Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шаповал, О поведении решений квазилинейных эллиптических неравенств в неограниченной области, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 556–568

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1862>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:59:57

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

А. Б. Шаповал

Введение

Пусть в неограниченной области $G \in \mathbb{R}^m$ определен эллиптический оператор вида

$$L = \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (0.1)$$

где $a_{ik} = a_{ki}$, и выполнено условие строгой эллиптичности

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \leq \lambda^{-1} |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m, \quad x \in G. \quad (0.2)$$

В данной заметке изучается поведение решения дифференциального неравенства

$$|Lu| \leq \varphi(|\operatorname{grad} u|), \quad (0.3)$$

$$u|_{\partial G} = 0 \quad (0.4)$$

в неограниченной области

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=2}^m x_i^2 < (\psi(x_1))^2, \quad -\infty < x_1 < \infty \right\}.$$

Здесь $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, а функция $\varphi(\xi)$ непрерывна, положительна при $\xi > 0$ и монотонно возрастает при $\xi \rightarrow \infty$.

Сначала (теорема 1) исследован специальный случай, когда $\varphi(\xi) = a\xi \ln \xi$. В этом случае доказан степенной рост решения неравенства (0.3),

(0.4). Кроме того, указанный частный случай делает более наглядным доказательство теоремы 2, в которой функция $\varphi(\xi)$ – произвольная функция, растущая медленнее, чем $a\xi \ln \xi$.

§ 1. Частный случай

Прежде всего сформулируем вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1 (принцип максимума). Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченное открытое множество и $u(x), v(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, и выполнены неравенства

$$|Lu| \leq \varphi(|\operatorname{grad} u|), \quad |Lv| < -\varphi(|\operatorname{grad} v|),$$

где $\varphi(\xi)$ определена и неотрицательна при $\xi \geq 0$ и

$$\inf_{x \in D} \varphi(|\operatorname{grad} v(x)|) > 0.$$

Пусть $u|_{\partial D} \leq v|_{\partial D}$, тогда $u \leq v$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что лемма неверна. Тогда существует точка $x_0 \in D$ такая, что

$$u(x_0) - v(x_0) = \max_{x \in D} (u(x) - v(x)).$$

Значит, $\operatorname{grad} u(x_0) - \operatorname{grad} v(x_0) = 0$. Положим

$$\xi_0 = |\operatorname{grad} u(x_0)| = |\operatorname{grad} v(x_0)|.$$

Имеем

$$Lu|_{x=x_0} \geq -\varphi(\xi_0), \quad -Lv|_{x=x_0} > \varphi(\xi_0).$$

Следовательно, $L(u - v)|_{x=x_0} > 0$. Противоречие.

ЛЕММА 2. Пусть $f(r)$, $0 < r < \infty$, – положительная монотонно возрастающая функция, и α и ρ – числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < \alpha < 1$, $\rho > 0$. Пусть при достаточно больших натуральных n выполняется неравенство

$$f((n+1)\rho) \geq f(n\rho) + (f(n\rho))^\alpha.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших r

$$f(r) > r^{1/(1-\alpha)-\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы можно найти в [1].

ЛЕММА 3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^m$ – некоторая фиксированная точка. Тогда для всякого $s > 0$ при $x \neq x_0$ имеют место неравенства

$$L\left(\frac{1}{|x - x_0|^s}\right) \geq \frac{s[(s+2)\lambda - m\lambda^{-1}]}{|x - x_0|^{s+2}}, \quad \left| \operatorname{grad} \frac{1}{|x - x_0|^s} \right| = \frac{s}{|x - x_0|^{s+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к непосредственному дифференцированию и применению неравенства (0.2).

Обозначим:

$$\Omega_\psi = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=2}^m x_i^2 < (\psi(x_1))^2, -\infty < x_1 < \infty, \psi(t) \in C(\mathbb{R}) \right\},$$

$$Q_r^x = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid |x - y| < r \}, \quad S_r^x = \partial Q_r^x.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы произвольные числа $C > 0$, $N > 1$ и непрерывная функция ψ , удовлетворяющая условиям

$$|\psi(t)| < R = \operatorname{const} < \infty, \quad (1)$$

$$|\psi'(t)| \leq \beta < \frac{1}{6}. \quad (2)$$

Пусть $G = \Omega_\psi$ – неограниченная область,

$$M(r) = \max_{\substack{x \in G \\ |x_1| = r}} |u(x)|,$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} a\xi |\ln \xi| + C & \text{при } \xi > 0, \\ C & \text{при } \xi = 0. \end{cases}$$

