_{l+n+2} \leq \frac{c_3}{\nu} \sum_{i=1}^r \|\varphi\|_{l+2n+3} \\ &= \frac{r}{\nu} M_2''(n, j, l, p) \|\varphi\|_{l+2n+3}, \end{aligned}$$

где

$$M_2''(n, j, l, P) = M_1''(n, j, l, P) 2(n^2 + 2^{l+n} \|P\|_{l+n+1}) M_1''(n, j, l+n+2, P).$$

Следовательно, утверждение (b) доказано.

Для обоснования (c) заметим, что

$$\begin{aligned} D^2 Q(\tau) \varphi(x) &= D^2(T(\tau) + \tau P) \varphi(x) = D^2 T(\tau) \\ &= n^2 \int_{S^{n-1}} (I + \alpha \cdot \xi) (\xi \cdot \nabla)^2 \varphi(x + n\tau\xi) ds_{n-1}(\xi) \\ &= n^2 \sum_{i,k=1}^n \int_{S^{n-1}} (I + \alpha \cdot \xi) \xi_i \xi_k \partial_{x_i, x_k}^2 \varphi(x + n\tau\xi) ds_{n-1}(\xi). \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве утверждения (a), можно убедиться, что для $|\tau| \leq 1/n$

$$\|D^2 Q(\tau) \varphi(x)\| \leq n^2 \sum_{i,k=1}^n 2 \|\varphi\|_{n+l+2} = 2n^4 \|\varphi\|_{n+l+2}. \quad (8)$$

Далее воспользуемся неравенством (7):

$$\begin{aligned} D^2 Q_\nu^\nu(s) &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=2}^{\nu} [DQ_\nu^{i-1}(s)] \left[DQ\left(\frac{s}{\nu}\right) \right] Q_\nu^{r-i}(s) \\ &\quad + \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} Q_\nu^{i-1}(s) \left[D^2 Q\left(\frac{s}{\nu}\right) \right] Q_\nu^{r-i}(s) \\ &\quad + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu-1} Q_\nu^{i-1}(s) \left[DQ\left(\frac{s}{\nu}\right) \right] DQ_\nu^{r-i}(s) = \frac{\sigma_1}{\nu} + \frac{\sigma_2}{\nu^2} + \frac{\sigma_3}{\nu}, \end{aligned}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ обозначают соответствующие суммы. Имеем

$$\begin{aligned} \|\sigma_1 \varphi\|_l &\leq \sum_{i=2}^{\nu} \left\| [DQ_\nu^{i-1}(s)] \left[DQ\left(\frac{s}{\nu}\right) \right] Q_\nu^{r-i}(s) \varphi \right\|_l \\ &\leq \frac{k_1}{\nu} \sum_{i=2}^{\nu} (i-1) \left\| \left[DQ\left(\frac{s}{\nu}\right) \right] Q_\nu^{r-i}(s) \varphi \right\|_{l+2n+3} \\ &\leq \frac{k'_1}{\nu} \sum_{i=2}^{\nu} (i-1) \|Q_\nu^{r-i}(s) \varphi\|_{l+2n+4} \\ &\leq \frac{k''_1}{\nu} \sum_{i=2}^{\nu} (i-1) \|\varphi\|_{l+3n+5} = \frac{\nu-1}{2} k''_1 \|\varphi\|_{l+3n+5}, \end{aligned}$$

где

$$k_1'' = M_2''(n, j, l, P) 2(n^2 + 2^{l+2n+2} \|P\|_{l+2n+3}) M_1''(n, j, l + 2n + 4, P).$$

На основании оценки (8) можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \|\sigma_2 \varphi\|_l &\leq k_2 \sum_{i=1}^{\nu} \left\| \left[D^2 Q \left(\frac{s}{\nu} \right) \right] Q_{\nu}^{\nu-i}(s) \varphi \right\|_{l+n+1} \leq k_2' \sum_{i=1}^{\nu} \|Q_{\nu}^{\nu-i}(s) \varphi\|_{l+n+3} \\ &\leq k_2'' \sum_{i=1}^{\nu} \|\varphi\|_{l+2n+4} = \nu k_2'' \|\varphi\|_{l+2n+4}, \end{aligned}$$

