Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, И. А. Вагабов, О сходимости
средних Валле Пуссена для сумм Фурье–Якоби,
Матем. заметки, 1996, том 60, выпуск 4, 569–586

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:09:23

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ДЛЯ СУММ ФУРЬЕ–ЯКОБИ

И. И. Шарапудинов, И. А. Вагабов

1. Через $C[-1, 1]$ мы обозначим, как обычно, нормированное пространство непрерывных функций, заданных на $[-1, 1]$ с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : -1 \leq x \leq 1\}$.

Пусть $S_m^{\alpha, \beta}(f) = S_m^{\alpha, \beta}(f, x)$ – сумма Фурье функции $f \in C[-1, 1]$ порядка m по многочленам Якоби $(\alpha, \beta > -1)$

$$P_k^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k! \cdot \rho(x)} \{(1-x^2)^k \rho(x)\}^{(k)}, \quad \rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta.$$

Если $\lambda = \max\{\alpha, \beta\} > -1/2$, то, как хорошо известно [1], [2], норма $\|S_m^{\alpha, \beta}\|$ линейного оператора $f \rightarrow S_m^{\alpha, \beta}(f)$, действующего в $C[-1, 1]$ при $m \rightarrow \infty$, растет со скоростью $O(m^{\lambda+1/2})$ и, как следствие, $S_m^{\alpha, \beta}(f)$ плохо аппроксимирует функцию $f \in C[-1, 1]$. Более того, как показано в [3], отрицательное влияние роста констант Лебега $\|S_m^{\alpha, \beta}\|$ на сходимость $S_m^{\alpha, \beta}(f)$ к $f(x)$ не ослабевает вместе с ростом гладкости функции на $[-1, 1]$.

Возникает вопрос: сохранится ли влияние роста констант Лебега на сходимость сумм

$$\psi_{m,n}^{\alpha, \beta}(f) = \psi_{m,n}^{\alpha, \beta}(f, x) = \frac{1}{n+1} [S_m^{\alpha, \beta}(f, x) + \dots + S_{m+n}^{\alpha, \beta}(f, x)], \quad (1.1)$$

представляющих собой средние Валле Пуссена для сумм Фурье–Якоби.

В известной монографии [4] (теорема 9.1.3) исследуется вопрос о сходимости средних Чезаро $\sigma_s^k(f, x)$ порядка k к непрерывной функции $f(x)$ в точке $x = 1$ при $k > \alpha + 1/2$. В частности, если $k = 1$, $\alpha < 1/2$, то средние арифметические

$$F_s^{\alpha, \beta}(f, x) = \frac{1}{s+1} \sum_{\nu=0}^s S_\nu^{\alpha, \beta}(f, x) \quad (1.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01526.

сходятся при $x = 1$ к $f(1)$ для произвольной $f \in C[-1, 1]$, стало быть, нормы линейных функционалов $F_s^{\alpha, \beta}(f, 1)$ в $C[-1, 1]$ равномерно ограничены. Другими словами, если $-1 < \alpha < 1/2$, то

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |F_s^{\alpha, \beta}(f, 1)| = O(1). \quad (1.3)$$

С другой стороны, в работах [5], [6], в частности, было показано, что если $-1/2 \leq \beta \leq \alpha$, то

$$\|F_s^{\alpha, \beta}\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |F_s^{\alpha, \beta}(f, x)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |F_s^{\alpha, \beta}(f, 1)|. \quad (1.4)$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что если $-1/2 \leq \beta \leq \alpha < 1/2$, то

$$\|F_s^{\alpha, \beta}\| = O(1). \quad (1.5)$$

Далее, поскольку

$$\psi_{m,n}^{\alpha, \beta}(f, x) = \frac{n+m+1}{n+1} F_{n+m}^{\alpha, \beta}(f, x) - \frac{m}{n+1} F_{m-1}^{\alpha, \beta}(f, x),$$

то из (1.5) при выполнении условий $-1/2 \leq \beta \leq \alpha < 1/2$ и $m = O(n)$ имеем

$$\|\psi_{m,n}^{\alpha, \beta}\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |\psi_{m,n}^{\alpha, \beta}(f, x)| = O(1). \quad (1.6)$$

Тем самым доказано, что если $-1/2 \leq \beta \leq \alpha < 1/2$ и $m = O(n)$, то для произвольной функции $f \in C[-1, 1]$ средние Валле Пуссена $\psi_{m,n}^{\alpha, \beta}(f)$ сходятся к f в $C[-1, 1]$.