Предположим, что $u(x) \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ – решение неравенства (0.3) в G и $u|_{\partial G} = 0$. Пусть в какой-нибудь точке $x' \in G$ $u(x')$ достаточно велика:

$$u(x') > M, \quad (3)$$

где $M > 0$ – некоторая константа, которая будет указана ниже. Тогда существует $a > 0$ такое, что для $u(x)$ справедливо неравенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) / \left(\int_0^r \frac{dt}{\psi(t)} \right)^N > 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \in \mathbb{R}^m$ — такая точка, что выполнено неравенство $u(x') = \max_{x \in G, x_1=x'_1} u(x) = M' > M$. Заметим, что при $t > x'_1$ выполнено неравенство $\psi(t) > -\beta t + \beta x'_1 + \psi(x'_1)$, и поэтому

$$\int_{x'_1}^{x'_1+6\psi(x'_1)} \frac{dt}{\psi(t)} < \int_{x'_1}^{x'_1+6\psi(x'_1)} \frac{dt}{-\beta t + \beta x'_1 + \psi(x'_1)} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{1-6\beta}. \quad (5)$$

Обозначим через x''_1 такое число, что

$$\int_{x'_1}^{x''_1} \frac{dt}{\psi(t)} = \gamma,$$

через x'''_1 — такое число, что

$$\int_{x'''_1}^{x'_1} \frac{dt}{\psi(t)} = \gamma.$$

Согласно (5), $l_1 = x''_1 - x'_1 > 6\psi(x'_1)$, $l_2 = x'_1 - x'''_1 > 6\psi(x'_1)$. Пусть $R_2 = \min\{l_1, l_2\}$, $R_1 = \frac{1}{2}R_2$, $\tilde{R}_2 = \max\{l_1, l_2\}$, $y' = (x'_1, R_1 - \psi(x'_1), 0, \dots, 0)$, θ такое, что $\operatorname{tg} \theta = \beta$. Тогда $R_1 > 3\psi(x'_1)$, $\tilde{R}_2 > 6\psi(x'_1)$. Положим $u(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega_\psi \setminus G$ и

$$M'' = \max \left\{ \begin{array}{cc} \max_{\substack{x \in \Omega_\psi \\ x_1 = x'_1 + l_1}} u(x), & \max_{\substack{x \in \Omega_\psi \\ x_1 = x'_1 - l_2}} u(x) \end{array} \right\}.$$

Обозначим через l расстояние от y' до G . Рассмотрим в области $Q_{2\tilde{R}_2}^{y'} \cap G$ функцию

$$U(x) = M'' \left(1 - \frac{l^s}{|x - y'|^s} + \frac{l^s}{R_2^s} \right),$$

где s будет выбрана ниже, но она, во всяком случае, будет столь велика, что

$$s > 1, \quad (6)$$

$$(s+2)\lambda - m\lambda^{-1} > 0, \quad (7)$$

$$(s+2)\lambda - m\lambda^{-1} > \frac{s\lambda}{2}. \quad (8)$$

Сейчас будет доказываться, что функции u и U удовлетворяют условиям леммы 1 (принципа максимума). По лемме 3, учитывая, что при $x \in Q_{2\tilde{R}_2}^{y'}$ $|x - y'| < 2\tilde{R}_2$, получим

$$LU \leq \frac{-M''s[(s+2)\lambda - m\lambda^{-1}]l^s}{|x - y'|^{s+2}} < -\frac{M''\lambda s^2 l^s}{8\tilde{R}_2^2 |x - y'|^s}. \quad (9)$$

Опять применим лемму 3:

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} U| &= \frac{M''sl^s}{|x - y'|^{s+1}}, \\ \varphi(|\operatorname{grad} U|) &= \frac{aM''sl^s}{|x - y'|^{s+1}} \left| \ln \frac{M''sl^s}{|x - y'|^{s+1}} \right| + C \\ &= \frac{aM''sl^s}{|x - y'|^s \tilde{R}_2^2} \left(\frac{\tilde{R}_2}{|x - y'|} \right)^2 |x - y'| \cdot \left| \ln \frac{M''sl^s}{|x - y'|^{s+1}} \right| + C. \end{aligned}$$