где

$$k_2'' = M_1''(n, j, l, P) 2n^4 M_1''(n, j, l + n + 3, P).$$

Такое же рассуждение дает оценку

$$\|\sigma_3 \varphi\|_l \leq k_3'' \|\varphi\|_{l+3n+5},$$

где

$$k_3'' = M_1''(n, j, l, P) 2(n^2 + 2^{l+n} \|P\|_{l+n+1}) M_2''(n, j, l + n + 2, P).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|D^2 Q_{\nu}^{\nu}(s) \varphi\|_l &\leq \frac{1}{\nu} \|\sigma_{\varphi}\|_l + \frac{1}{\nu^2} \|\sigma_2 \varphi\|_l + \frac{1}{\nu} \|\sigma_3 \varphi\|_l \\ &\leq K \left[\frac{\nu-1}{\nu} \|\varphi\|_{l+3n+5} + \frac{\nu}{\nu^2} \|\varphi\|_{l+2n+4} + \frac{\nu-1}{\nu} \|\varphi\|_{l+3n+5} \right] \\ &\leq 3K \|\varphi\|_{l+3n+5}, \end{aligned}$$

где $K = \max\{k_1'', k_2'', k_3''\}$. Выбирая $M_3''(j, n, l, P) = \max\{2n^4, 3k\}$, получаем утверждение (с), справедливое и при $\nu = 1$.

Остается обосновать (d). Из формулы Тейлора имеем

$$Q_{\nu}^{\nu}(s) \varphi(x) = \varphi(x) + s(\alpha \cdot \nabla + P) \varphi(x) + s^2 \int_0^1 (1-\theta) [D^2 Q_{\nu}^{\nu} \varphi(x)] (\theta s) d\theta.$$

Далее,

$$Q(s) \varphi(x) = \varphi(x) + s(\alpha \cdot \nabla + P) \varphi(x) + s^2 \int_0^1 (1-\theta) [D^2 Q \varphi(x)] (\theta s) d\theta.$$

Следовательно,

$$\|Q_{\nu}^{\nu} \varphi - Q \varphi\|_l \leq s^2 \int_0^1 (1-\theta) \|D^2 Q_{\nu}^{\nu} \varphi - D^2 Q \varphi\|_l (\theta s) d\theta.$$

Таким образом, вышеуказанные оценки и неравенство треугольника приводят к требуемому результату

$$\|Q_{\nu}^{\nu} \varphi - Q \varphi\|_l \leq s^2 \int_0^1 (1-\theta) 2M_3''(n, j, l, P) \|\varphi\|_{l+3n+5} d\theta.$$

4. Решение задач (А), (В), (С). В теореме 4.3 даны полные ответы на вопросы, поставленные выше. В лемме 4.1 получен вспомогательный результат, предложение 4.2 посвящено выводу представления решения $e(t)$ задачи Коши как предела соответствующей подпоследовательности $\{T_{P,m}\}_m$.

ЛЕММА 4.1. Пусть X – пространство Фреше с топологией, задаваемой возрастающей последовательностью полунорм $\|\cdot\|_l \leq \|\cdot\|_{l+1}$, $l = 1, 2, \dots$. Предположим, что $\{U_m\}$ и $\{V_m\}$ – последовательности операторов в X , а $\{C_1(l)\}$, $\{C_2(l)\}$ – последовательности положительных чисел таких, что для фиксированных $a, b, d \in \mathbb{N}$ справедливы следующие условия:

$$\sup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i \leq m}} \|U_m^i u\|_l \leq C_1(l) \|u\|_{l+a}, \quad \sup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i \leq m}} \|V_m^i u\|_l \leq C_2(l) \|u\|_{l+b}$$