Аналогичный результат при $-1/2 < \beta \leq \alpha$ был получен в работе [7] для общих линейных методов суммирования, из которого, в частности, для $-1/2 \leq \beta \leq \alpha < 1/2$ можно вывести оценку (1.6). Следует заметить, что при доказательстве сходимости средних Валле Пуссена $\psi_{m,n}^{\alpha, \beta}(f)$ к $f \in C[-1, 1]$ при условии $-1/2 \leq \beta \leq \alpha < 1/2$ существенно использовался тот факт, что в этом случае имеет место равенство (1.4). В силу симметрии многочленов Якоби $P_k^{\alpha, \beta}(x) = (-1)^k P_k^{\beta, \alpha}(-x)$, случай $-1/2 \leq \alpha \leq \beta < 1/2$ сводится к рассмотренному случаю $-1/2 \leq \beta \leq \alpha < 1/2$.

В настоящей статье при условии $-1 < \alpha, \beta \leq 0, 0 < a \leq m/n \leq b$ (a и b – фиксированные числа) дается доказательство равномерной ограниченности в $C[-1, 1]$ семейства операторов Валле Пуссена $\psi_{m,n}^{\alpha, \beta}(f)$, не опирающееся на равенство типа (1.4). Тем самым, при условии $-1/2 \leq \alpha \leq \beta \leq 0$ (или $-1/2 \leq \beta \leq \alpha \leq 0$) мы получили новое доказательство известного результата о равномерной ограниченности в $C[-1, 1]$ соответствующих операторов Валле Пуссена $\psi_{m,n}^{\alpha, \beta}(f)$. Если же $\min\{\alpha, \beta\} < -1/2$, то полученный нами результат является новым.

2. Нам понадобится ряд свойств многочленов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ [4]. Для удобства ссылок мы соберем их в этом пункте:

$$\begin{aligned} P_0^{\alpha,\beta}(x) &= 1, \quad P_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad P_{-1}^{\alpha,\beta}(x) = 0, \\ 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{\alpha,\beta}(x) \\ &= (2n + \alpha + \beta - 1) \\ &\quad \times \{ (2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2 \} P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) \\ &\quad - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x) \\ &\quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha,\beta}(x, t) &= \sum_{\nu=0}^n \{h_\nu^{\alpha,\beta}\}^{-1} P_\nu^{\alpha,\beta}(x) P_\nu^{\alpha,\beta}(t) \\ &= \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n + \alpha + \beta + 2} \cdot \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)} \\ &\quad \times \frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(t) - P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)}{x - t}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \cdot \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) - \frac{n + \alpha + 1}{n + 1} P_n^{\alpha,\beta}(x) \\ = -\frac{2n + \alpha + \beta + 2}{2(n + 1)} (1 - x) P_n^{\alpha+1,\beta}(x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) + \frac{n + \beta + 1}{n + 1} P_n^{\alpha,\beta}(x) \\ = \frac{2n + \alpha + \beta + 2}{2(n + 1)} (1 + x) P_n^{\alpha,\beta+1}(x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$S_n^{\alpha,\beta}(f, x) = \int_{-1}^1 K_n^{\alpha,\beta}(x, t) \rho(t) f(t) dt, \quad (2.6)$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(-x), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} n^{1/2} |P_{n-1}^{\nu,\gamma}(x)| &\leq c(\nu, \gamma) \left((1 - x)^{1/2} + \frac{1}{n} \right)^{-\nu-1/2} \\ &\quad \times \left((1 + x)^{1/2} + \frac{1}{n} \right)^{-\gamma-1/2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где здесь и далее $c, c_k(\nu, \gamma, \dots, \mu)$ — означают положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах.

3. Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА. *Выполнено*

$$\begin{aligned}
 (x-t) \sum_{k=0}^{j-1} k P_k^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t) \\
 = \frac{j(j+\alpha+\beta+1)}{2j+\alpha+\beta+1} [P_j^{\alpha+1, \beta}(x) P_{j-1}^{\alpha, \beta+1}(t) - P_j^{\alpha, \beta+1}(t) P_{j-1}^{\alpha+1, \beta}(x)] \\
 - \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{(\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+2)}{(2k+\alpha+\beta+3)(2k+\alpha+\beta+1)} + \frac{1}{2}(x-t)(\alpha+\beta+2) \right] \\
 \quad \times P_k^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t) \\
 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{2k+\alpha+\beta+1} [(\alpha+1)\beta P_{k-1}^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t) \\
 - \alpha(\beta+1) P_{k-1}^{\alpha, \beta+1}(t) P_k^{\alpha+1, \beta}(x)].
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем формулу (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{2k(k+\alpha+\beta)}{2k+\alpha+\beta} P_k^{\alpha, \beta}(x) + \frac{2(k+\alpha-1)(k+\beta-1)}{2k+\alpha+\beta-2} P_{k-2}^{\alpha, \beta}(x) \\
 = (2k+\alpha+\beta-1) \left\{ x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta-2)} \right\} P_{k-1}^{\alpha, \beta}(x),
 \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned}
 \frac{2k(k+\alpha+\beta)}{2k+\alpha+\beta} P_k^{\alpha, \beta}(x) + \frac{2(k-1)(k-1+\alpha+\beta)}{2(k-1)+\alpha+\beta} P_{k-2}^{\alpha, \beta}(x) \\
 = (2k+\alpha+\beta-1) \left\{ x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta-2)} \right\} P_{k-1}^{\alpha, \beta}(x) \\
 - \frac{2\alpha\beta}{2k+\alpha+\beta-2} P_{k-2}^{\alpha, \beta}(x).
 \end{aligned}$$