Оценим сверху $\tilde{R}_2/|x - y'|$ при $x \in Q_{2\tilde{R}_2}^{y'} \cap G$. Для этого обозначим через δ такое число, что

$$\int_{x'_1}^{x'_1 + \delta} \frac{dt}{\beta(t - x'_1) + \psi(x'_1)} = \gamma.$$

Тогда, учитывая (5), получаем, что $\delta = 6\psi(x'_1)/(1 - 6\beta)$ и $\tilde{R}_2 < \delta$. Значит,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{R}_2}{|x - y'|} &\leq \frac{\tilde{R}_2}{l} \leq \frac{\tilde{R}_2}{(\tilde{R}_2/2 - 2\psi(x'_1)) \cos \theta} \\ &\leq \frac{6\psi(x'_1)}{(1 - 6\beta) \cos \theta \cdot \psi(x'_1)} = \frac{6}{(1 - 6\beta) \cos \theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь использовано неравенство $l \geq (R_1 - 2\psi(x'_1)) \cos \theta$, в котором можно убедиться, сделав рисунок.

Положим $\varkappa = \ln(3/(1 - 6\beta) \cos \theta)$. Тогда

$$\frac{l}{R_1} > e^{-\varkappa}. \quad (11)$$

Фиксируем произвольное число

$$A > \max \left\{ N(\chi + 1), 3 \ln \tilde{R}_2, \ln \frac{6}{(1 - 6\beta) \cos \theta} \right\}. \quad (12)$$

Пусть

$$s = \frac{\ln M''}{A}. \quad (13)$$

Будем считать M , а вместе с ним M' , столь большими, что выполняются неравенства (6), (7), (8). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{|x - y'|}{s} \left| \ln \frac{M'' s l^s}{|x - y'|^{s+1}} \right| &\leq \frac{\ln M''}{s} |x - y'| + \frac{\ln s}{s} |x - y'| + |x - y'| \ln \frac{l}{|x - y'|} \\ &\quad - \frac{|x - y'|}{s} \ln |x - y'| \leq AR' + \frac{R'}{e} + e, \end{aligned}$$

где R' — некоторая константа, зависящая только от R . Значит,

$$\varphi(|\operatorname{grad} U|) \leq \frac{M'' \lambda s^2 l^s}{16 \tilde{R}_2^2 |x - y'|^s} \cdot 16 \left(\frac{\tilde{R}_2}{|x - y'|} \right)^2 \cdot \frac{a}{\lambda} \left(AR' + \frac{1}{e} R' + e \right) + C.$$

Учитывая (10), получим

$$\varphi(|\operatorname{grad} U|) \leq \frac{M'' \lambda s^2 l^s}{16 \tilde{R}_2^2 |x - y'|^s} \cdot \frac{576a}{\lambda(1 - 6\beta)^2 \cos^2 \theta} \left(AR' + \frac{1}{e} R' + e \right) + C.$$

Положим

$$a = \frac{(1 - 6\beta)^2 \cos^2 \theta \cdot \lambda}{576(AR' + R'/e + e)}. \quad (14)$$

Заметим, что все константы, входящие в определение константы a , не зависят от точки x' .

Пусть s настолько велика, что $\lambda s^2/16 > C$. Тогда

$$C < \frac{\lambda s^2}{16} < \frac{\lambda s^2}{16} \left(\frac{e^A (1 - 6\beta) \cos \theta}{6} \right)^s \cdot \frac{1}{\tilde{R}_2^2} \leq \frac{M'' l^s \lambda s^2}{16 \tilde{R}_2^2 |x - y'|^s}.$$

Последняя цепочка неравенств верна, так как выражение в круглых скобках, согласно (12), больше 1, а возведенное в степень s при достаточно большом s больше $\tilde{R}_2^2$. Теперь зафиксируем s . Итак, получено

$$\varphi(|\operatorname{grad} U|) \leq \frac{M'' \lambda s^2 l^s}{8 \tilde{R}_2^2 |x - y'|^s}.$$

Сравнивая с (9), имеем $LU < -\varphi(|\operatorname{grad} U|)$.