и

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|U_m u - V_m u\|_l = O(\varepsilon) \|u\|_{l+d} \quad \text{для } u \in X \quad u \quad l \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любых $u \in X$ и $l \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\|U_m^k u - V_m^k u\|_l = k C_1(l) C_2(l) O(\varepsilon) \|u\|_{l+a+b+d} \quad \text{для } 1 \leq k \leq m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in X$ и $1 \leq k \leq m$ задано. Тогда

$$\begin{aligned} \|(U_m^k - V_m^k)u\|_l &= \left\| \sum_{i=0}^{k-1} U_m^i (U_m - V_m) V_m^{k-1-i} u \right\|_l \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} C_1(l) \|(U_m - V_m) V_m^{k-1-i} u\|_{l+a} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} C_1(l) O(\varepsilon) \|V_m^{k-1-i} u\|_{l+a+d} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} C_1(l) O(\varepsilon) C_2(l) \|u\|_{l+a+d+b}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Фиксируем $j, l \in \mathbb{N}$ и $P \in \mathcal{E}_n^{N,N}$. Для каждого $n, j \leq k \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ и $|t| \leq j$ имеем*

$$(a) \quad \|\{T_{P,k!}^{k!}(t) - T_{P,m!}^{m!}(t)\}\varphi\|_l = O\left(\frac{t^2}{k!}\right)\|\varphi\|_{l+5n+6}, \quad \varphi \in \mathcal{E}_n^N.$$

В частности, $\{T_{P,m!}^{m!}\}$ – последовательность Коши в $\mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$.

$$(b) \quad \text{Если положить } \mathbf{e}(t)\varphi = \lim_m T_{P,m!}^{m!}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{E}_n^N, \text{ то выполнено}$$

$$\mathbf{e} \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)), \quad \mathbf{e}(s+t) = \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(s) \text{ для } s, t \geq 0 \text{ и}$$

$$\sup_{|t| \leq j} \|\mathbf{e}(t)\varphi\|_l \leq M_1''(j, n, l, P)\|\varphi\|_{l+n+1},$$

где $M_1''(j, n, l, P)$ дается теоремой 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $1 \leq k \leq m$ положим $U_{k!} = T_{P,k!}$ и $V_{k!} = T_{P,m!}^{m!/k!}$. На основании теоремы 2.2 для $|t| \leq j$

$$\max_{n, j \leq k \leq m} \{\|U_{k!}\varphi\|_l, \|V_{k!}\varphi\|_l\} \leq M_1''(j, n, l, P)\|\varphi\|_{n+l+1}.$$

Обозначая $s = t/k!$, $\nu = m!/k! \in \mathbb{N}$, видно, что $U_{k!} = T_{P,1}(s)$ и $V_{k!} = T_{P,\nu}^\nu(s)$. Таким образом, пункт (d) теоремы 3.1 дает

$$\|\{U_{k!} - V_{k!}\}\varphi\|_l = O(s^2)\|\varphi\|_{l+3n+5} = O\left(\left(\frac{t}{k!}\right)^2\right)\|\varphi\|_{l+3n+5}.$$

Следовательно, лемма 4.1 приводит к оценке

$$\begin{aligned} \|\{T_{P,k!}^{k!}(t) - T_{P,m!}^{m!}(t)\}\varphi\|_l &= k!O\left(\left(\frac{t}{k!}\right)^2\right)\|\varphi\|_{l+3n+5+2(n+1)} \\ &= O\left(\frac{t^2}{k!}\right)\|\varphi\|_{l+5n+7}. \end{aligned}$$

Отсюда для каждого $t \in \mathbb{R}$ оператор

$$\mathbf{e}(t) = \lim_m T_{P,m!}^{m!}(t) \quad \text{на } \mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$$

корректно определен и утверждение (a) доказано.