Заменяя α на $\alpha+1$, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{2k(k+\alpha+\beta+1)}{2k+\alpha+\beta+1} P_k^{\alpha+1, \beta}(x) + \frac{2(k-1)(k+\alpha+\beta)}{2(k-1)+\alpha+\beta+1} P_{k-2}^{\alpha+1, \beta}(x) \\
 = (2k+\alpha+\beta) \left\{ x + \frac{(\alpha+1)^2 - \beta^2}{(2k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta-1)} \right\} P_{k-1}^{\alpha+1, \beta}(x) \\
 - \frac{2(\alpha+1)\beta}{2k+\alpha+\beta-1} P_{k-2}^{\alpha+1, \beta}(x). \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \frac{2k(k+\alpha+\beta+1)}{2k+\alpha+\beta+1} P_k^{\alpha,\beta+1}(t) + \frac{2(k-1)(k+\alpha+\beta)}{2(k-1)+\alpha+\beta+1} P_{k-2}^{\alpha,\beta+1}(t) \\ &= (2k+\alpha+\beta) \left\{ x + \frac{\alpha^2 - (\beta+1)^2}{(2k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta-1)} \right\} P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(t) \\ & \quad - \frac{2\alpha(\beta+1)}{2k+\alpha+\beta-1} P_{k-2}^{\alpha,\beta+1}(t). \quad (3.2) \end{aligned}$$

Теперь вычтем (3.2), помноженный на $P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(x)$, из (3.1), помноженного на $P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(t)$, тогда при $k \geq 2$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{2k(k+\alpha+\beta+1)}{2k+\alpha+\beta+1} [P_k^{\alpha+1,\beta}(x) P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(t) - P_k^{\alpha,\beta+1}(t) P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(x)] \\ & - \frac{2(k-1)(k+\alpha+\beta)}{2(k-1)+\alpha+\beta+1} [P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(x) P_{k-2}^{\alpha,\beta+1}(t) - P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(t) P_{k-2}^{\alpha+1,\beta}(x)] \\ &= (2k+\alpha+\beta) \left\{ x - t + \frac{2(\alpha+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta-1)} \right\} \\ & \times P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(x) P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(t) - \frac{2}{2k+\alpha+\beta-1} [(\alpha+1)\beta P_{k-2}^{\alpha+1,\beta}(x) P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(t) \\ & \quad - \alpha(\beta+1) P_{k-2}^{\alpha,\beta+1}(t) P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(x)]. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Кроме того, при $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2(\alpha+\beta+2)}{\alpha+\beta+3} [P_1^{\alpha+1,\beta}(x) P_0^{\alpha,\beta+1}(t) - P_1^{\alpha,\beta+1}(t) P_0^{\alpha+1,\beta}(x)] \\ &= (\alpha+\beta+2) \left\{ x - t + \frac{2}{\alpha+\beta+3} \right\} P_0^{\alpha+1,\beta}(x) P_0^{\alpha,\beta+1}(t). \quad (3.4) \end{aligned}$$

Суммируя правые и левые части равенства (3.3) от $k = 2$ до $k = j$ и учитывая при $k = 1$ равенство (3.4), мы приходим к утверждению леммы.

Рассмотрим формулу (2.2). Полагая

$$\frac{2^{-\alpha-\beta}}{2k+\alpha+\beta+2} \cdot \frac{\Gamma(k+2)\Gamma(k+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)} = 2^{-\alpha-\beta-1}k + q_k,$$