Пусть

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = x'_1 + l_1\}, \quad L_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = x'_1 - l_2\},$$

Ω' — это часть Ω_ψ , заключенная между L_1 и L_2 , $D = G \cap \Omega'$. Граница ∂D множества D состоит из точек, принадлежащих ∂G , и из точек, лежащих на гиперплоскостях L_1 и L_2 . Для точек $\partial D \cap \partial G$ $u = 0$, а $U \geq M''(1 - l^s/l^s + l^s/R_2^s) > 0$. Для точек $(\partial D \cap L_1) \cup (\partial D \cap L_2)$ $u \leq M''$, а $U \geq M''(1 - l^s/R_2^s + l^s/R_2^s) = M''$. Поэтому $u < U$ всюду на ∂D и по принципу максимума (лемма 1) $u < U$ всюду в D . В частности,

$$\begin{aligned} M' = u(x') &< M'' \left(1 - \frac{l^s}{R_1^s} + \frac{l^s}{R_2^s} \right) \\ &< M'' \left(1 - \frac{l^s}{2R_1^s} \right) \leq M'' \left(1 - \frac{1}{(M'')^{(\kappa+1)/A}} \right) \end{aligned}$$

(последнее неравенство справедливо в силу (11) и (13)). Отсюда, в частности, следует, что $M'' > M'$. Поэтому

$$\begin{aligned} M' &< M'' \left(1 - \frac{1}{(M'')^{(\kappa+1)/A}} \right) \\ &= M'' - (M'')^{1-(\kappa+1)/A} < M'' - (M')^{1-(\kappa+1)/A} \end{aligned}$$

или

$$M'' > M' \left(1 + \frac{1}{(M')^{(\kappa+1)/A}} \right).$$

Таким образом, выполнено одно из двух неравенств

$$\max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + l_1}} u(x) > (1 + (M')^{-(\kappa+1)/A}) \max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1}} u(x) \quad (15)$$

либо

$$\max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 - l_2}} u(x) > (1 + (M')^{-(\kappa+1)/A}) \max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1}} u(x). \quad (16)$$

Допустим, что выполнено (15). Обозначим $l_1 = \rho_1$. Заменим x'_1 на $x'_1 + \rho_1$ и найдем соответствующее l_1 . Положим ρ_2 равным полученному новому значению l_1 . Тогда, заменяя M' на M''' , мы найдем, что

$$\max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1 + \rho_2}} u(x) > (1 + (M''')^{-(\kappa+1)/A}) \max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1}} u(x) \quad (17)$$

либо

$$\max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1}} u(x) > (1 + (M''')^{-(\kappa+1)/A}) \max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1}} u(x). \quad (18)$$

Но (18) невозможно в силу предположения об истинности (15). Продолжая этот процесс и обозначая

$$\max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1 + \dots + \rho_n}} u(x) = M_n, \quad (19)$$

мы найдем, что

$$M_{n+1} > (1 + M_n^{-(\kappa+1)/A}) M_n \quad \text{или} \quad M_{n+1} > M_n + M_n^{1-(\kappa+1)/A}.$$

Пусть $\rho = \rho_1$, $r = x_1 - x'_1$. Определим функцию $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow [\rho, +\infty)$ формулой

$$g(r) = \frac{\rho - (r - (\rho_1 + \dots + \rho_{l-1}))}{\rho_l} + l\rho$$

при $r \in [\rho_1 + \dots + \rho_{l-1}, \rho_1 + \dots + \rho_{l-1} + \rho_l]$, $l = 2, 3, \dots$. Положим

$$f(\eta) = \max_{\substack{x \in \bar{\Omega}_\psi \\ x_1 = g^{-1}(\eta)}} u(x), \quad \eta > \rho.$$

Согласно (19),

$$f((n+1)\rho) > f(n\rho) + (f(n\rho))^{1-(\kappa+1)/A}.$$

По лемме 2 $f(\eta) > \eta^N$. Пусть $r \in [\rho_1 + \dots + \rho_{l-1}, \rho_1 + \dots + \rho_l]$. Тогда $\eta \in [l\rho, (l+1)\rho]$ и

$$\int_{x'_1}^{x'_1+r} \frac{dt}{\psi(t)} \leq \int_{x'_1}^{x'_1+\rho_1+\dots+\rho_l} \frac{dt}{\psi(t)} = \sum_{i=0}^{l-1} \int_{x'_1+\sum_{j=0}^i \rho_j}^{x'_1+\sum_{j=0}^{i+1} \rho_j} \frac{dt}{\psi(t)} = l\gamma.$$

Итак,

$$\begin{aligned} M(r) = f(\eta) &> \eta^N \geq (l\rho)^N \geq \left(\frac{1}{\gamma} \left(\int_{x'_1}^{x'_1+r} \frac{dt}{\psi(t)} \right) \rho \right)^N \\ &= \left(\frac{\rho}{\gamma} \right)^N \int_0^r \frac{dt}{\psi(t-x'_1)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. Константа a выбрана в (14).