Для того чтобы доказать дифференцируемость $\mathbf{e}(t)$, зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{E}_n^N$ и положим $f_{u,m}(t) = T_{P,m!}^{m!}(t)u \in \mathcal{E}_n^N$, $|t| \leq j$, $m \in \mathbb{N}$. Из условия 3.1 (c) и неравенства для среднего значения вытекает, что

$$\sup_m \|f'_{u,m}(t) - f'_{u,m}(s)\|_l \leq |t-s| M_3''(n, j, l, P)\|u\|_{l+3n+5}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Следовательно, последовательность $\{f'_{u,m}\}_m$ равномерно непрерывна. Согласно 3.1 (b) для любого $s \in \mathbb{R}$ последовательность отображений $\{f'_{u,m}(s)\} \subset \mathcal{E}_n^N$ есть ограниченное подмножество в пространстве Фреше $\mathcal{E}_n^N$, обладающего свойством Гейне–Бореля (см. [5]), поэтому $\mathcal{E}_n^N$ -замыкание такого подмножества компактно. Следовательно, можно применить теорему Арцела–Асколи (см. [6]), чтобы получить подпоследовательность $\{f'_{u,m_k}\}_k$ и $h_u \in C^0([-j, j], \mathcal{E}_n^N)$ такие, что

$$\lim_k \sup_{|t| \leq j} \|f'_{u,m_k}(t) - h_u(t)\|_l = 0 \quad \text{для } l \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Предел $\lim_k$ вычисляется по формуле

$$f_{u,m_k}(\tau) = f_{u,m_k}(t) + (\tau - t) \int_0^1 f'_{u,m_k}(t + (\tau - t)\theta) d\theta,$$

Утверждение (a) и (9) гарантируют, что

$$\mathbf{e}(\tau)u = \mathbf{e}(t)u + (\tau - t) \int_0^1 h_u(t + (\tau - t)\theta) d\theta.$$

Следовательно, для каждого $u \in \mathcal{E}_n^N$ существуют

$$\mathbf{e}'(t)u = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\mathbf{e}(\tau)u - \mathbf{e}(t)u}{\tau - t} = h_u(t) \in \mathcal{E}_n^N, \quad |t| \leq j.$$

Теперь для каждого $|t| \leq j$ применим теорему Банаха–Штейнгауза к семейству операторов $\{(\tau - t)^{-1}[\mathbf{e}(\tau) - \mathbf{e}(t)] : t \neq \tau\}$ (см. [4, теорема 2.8]) и получим, что $\mathbf{e}'(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$ для $|t| \leq j$.

Далее заменим f_{u,m_k} на $f_{u,m}$ в (8) и перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\|\mathbf{e}'(t)u - \mathbf{e}'(s)u\|_l \leq |t - s| M_3''(n, j, l, P) \|u\|_{l+3n+5}.$$

Таким образом, доказана непрерывная дифференцируемость решения $\mathbf{e}(t)$. Последняя оценка для $\mathbf{e}(t)$ непосредственно следует из его определения и теоремы 2.2.

Из доказательства (a) с $s = kt/m!$, $\nu = k$ и 3.1 (d) очевидно, что для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\|\{T_{P,m!}^{m!}(kt) - T_{P,m!}^{m!k}(t)\}\varphi\|_l = O\left(\frac{t^2}{m!}\right) \|\varphi\|_{l+5n+7}.$$

Следовательно, для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{e}(kt) - \mathbf{e}(t)^k = \lim_{m \rightarrow \infty} [T_{P,m!}^{m!}(kt) - T_{P,m!}^{m!k}(t)] = 0.$$

Отсюда вытекает, что для любых положительных дробей $p_1/q_1, p_2/q_2$ выполняются тождества

$$\mathbf{e}\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{q_1 q_2}\right)^{p_1 q_2} \mathbf{e}\left(\frac{1}{q_1 q_2}\right)^{p_2 q_1} = \mathbf{e}\left(\frac{p_1}{q_1}\right) \mathbf{e}\left(\frac{p_2}{q_2}\right).$$

Теперь утверждение следует из непрерывности $\mathbf{e}(t)$.

Мы подошли к основному результату.