где в силу формулы Стирлинга $q_k = O(1)$, имеем

$$\left(Q + q_k \frac{P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta}(t) - P_k^{\alpha,\beta}(x) P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)}{x - t}, \quad x \neq t \right)$$

$$\begin{aligned}
K_k^{\alpha, \beta}(x, t) &= (2^{-\alpha-\beta-1}k + q_k) \frac{P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x)P_k^{\alpha, \beta}(t) - P_k^{\alpha, \beta}(x)P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t)}{x - t} \\
&= \frac{k}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x)P_k^{\alpha, \beta}(t) - P_k^{\alpha, \beta}(x)P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t)}{x - t} + Q \\
&= \frac{k}{2^{\alpha+\beta+2}} \left(\frac{P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x)P_k^{\alpha, \beta}(t) - P_k^{\alpha, \beta}(x)P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t)}{x - t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x)P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) - P_k^{\alpha, \beta}(x)P_k^{\alpha, \beta}(t)}{x - t} \right) \\
&\quad - 2^{-\alpha-\beta-1}k \frac{P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x)P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) - P_k^{\alpha, \beta}(x)P_k^{\alpha, \beta}(t)}{x - t} + Q \\
&= \frac{2^{-\alpha-\beta-1}k}{x - t} [P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) - P_k^{\alpha, \beta}(x)] [P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) + P_k^{\alpha, \beta}(t)] \\
&\quad - 2^{-\alpha-\beta-1} \frac{(k+1)P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x)P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) - kP_k^{\alpha, \beta}(x)P_k^{\alpha, \beta}(t)}{x - t} \\
&\quad + 2^{-\alpha-\beta-1} \frac{P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x)P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t)}{x - t} + Q. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&k [P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) - P_k^{\alpha, \beta}(x)] [P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) + P_k^{\alpha, \beta}(t)] \\
&= k \left[P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) - \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(x) + \frac{\alpha}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(x) \right] \\
&\quad \times \left[P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) + \frac{k + \beta + 1}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(t) - \frac{\beta}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(t) \right] \\
&= k \left[P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) - \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(x) \right] \left[P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) + \frac{k + \beta + 1}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(x) \right] \\
&\quad - \frac{k\beta}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(t) \left[P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) - \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(x) \right] \\
&\quad + \frac{k\alpha}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(x) [P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) + P_k^{\alpha, \beta}(t)]. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Кроме того, воспользовавшись равенством (2.4) и (2.5), мы можем записать

$$\begin{aligned}
&k \left[P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) - \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(x) \right] \left[P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) + \frac{k + \beta + 1}{k + 1} P_k^{\alpha, \beta}(t) \right] \\
&= - \left[\frac{2k + \alpha + \beta + 2}{2(k + 1)} \right]^2 \frac{k(1 - x)(1 + t)}{2^{\alpha+\beta+1}} P_k^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t) \\
&= -k(1 - x)(1 + t) P_k^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t) \\
&\quad + \delta_k(1 - x)(1 + t) P_k^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t), \tag{3.7}
\end{aligned}$$

где $\delta_k = O(1)$.

Сопоставляя (3.5)–(3.7), мы имеем ($x \neq t$)

$$\begin{aligned} K_k^{\alpha, \beta}(x, t) &= \frac{-k(1-x)(1+t)}{2^{\alpha+\beta+1}(x-t)} P_k^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t) \\ &+ H_k^1 \frac{P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(t)}{x-t} + H_k^2 \frac{P_k^{\alpha, \beta}(x) P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t)}{x-t} + H_k^3 \frac{P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(t)}{x-t} \\ &+ H_k^4 \frac{P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t)}{x-t} - \frac{(k+1) P_{k+2}^{\alpha, \beta}(x) P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) - k P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(t)}{2^{\alpha+\beta+1}(x-t)} \\ &+ \delta_k \frac{(1-x)(1+t)}{x-t} P_k^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $H_k^i = O(1)$ ($k \rightarrow \infty$).

4. Основным результатом настоящей статьи является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $-1 < \alpha, \beta \leq 0$, a, b – положительные числа ($a \leq b$). Тогда средние Валле Пуссена $\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha, \beta} = \mathcal{V}_{m,n}^{\alpha, \beta}(f)$ равномерно относительно $a \leq m/n \leq b$ ограничены как линейные операторы, действующие в пространстве $C[-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим норму $\|\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha, \beta}(x)\|$ функционала $\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha, \beta}(f, x)$ в $C[-1, 1]$.

Из (1.1) и (2.6) имеем

$$\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha, \beta}(f, x) = \int_{-1}^1 f(t) \rho(t) \frac{1}{n+1} \sum_{k=m}^{m+n} K_k^{\alpha, \beta}(x, t) dt, \quad (4.1)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha, \beta}(x)\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} |\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha, \beta}(f, x)| \\ &= \int_{-1}^1 \rho(t) \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=m}^{m+n} K_k^{\alpha, \beta}(x, t) \right| dt. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Мы рассмотрим отдельно два случая:

$$1) \quad x \in \left[0, 1 - \frac{4}{n^2}\right], \quad 2) \quad x \in \left[1 - \frac{4}{n^2}, 1\right].$$