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $\beta < 1/6$ не существенно. Чтобы теорема была верна, нужно требовать, чтобы β было произвольным положительным числом, потому что, сделав замену переменных $x_1 \rightarrow kx_1, x_i \rightarrow x_i, i \neq 1$, при подходящем k , мы сведем задачу к разобранному в теореме 1 случаю.

§ 2. Случай функции $\varphi(\xi)$, растущей медленнее, чем $\xi \ln \xi$

Сейчас мы рассмотрим случай, когда функция $\varphi(\xi)$ из неравенства (0.3) растет достаточно медленно:

$$\varphi(\xi) = o(\xi \ln \xi)$$

при $\xi \rightarrow \infty$.

Через $g(\xi)$ в этом параграфе мы будем обозначать непрерывную положительную, монотонно возрастающую функцию, удовлетворяющую условию: для любого $\rho > 0$ при достаточно больших ξ ($\xi > \xi_0$)

$$\frac{d}{d\xi}(\xi - \rho g(\xi)) > 0, \quad \xi - \rho g(\xi) > 0. \quad (20)$$

(заметим, что при этом $\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \infty$).

Через $r = F(\xi)$, $0 < \xi_0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq r < \infty$, будем обозначать функцию

$$r = F(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dt}{g(t)}$$

и через $\Phi(r)$ — функцию, обратную $F(\xi)$:

$$\Phi(r) = F^{-1}(\xi).$$

ЛЕММА 4. Пусть $f(\xi)$, $0 < \xi_0 \leq \xi < \infty$, — положительная монотонно возрастающая функция и существуют такие вещественное $\rho > 0$ и натуральное n_0 , что при всех $n > n_0$ выполнено условие

$$f((n+1)\rho) - g(f((n+1)\rho)) \geq f(n\rho).$$

Тогда найдется такое $R > 0$, что при достаточно больших r

$$f(r) > \Phi(r - R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы непрерывная функция $\psi(t)$, удовлетворяющая (1) и (2), и $G \subset \Omega_\psi$ — неограниченная область. Пусть $u(x)$ — решение в G неравенства (0.3) с функцией φ , имеющей вид

$$\varphi(\xi) = \xi h(\ln \xi), \quad \xi > \xi_0 > 1,$$

где

$$h(t) = o(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$h(t) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (22)$$

$h(t)$ — непрерывно дифференцируемая, положительная, монотонно возрастающая, выпуклая вверх функция. (23)

Тогда найдутся такие $M > 0$, $K > 0$, $\rho > 0$, $a > 0$, $r_0 > 0$, и $\gamma > 0$, что если в некоторой точке x области G $u(x) > M$, то для функции и при достаточно больших r

$$M(r) > \Phi \left(\frac{\rho}{\gamma} \int_{x'_1}^{x'_1+r} \frac{dt}{\psi(t)} - K \right)$$

при $r > r_0$, где Φ строится по ψ так, как сказано выше, а

$$g(\xi) = \frac{1}{\rho} \xi e^{-ah(\ln \xi)}.$$

При этом $g(\xi)$ удовлетворяет (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M' , $l_1, l_2, R_1, R_2, \tilde{R}_2, y', l, M'', U(x)$ — те же, что и в доказательстве теоремы 1.