ТЕОРЕМА 4.3. *С учетом предыдущего результата имеем следующую.*

(А) *В пространстве $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N))$ $\mathbf{e}(t)$ есть единственное решение задачи Коши*

$$\frac{d\psi}{dt} = (\alpha \cdot \nabla + P)\psi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \psi(0) = I,$$

где I – тождественный оператор в $\mathcal{B}(\mathcal{E}_n^N)$. Кроме того,

$$\mathbf{e}(t_1 + t_2) = \mathbf{e}(t_1)\mathbf{e}(t_2) \quad \text{для } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

(В) *Для $|t| \leq j$ и $m \geq nj$, $j \in \mathbb{N}$ (см. теорему 2.2)*

$$\| \{T_{P,m}^m(t) - \mathbf{e}(t)\}\varphi \|_l = O\left(\frac{t^2}{m}\right) \|\varphi\|_{l+5n+7}.$$

(С) *Для $|t| \leq j$ и $m \geq nj$, $j \in \mathbb{N}$*

$$\|D_t \{T_{P,m}^m(t) - \mathbf{e}(t)\}\varphi\|_l = \left[O\left(\frac{|t|}{m}\right) + O\left(\frac{t^2}{m}\right) \right] \|\varphi\|_{l+6n+9}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Из предложения 4.2 следует, что $\mathbf{e}(0) = I$, $\mathbf{e}'(0) = \alpha \cdot \nabla + P$ и $\mathbf{e}(s+t) = \mathbf{e}(s)\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(s)$ для $s, t \geq 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0+} \mathbf{e}(s+t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0+} \mathbf{e}(s)\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}'(0)\mathbf{e}(t) \\ &= (\alpha \cdot \nabla + P)\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(t)(\alpha \cdot \nabla + P), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $-\alpha = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ и $-P$ обладают теми же свойствами, что α и P , можем определить соответствующие операторы

$$\begin{aligned} [T_-(t)\varphi](x) &= \int_{s^{n-1}} (I - \alpha \cdot \xi) \varphi(x + nt\xi) ds_{n-1}(\xi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ T_{-,P,m}(t) &= T_- \left(\frac{t}{m} \right) - \frac{t}{m} P \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_- = \lim_m T_{-,P,m}^m. \end{aligned}$$

Из предыдущего рассуждения вытекает, что

$$\frac{d\mathbf{e}_-(t)}{dt} = -(\alpha \cdot \nabla + P)\mathbf{e}_-(t) = -\mathbf{e}_-(t)(\alpha \cdot \nabla + P), \quad t \geq 0.$$

Следовательно, $(d/dt)[\mathbf{e}_-(t)\mathbf{e}(t)] = 0, t \geq 0$.

Поэтому $\mathbf{e}_-(t)\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(0)\mathbf{e}(0) = I, t \geq 0$. Учитывая, что $T_{-,P,m}(t) = T_{P,m}(-t)$, получаем $\mathbf{e}(-t) = \mathbf{e}(t)^{-1}, t \geq 0$. На основании этого факта и пункта (b) предложения 4.2 видно, что $\mathbf{e}(t_1+t_2) = \mathbf{e}(t_1)\mathbf{e}(t_2)$ для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Отсюда мы заключаем, что

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = (\alpha \cdot \nabla + P)\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(t)(\alpha \cdot \nabla + P), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дифференциальный оператор $(\alpha \cdot \nabla + P)$ не содержит производных по времени t , поэтому гладкость правой части по t очевидна.

Если g – решение задачи (A), то $(d/dt)(g\mathbf{e}^{-1}) = 0$ и $g(t) = \mathbf{e}(t), t \in \mathbb{R}$.

(B) Формула Лейбница и 4.2 (b) дают

$$\begin{aligned} \sup_{|\tau| \leq j} \|\mathbf{e}(\tau)(\alpha \cdot \nabla + P)^2 \varphi\|_l &\leq \text{const} \|(\alpha \cdot \nabla + P)^2 \varphi\|_{l+n+1} \\ &\leq \text{const} (\|\varphi\|_{l+n+3} + \{\|P\|_{l+n+2} + \|P^2\|_{l+n+2}\} \|\varphi\|_{l+n+2}) \\ &\leq \text{const}(j, l, n, P) \|\varphi\|_{l+n+3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Принимая во внимание, что $T_{P,m}(t) = T_{P,1}(t/m)$ и

$$[T_{P,1}(s) - \mathbf{e}(s)]\varphi(x) = s^2 \int_0^1 (1-\theta) [D^2 T_{P,1}(s\theta) - \mathbf{e}(\theta s)(\alpha \cdot \nabla + P)^2] \varphi(x) d\theta,$$