(Так как в силу (2.7) и (4.2) $\|\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha, \beta}(-x)\| = \|\mathcal{V}_{m,n}^{\beta, \alpha}(x)\|$, то нам незачем рассматривать случай $x \in [-1, 0]$.) Остановимся на первом случае. Положим

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left[-1, -\frac{1}{2}\right], & \Delta_2 &= \left[-\frac{1}{2}, x - \frac{(1-x^2)^{1/2}}{n}\right], \\ \Delta_3 &= \left[x - \frac{(1-x^2)^{1/2}}{n}, x + \frac{(1-x^2)^{1/2}}{n}\right], & \Delta_4 &= \left[x + \frac{(1-x^2)^{1/2}}{n}, 1\right] \end{aligned}$$

и представим интеграл (4.2) по следующей схеме

$$\int_{-1}^1 = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} + \int_{\Delta_3} + \int_{\Delta_4}. \quad (4.3)$$

Для оценки интегралов $\int_{\Delta_1}$, $\int_{\Delta_2}$, $\int_{\Delta_4}$ мы воспользуемся неравенством (см. (3.8) и (4.2))

$$\int_{\Delta_i} \leq \sum_{l=0}^6 V_l^i \quad (i = 1, 2, 4), \quad (4.4)$$

где

$$V_0^i = \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_i} \rho(t) \left| \frac{(1-x)(1+t)}{2^{\alpha+\beta+1}(x-t)} \times \sum_{k=m}^{m+n} k P_k^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t) \right| dt, \quad (4.5)$$

$$V_1^i = \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_i} \rho(t) \left| \frac{1}{x-t} \sum_{k=m}^{m+n} H_k^1 P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(t) \right| dt, \quad (4.6)$$

$$V_2^i = \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_i} \rho(t) \left| \frac{1}{x-t} \sum_{k=m}^{m+n} H_k^2 P_k^{\alpha, \beta}(x) P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) \right| dt, \quad (4.7)$$

$$V_3^i = \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_i} \rho(t) \left| \frac{1}{x-t} \sum_{k=m}^{m+n} H_k^3 P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(t) \right| dt, \quad (4.8)$$

$$V_4^i = \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_i} \rho(t) \left| \frac{1}{x-t} \sum_{k=m}^{m+n} H_k^4 P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) \right| dt, \quad (4.9)$$

$$V_5^i = \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_i} \rho(t) \left| \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}(x-t)} \sum_{k=m}^{m+n} [(k+1) P_{k+1}^{\alpha, \beta}(x) P_{k+1}^{\alpha, \beta}(t) - k P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(t)] \right| dt, \quad (4.10)$$

$$V_6^i = \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_i} \rho(t) \left| \frac{(1-x)(1+t)}{x-t} \sum_{k=m}^{m+n} \delta_k P_{k+1}^{\alpha+1, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta+1}(t) \right| dt. \quad (4.11)$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что $0 < a \leq m/n \leq b$, где a, b — фиксированы. Положительные постоянные $c(\alpha, \beta)$, встречающиеся ниже, вообще говоря, зависят также и от a и b , т.е. $c(\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta, a, b)$. Если

$0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$, то в силу (2.8) при $-1 < \alpha \leq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_1} \frac{(1-x)(1+t)^{\beta+1}(1-t)^\alpha}{x-t} |kP_k^{\alpha+1,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta+1}(t)| dt \\ & \leq c(\alpha, \beta)(1-x) \left((1-x)^{1/2} + \frac{1}{k} \right)^{-\alpha-3/2} \\ & \quad \times \int_{\Delta_1} (1+t)^{\beta+1} \left((1+t)^{1/2} + \frac{1}{k} \right)^{-\beta-3/2} dt \\ & \leq c(\alpha, \beta) \int_{\Delta_1} (1+t)^{\beta/2+1/4} dt \leq c(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Сопоставляя эту оценку с (4.5), заключаем, что

$$V_0^1 \leq c(\alpha, \beta). \quad (4.12)$$

Поскольку $H_k^l = O(1)$ ($l = 1, 2, 3, 4$), $\delta_k = O(1)$, то аналогично имеем

$$V_l^1 \leq c(\alpha, \beta) \quad (l = 1, 2, 3, 4, 6). \quad (4.13)$$

Что касается случая $l = 5$, то, как нетрудно заметить, из (4.10) находим

$$\begin{aligned} V_5^i = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{n+1} \int_{\Delta_i} \rho(t) \left| \frac{1}{x-t} [(m+n+1)P_{m+n+1}^{\alpha,\beta}(x)P_{m+n+1}^{\alpha,\beta}(t) \right. \\ \left. - mP_m^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(t)] \right| dt, \quad (4.14) \end{aligned}$$

и, используя (2.8), выводим $V_5^1 \leq c(\alpha, \beta)$.