Тогда будет выполнено (9):

$$LU \leq \frac{M'' s^2 \lambda^s}{8 \tilde{R}_2^2 |x - y'|^2}, \quad |\text{grad } U| = \frac{M'' s l^s}{|x - y'|^{s+1}},$$

$$\varphi(|\text{grad } U|) = \frac{M'' s l^s}{|x - y'|^{s+2}} |x - y'| h \left(\ln \frac{M'' s l^s}{|x - y'|^{s+1}} \right).$$

Согласно (21)–(23)

$$\begin{aligned} \frac{|x - y'|}{R'} h \left(\ln \frac{M'' s l^s}{|x - y'|^{s+1}} \right) &\leq h \left(\frac{|x - y'|}{R'} \cdot \ln \frac{M'' s l^s}{|x - y'|^{s+1}} \right) \\ &\leq h \left(\frac{1}{R'} \ln \frac{M'' s l^s}{|x - y'|^s} \right) \leq h \left(\frac{\ln M'' + \ln s - s \ln(l/|x - y'|)}{R'} \right) \\ &\leq h \left(\frac{\ln M'' + \ln s}{R'} \right), \end{aligned}$$

где R' – то же, что и в доказательстве теоремы 1. Можно считать, что $R' > 2$.

Значит,

$$\varphi(|\operatorname{grad} U|) \leq \frac{M'' s l^s R'}{|x - y'|^s \tilde{R}_2^2} \cdot \frac{\tilde{R}_2^2}{|x - y'|^2} \cdot h(\ln M'' + \ln s).$$

Применяя (10), получаем

$$\varphi(|\operatorname{grad} U|) \leq \frac{M'' s l^s R'}{\tilde{R}_2^2 |x - y'|^s} \cdot \frac{36}{(1 - 6\beta)^2 \cos^2 \theta} \cdot h(\ln M'' + \ln s).$$

Будем искать s из условия

$$\frac{36 R'}{(1 - 6\beta)^2 \cos^2 \theta} \cdot h\left(\frac{2 \ln M''}{R'}\right) = \frac{\lambda s}{8}. \quad (24)$$

Тогда

$$\varphi(|\operatorname{grad} U|) \leq \frac{M'' \lambda s^2 l^s}{8 \tilde{R}_2^2 |x - y'|^s}$$

и $LU < -\varphi(|\operatorname{grad} U|)$.

Пусть

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = x'_1 + l_1\}, \quad L_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = x'_1 - l_2\},$$

Ω' – это часть Ω_ψ , заключенная между L_1 и L_2 , $D = G \cap \Omega'$.

Граница ∂D множества D состоит из точек, принадлежащих ∂G , и из точек, лежащих на гиперплоскостях L_1 и L_2 .

Для точек $\partial D \cap \partial G$ $u = 0$, а $U \geq M''(1 - l^s/l^s + l^s/R_2^s) > 0$. Для точек $(\partial D \cap L_1) \cup (\partial D \cap L_2)$ $u \leq M''$, $U \geq M''(1 - l^s/R_2^s + l^s/R_2^s) = M''$.

Значит, $u < U$ всюду на ∂D и по принципу максимума (лемма 1) $u < U$ всюду в D .

В частности,

$$M' = u(x') < M'' \left(1 - \frac{l^s}{R_1^s} + \frac{l^s}{R_2^s}\right) < M'' \left(1 - \frac{l^s}{2R_1^s}\right).$$

Согласно (10), (24),

$$M' \leq M'' \left[1 - \left(\frac{(1 - 6\beta) \cos \theta}{3}\right)^{\frac{288 R'}{(1 - 6\beta)^2 \cos^2 \theta} h(2 \ln M'')}\right].$$

Обозначим

$$a = \frac{576 R'}{(1 - 6\beta)^2 \cos^2 \theta} \cdot \ln \frac{3}{(1 - 6\beta) \cos \theta}. \quad (25)$$

Тогда

$$M' < M'' - M'' e^{-ah(\ln M'')}. \quad (26)$$

Таким образом, выполнено одно из двух:

$$\max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1}} u(x) < \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + l_1}} u(x) - \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + l_1}} u(x) e^{-ah(\ln M'')} \quad (27)$$

либо

$$\max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1}} u(x) < \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 - l_2}} u(x) - \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 - l_2}} u(x) e^{-ah(\ln M'')}. \quad (28)$$

Допустим, что выполнено (27). Обозначим $\rho_1 = l_1$,

$$M''' = \max \left\{ \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1 + \rho_2}} u(x), \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1}} u(x) \right\}.$$

Здесь ρ_2 строится так же, как и ρ_1 , т.е.

$$\int_{x'_1 + \rho_1}^{x'_1 + \rho_1 + \rho_2} \frac{dr}{\psi(r)} = \gamma.$$

Заменяя x'_1 на $x'_1 + \rho_1$ и M' на M''' , получим, что

$$\max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1}} u(x) < \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1 + \rho_2}} u(x) - \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1 + \rho_2}} u(x) e^{-ah(\ln M'')} \quad (29)$$

либо

$$\max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1}} u(x) < \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1}} u(x) - \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1}} u(x) e^{-ah(\ln M'')}. \quad (30)$$

Но (30) невозможно в силу истинности (27).