теорема 3.1 и (10) приводят к

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ T_{P,m}(t) - \mathbf{e}\left(\frac{t}{m}\right) \right\} \varphi \right\|_l &\leq \text{const}(j, n, l, P) \|\varphi\|_{l+3n+5} \left(\frac{t}{m}\right)^2 \\ &= O\left(\left(\frac{t}{m}\right)^2\right) \|\varphi\|_{l+3n+5} \end{aligned} \quad (11)$$

для $m \geq nj$ и $|t| \leq j$. Из теоремы 2.2 следует, что

$$\sup_{|t| \leq j} \|T_{P,m}^k(t)\varphi\| \leq M_1''(j, l, n, P) \|\varphi\|_{l+n+1}, \quad m \geq nj.$$

Применяя лемму 4.1 к операторам

$$U_m = T_{P,m}(t), \quad V_m = \mathbf{e}\left(\frac{t}{m}\right), \quad |t| \leq j, \quad m \geq nj, \quad (12)$$

мы приходим к оценке

$$\|(T_{P,m}^m(t) - \mathbf{e}(t))\varphi\|_l = \|(U_m^m - V_m^m)\varphi\|_l = O\left(\frac{t^2}{m}\right) \|\varphi\|_{l+5n+7}$$

для $|t| \leq j$ и $m \geq nj$.

(С) Из формул

$$T'(\tau) = \alpha \cdot \nabla + \tau \int_0^1 T''(\theta\tau) d\theta, \quad \mathbf{e}(\tau) = I + \tau \int_0^1 \mathbf{e}(\theta\tau)(\alpha \cdot \nabla + P) d\theta$$

и

$$[T''(\tau)\varphi](x) = n^2 \int_{s^{n-1}} (I + \alpha \cdot \xi)(\xi \cdot \nabla)^2 \varphi(x + n\tau\xi) ds_{n-1}(\xi)$$

имеем

$$\{T'(\tau) + P\} - \mathbf{e}(\tau)(\alpha \cdot \nabla + P) = \tau \int_0^1 [T''(\theta\tau) - \mathbf{e}(\theta\tau)(\alpha \cdot \nabla + P)^2] d\theta$$

и

$$\|T''(\tau)\varphi\|_l \leq 2n^4 \|\varphi\|_{l+2}. \quad (13)$$

Поскольку $T_{P,m}(t) = T(t/m) + (t/m)P = T_{P,1}(t/m)$, то

$$D_t T_{P,m} = \frac{1}{m} \left\{ T' \left(\frac{t}{m} \right) + P \right\} = \frac{1}{m} T'_{P,1} \left(\frac{t}{m} \right).$$

Поэтому

$$D_t T_{P,m} - \frac{1}{m} \mathbf{e} \left(\frac{t}{m} \right) (\alpha \cdot \nabla + P) = \frac{t}{m^2} \int_0^1 \left[T'' \left(\frac{\theta t}{m} \right) - \mathbf{e} \left(\frac{\theta t}{m} \right) (\alpha \cdot \nabla + P)^2 \right] d\theta.$$

Следовательно, для $m \geq nj$ (10) и (13) дают

$$\left\| \left(D_t T_{P,m} - \frac{1}{m} \mathbf{e} \left(\frac{t}{m} \right) (\alpha \cdot \nabla + P) \right) \varphi \right\|_l = O \left(\frac{|t|}{m^2} \right) \|\varphi\|_{l+n+3}. \quad (14)$$

Более того, из 3.1 (а) вытекает, что для каждого $m \geq nj$

$$\|D_t T_{P,m} \varphi\|_l = \frac{1}{m} \left\| T'_{P,1} \left(\frac{t}{m} \right) \varphi \right\|_l \leq \frac{\text{const}}{m} \|\varphi\|_{l+1}. \quad (15)$$