Отсюда и из (4.12), (4.13), (4.4) находим

$$\int_{\Delta_1} \leq c(\alpha, \beta). \quad (4.15)$$

Перейдем к оценке V_l^2 . Рассмотрим сначала случай $1 \leq l \leq 6$. Так как при $x \in \Delta_2$, $a \leq m/n \leq b$, $m \leq k \leq m+n$, $1/k = O((1-x)^{1/2})$, то из (2.8) имеем, например,

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_2} \frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}{x-t} |P_k^{\alpha,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta}(t)| dt \\ & \leq c(\alpha, \beta)(1-x)^{-\alpha/2-1/4} \frac{1}{k} \int_{\Delta_2} \frac{(1-t)^{\alpha/2-1/4}}{x-t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(\alpha, \beta)(1-x)^{-\alpha/2-1/4} \frac{1}{k} \int_{\Delta_2} (x-t)^{\alpha/2-5/4} dt \\
&\leq c(\alpha, \beta) \frac{1}{k} (1-x)^{-\alpha/2-1/4} (1-x)^{\alpha/4-1/8} n^{-\alpha/2+1/4} \leq c(\alpha, \beta).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Из (4.8) и (4.16) выводим

$$V_3^2 \leq c(\alpha, \beta). \tag{4.17}$$

Аналогично доказываются следующие оценки (см. (4.6)–(4.11))

$$V_l^2 \leq c(\alpha, \beta) \quad (l = 1, 2, 4, 5, 6), \tag{4.18}$$

причем при $l = 5$ следует воспользоваться равенством (4.14). Переходя к оценке V_0^2 , воспользуемся равенствами (2.4). Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{j(j+\alpha+\beta+1)}{2j+\alpha+\beta+1} [P_j^{\alpha+1,\beta}(x)P_{j-1}^{\alpha,\beta+1}(t) - P_j^{\alpha,\beta+1}(t)P_{j-1}^{\alpha+1,\beta}(x)] \\
&= \frac{j(j+\alpha+\beta+1)}{2j+\alpha+\beta+1} \left\{ \left[\frac{j+\alpha+1}{j} P_{j-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1-x) \frac{2j+\alpha+\beta+1}{2j} P_{j-1}^{\alpha+2,\beta}(x) \right] P_{j-1}^{\alpha,\beta+1}(t) \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{j+\alpha}{j} P_{j-1}^{\alpha,\beta+1}(t) - (1-t) \frac{2j+\alpha+\beta+1}{2j} P_{j-1}^{\alpha+1,\beta+1}(t) \right] P_{j-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \right\} \\
&= \frac{j+\alpha+\beta+1}{2j+\alpha+\beta+1} P_{j-1}^{\alpha+1,\beta}(x) P_{j-1}^{\alpha,\beta+1}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} (j+\alpha+\beta+1) [(1-t) P_{j-1}^{\alpha+1,\beta+1}(t) P_{j-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \\
&\quad - (1-x) P_{j-1}^{\alpha+2,\beta}(x) P_{j-1}^{\alpha,\beta+1}(t)].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Сопоставляя (4.19) с леммой, мы можем записать

$$\frac{(1-x)(1+t)}{x-t} \sum_{k=m}^{m+n} k P_k^{\alpha+1,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta+1}(t) = \sum_{\nu=0}^6 f_\nu(t), \tag{4.20}$$

где

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \frac{(1-x)(1+t)(1-t)}{2(x-t)^2} [(n+m+\alpha+\beta+2) P_{m+n}^{\alpha+1,\beta+1}(t) P_{m+n}^{\alpha+1,\beta}(x) \\
&\quad - (m+\alpha+\beta+1) P_m^{\alpha+1,\beta+1}(t) P_m^{\alpha+1,\beta}(x)],
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= \frac{(1-x)^2(1+t)}{2(x-t)^2} [(m+\alpha+\beta+1) P_m^{\alpha+2,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta+1}(t) \\
&\quad - (m+n+\alpha+\beta+2) P_{m+n}^{\alpha+2,\beta}(x) P_{m+n}^{\alpha,\beta+1}(t)],
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$f_3(t) = \frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)^2} \left[\frac{m+n+\alpha+b+2}{2(m+n)+\alpha+\beta+3} P_{m+n}^{\alpha+1,\beta}(x) P_{m+n}^{\alpha,\beta+1}(t) - \frac{m+\alpha+\beta+1}{2m+\alpha+\beta+1} P_m^{\alpha+1,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta+1}(t) \right], \quad (4.23)$$

$$f_4(t) = -\frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)^2} \times \sum_{k=m}^{m+n} \frac{(\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+2)}{(2k+\alpha+\beta+3)(2k+\alpha+\beta+1)} P_k^{\alpha+1,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta+1}(t), \quad (4.24)$$

$$f_5(t) = \frac{(\alpha+\beta+2)(1-x)(1+t)}{2(x-t)} \sum_{k=m}^{m+n} P_k^{\alpha+1,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta+1}(t), \quad (4.25)$$

$$f_6(t) = \frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)^2} \sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{2k+\alpha+\beta+1} [(\alpha+1)\beta P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta+1}(t) - \alpha(\beta+1) P_k^{\alpha+1,\beta}(x) P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(t)]. \quad (4.26)$$