Продолжая этот процесс и обозначая

$$M_n = \max_{\substack{x \in \overline{\Omega}_\psi \\ x_1 = x'_1 + \rho_1 + \dots + \rho_n}} u(x),$$

получим

$$M_n < M_{n+1} - M_{n+1} e^{-ah(\ln M_{n+1})}. \quad (31)$$

Пусть $\rho = \rho_1$, $r = x_1 - x'_1$. Определим функцию $\theta: \mathbb{R}^+ \rightarrow [\rho, +\infty)$. Пусть $r \in [\rho_1 + \dots + \rho_{l-1}, \rho_1 + \dots + \rho_{l-1} + \rho_l)$. Тогда по определению

$$\theta(r) = \frac{\rho(r - (\rho_1 + \dots + \rho_{l-1}))}{\rho_l} + l\rho.$$

Заметим, что функция θ переводит отрезок $[\rho_1 + \dots + \rho_{l-1}, \rho_1 + \dots + \rho_l]$ в отрезок $[l\rho, (l+1)\rho]$.

Пусть

$$f(\eta) = \max_{\substack{x \in \Omega_\psi \\ x_1 = \theta^{-1}(\eta)}} u(x), \quad \eta > \rho. \quad (32)$$

Положим

$$g(\xi) = \xi e^{-ah(\ln \xi)}. \quad (33)$$

Проверим, что функция $g(\xi)$ удовлетворяет условию (20). Действительно, $g'(\xi) = (1 - ah'(\ln \xi))e^{-ah(\ln \xi)}$. Так как $h(t) = o(t)$ и $h(t)$ выпукла вверх, то $h'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому при достаточно больших ξ $\theta'(\xi) > 0$. Далее, при больших ξ $g'(\xi) < 1$. Поэтому $\xi - g'(\xi)$ монотонно возрастает (при больших ξ).

Согласно определениям (32), (33) функций f и g и неравенству (31)

$$f(n\rho) < f((n+1)\rho) - g(f((n+1)\rho)).$$

Применяя лемму 4, получим, что существует такое K^+ , что при больших η

$$f(\eta) > \Phi(\eta - K^+).$$

Пусть $r \in [\rho_1 + \dots + \rho_{l-1}, \rho_1 + \dots + \rho_l]$. Тогда $\eta \in [l\rho, (l+1)\rho]$ и

$$\int_{x'_1}^{x'_1+r} \frac{dt}{\psi(t)} \leq \int_{x'_1}^{x'_1+\rho_1+\dots+\rho_l} \frac{dt}{\psi(t)} = \sum_{i=0}^{l-1} \int_{x'_1+\sum_{j=0}^i \rho_j}^{x'_1+\sum_{j=0}^{i+1} \rho_j} \frac{dt}{\psi(t)} = l\gamma,$$

$$M(r) = f(\eta) > \Phi(\eta - K^+) \geq \Phi(l\rho - K^+) \geq \Phi\left(\frac{\rho}{\gamma} \int_{x'_1}^{x'_1+r} \frac{dt}{\psi(t)} - K^+\right).$$

Это неравенство получено в предположении истинности (27). Если верно (28), то, меняя направление оси X на противоположное, получим, что существует константа K^- такая, что выполнено неравенство

$$M(r) = \Phi\left(\frac{\rho}{\gamma} \int_{x'_1}^{x'_1+r} \frac{dt}{\psi(t)} - K^-\right).$$

Положим $K = \max\{K^+, K^-\}$. Получим, что при достаточно больших r

$$M(r) \geq \Phi\left(\frac{\rho}{\gamma} \int_{x'_1}^{x'_1+r} \frac{dt}{\psi(t)} - K\right).$$

Теорема доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14.07.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландис Е. М. Оценки решений квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 45–62.