Вспоминая (12) для $m \geq nj$, имеем

$$\begin{aligned} D_t T_{P,m}^m - D_t \mathbf{e} &= D_t T_{P,m}^m - \mathbf{e} \left(\frac{t}{m} \right)^m (\alpha \cdot \nabla + P) \\ &= \sum_{k=1}^m U_m^{k-1} (D_t T_{P,m}) U_m^{m-k} - V_m^{k-1} \left[\frac{1}{m} \mathbf{e} \left(\frac{t}{m} \right) (\alpha \cdot \nabla + P) \right] V_m^{m-k}. \end{aligned}$$

Пусть $W_{m,k}$ обозначает k -й член этой суммы, тогда

$$\begin{aligned} W_{m,k} = & [U_m^{k-1} - V_m^{k-1}](D_t T_{P,m})U_m^{m-k} \\ & + V_m^{k-1} \left[D_t T_{P,m} - \frac{1}{m} \mathbf{e} \left(\frac{t}{m} \right) (\alpha \cdot \nabla + P) \right] U_m^{m-k} \\ & + \frac{1}{m} V_m^{k-1} \mathbf{e} \left(\frac{t}{m} \right) (\alpha \cdot \nabla + P) [U_m^{m-k} - V_m^{m-k}]. \end{aligned}$$

Из соотношений (11), (12) следует оценка

$$\| [U_m - V_m] \varphi \|_l = O \left(\frac{t^2}{m^2} \right) \|\varphi\|_{l+3n+5}.$$

Отсюда и из леммы 4.1 получаем

$$\| [U_m^r - V_m^r] \varphi \|_l = r O \left(\frac{t^2}{m^2} \right) \|\varphi\|_{l+5n+7} \quad \text{для } 0 \leq r \leq m.$$

Это соотношение вместе с (14), (15) и 3.1 (b) приводят к окончательной оценке

$$\begin{aligned} \| W_{m,k} \varphi \|_l &= \frac{k-1}{m} O \left(\frac{t^2}{m^2} \right) \|\varphi\|_{l+6n+9} + O \left(\frac{|t|}{m^2} \right) \|\varphi\|_{l+3n+5} \\ &+ \frac{1}{m} (m-k) O \left(\frac{t^2}{m^2} \right) \|\varphi\|_{l+7n+10} \\ &\leq \left[\frac{m-1}{m} O \left(\frac{t^2}{m^2} \right) + O \left(\frac{|t|}{m^2} \right) \right] \|\varphi\|_{l+7n+10}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\| D_t \{ T_{P,m}^m(t) - \mathbf{e}(t) \} \varphi \|_l \leq \left[O \left(\frac{t^2}{m} \right) + O \left(\frac{|t|}{m} \right) \right] \|\varphi\|_{l+7n+10}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $V(x)$, $A_j(x)$ – гладкие потенциалы и q, m – соответственно заряд и масса электрона, то, обозначая

$$P(x) = iq \left[V(x) + \sum_{j=1}^n A_j(x) \right] + m\beta,$$

получим те же результаты для уравнения Дирака.

Автор благодарит проф. А. М. Чеботарева и проф. Р. Гезаду за замечания и помощь при подготовке этой работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Quezada R. Path integral for Dirac equations in momentum space // Univ. Iagellonicae Acta Math. Fasciculus. 1993. V. 30. P. 69–82.
- [2] Chargoy J., Quezada R. Approximation of the solutions of Weyl and Dirac equations by spherical means // Math. Notes. 1994. V. 55. № 3–4. P. 327–333.
- [3] Chargoy J. The Compact-Open topology for Bounded Operators on Fréchet Spaces. Reporte de Investigación, UAM-I. México, 1995.
- [4] Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Berlin: Springer Verlag, 1983.
- [5] Rudin W. Functional Analysis. N. Y.: McGraw-Hill, 1973.
- [6] Royden H. L. Real Analysis. McMillan, 1974.