Из (4.5) и (4.20) выводим

$$V_0^i \leq \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{n+1} \sum_{\nu=1}^6 \int_{\Delta_i} \rho(t) |f_\nu(t)| dt. \quad (4.27)$$

Докажем, что

$$\frac{1}{n+1} \int_{\Delta_2} \rho(t) |f_\nu(t)| dt \leq c(\alpha, \beta) \quad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \quad (4.28)$$

Чтобы оценить $\rho(t) |f_\nu(t)|$, воспользуемся оценкой (2.8), которая при $\nu = 1$ дает

$$\begin{aligned} \rho(t) |f_1(t)| &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{(x-t)^2} (1-x)^{-\alpha/2+1/4} (1-t)^{\alpha/2+1/4} \\ &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{(x-t)^2} (1-x)^{1/4} (1-t)^{1/4} \\ &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{(x-t)^2} (1-x)^{1/2} + c(\alpha, \beta) (x-t)^{-7/4} (1-x)^{1/4}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_2} \rho(t) |f_1(t)| dt &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{n+1} (1-x)^{1/2} \int_{\Delta_2} \frac{dt}{(x-t)^2} \\ &\quad + \frac{c(\alpha, \beta)}{n+1} (1-x)^{1/4} \int_{\Delta_2} (x-t)^{-7/4} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{n+1} (1-x)^{1/2} (1-x)^{-1/2} n + \frac{c(\alpha, \beta)}{n+1} n^{3/4} (1-x)^{1/4} (1-x)^{-3/8} \\ &\leq c(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

и тем самым оценка (4.28) при $\nu = 1$ доказана. При $\nu = 2$ из (2.8) и (4.22) мы имеем

$$\rho(t)|f_2(t)| \leq \frac{c(\alpha, \beta)}{(x-t)^2} (1-x)^{-\alpha/2+3/4} (1-t)^{\alpha/2-1/4} \leq \frac{c(\alpha, \beta)}{(x-t)^2} (1-x)^{1/2},$$

стало быть,

$$\frac{1}{n+1} \int_{\Delta_2} \rho(t)|f_2(t)| dt \leq c(\alpha, \beta)$$

и оценка (4.28) при $\nu = 2$ также доказана. Для $\nu = 3$ из (2.8) и (4.23) выводим ($t < x$)

$$\begin{aligned} \rho(t)|f_3(t)| &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{m(x-t)^2} (1-x)^{-\alpha/2+1/4} (1-t)^{\alpha/2-1/4} \\ &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{m(x-t)^2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Так как по условию $n = O(m)$, то из (4.29) имеем

$$\frac{1}{n+1} \int_{\Delta_2} \rho(t)|f_3(t)| dt \leq c(\alpha, \beta),$$

и, тем самым, оценка (4.28) верна при $\nu = 3$. Далее,

$$\rho(t)|f_4(t)| \leq \frac{c(\alpha, \beta)}{m(x-t)^2} \sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{2k + \alpha + \beta + 3} \leq \frac{c(\alpha, \beta)}{m(x-t)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{n+1} \int_{\Delta_2} \rho(t)|f_4(t)| dt \leq c(\alpha, \beta).$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_2} \rho(t)|f_5(t)| dt &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{n+1} \int_{\Delta_2} \frac{dt}{x-t} \sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{k} \leq c(\alpha, \beta), \\ \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_2} \rho(t)|f_6(t)| dt &\leq c(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Тем самым, оценка (4.28) доказана. Из нее и из (4.27) следует, что

$$V_0^2 \leq c(\alpha, \beta). \quad (4.30)$$

Сопоставляя (4.17), (4.18), (4.30) с (4.4), находим

$$\int_{\Delta_2} \leq c(\alpha, \beta, a, b). \quad (4.31)$$

Перейдем к оценке $\int_{\Delta_4}$. С этой целью положим

$$\begin{aligned} x_0 &= x + \frac{(1-x^2)^{1/2}}{n}, \quad \theta = \arccos t, \\ \varphi &= \arccos x, \quad \varphi_0 = \arccos\left(1 - \frac{4}{n^2}\right), \\ x_1 &= x \cos \frac{1}{n} + (1-x^2)^{1/2} \sin \frac{1}{n} = \cos\left(\varphi - \frac{1}{n}\right), \\ x_2 &= \begin{cases} 1 - \frac{4}{n^2}, & \text{если } x_0 \leq 1 - \frac{4}{n^2}, \\ x_0, & \text{если } x_0 > 1 - \frac{4}{n^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ясно, что $2/n < \varphi_0$, стало быть ($0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$),

$$\begin{aligned} & \frac{(1-x)^{-\alpha/2-1/4}}{n} \int_{x_0}^{x_2} \frac{(1-t)^{\alpha/2-1/4}}{t-x} dt \\ & \leq \frac{(1-x)^{-\alpha/2-1/4}}{n} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1-t)^{\alpha/2-1/4}}{t-x} dt \\ & \leq \frac{c(\alpha)}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2-1/4} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1-t^2)^{\alpha/2-1/4}}{t-x} dt \\ & \leq \frac{c(\alpha)}{n} (\sin \varphi)^{-\alpha-1/2} \int_{\varphi_0}^{\varphi-1/n} \frac{(\sin \theta)^{\alpha+1/2} d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} \\ & \leq \frac{c(\alpha)}{n} \varphi^{-\alpha-1/2} \int_{2/n}^{\varphi-1/n} \frac{\theta^{\alpha+1/2} d\theta}{(\varphi+\theta)(\varphi-\theta)} \\ & \leq \frac{c(\alpha)}{n\varphi} \int_{2/n}^{\varphi-1/n} \frac{(\theta/\varphi)^{\alpha+1/2}}{1-\theta/\varphi} d\left(\frac{\theta}{\varphi}\right) \\ & = \frac{c(\alpha)}{n\varphi} \int_{2/(n\varphi)}^{1-1/(n\varphi)} \frac{\tau^{\alpha+1/2} d\tau}{1-\tau} \\ & \leq c(\alpha) \int_{2/(n\varphi)}^{1-1/(n\varphi)} \tau^{\alpha+1/2} d\tau \leq c(\alpha). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Теперь, воспользовавшись оценкой (2.8), отсюда при $m \leq k \leq m+n$, $m = O(n)$, $0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$, выводим

$$\int_{\Delta_4} \rho(t) \frac{|P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(t)|}{t-x} dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c(\alpha, \beta, a, b)}{n} (1-x)^{-\alpha/2-1/4} \int_{x_0}^{x_2} \frac{(1-t)^{\alpha/2-1/4}}{t-x} dt \\ &\quad + c(\alpha, \beta, a, b) n^{\alpha-1/2} (1-x)^{-\alpha/2-1/4} \int_{x_2}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t-x} dt \leq c(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.33)$$

При оценке второго интеграла (4.33) следует учесть, что $t-x \geq (1-x^2)^{1/2}/n$. Из (4.8) и (4.33) непосредственно выводим

$$V_3^4 \leq c(\alpha, \beta, a, b). \quad (4.34)$$

Совершенно аналогично при $l=5$, исходя из (4.14), доказывается, что

$$V_l^4 \leq c(\alpha, \beta, a, b) \quad (l=1, 2, 4, 5, 6). \quad (4.35)$$

Перейдем к случаю $l=0$. Докажем, что

$$\frac{1}{n+1} \int_{\Delta_4} \rho(t) |f_\nu(t)| dt \leq c(\alpha, \beta, a, b) \quad (1 \leq \nu \leq 6). \quad (4.36)$$

Для $\nu=1$ из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n+1} \int_{\Delta_4} \rho(t) |f_1(t)| dt \leq \frac{c(\alpha, \beta, a, b)}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+1/4} \\ &\quad \times \left[\int_{x_0}^{x_2} \frac{(1-t^2)^{\alpha/2+1/4}}{(t-x)^2} dt + n^{\alpha+3/2} \int_{x_2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{(t-x)^2} dt \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Далее, по аналогии с (4.32)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+1/4} \int_{x_0}^{x_2} \frac{(1-t^2)^{\alpha/2+1/4}}{(t-x)^2} dt \\ &\leq \frac{1}{n} (\sin \varphi)^{-\alpha+1/2} \int_{\varphi_0}^{\varphi-1/n} \frac{(\sin \theta)^{\alpha+3/2}}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2} d\theta \\ &\leq \frac{c(\alpha)}{n} \varphi^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi-1/n} \frac{d\theta}{(\varphi^2 - \theta^2)^2} \leq \frac{c(\alpha)}{n} \int_{\varphi_0}^{\varphi-1/n} \frac{d\theta}{(\varphi - \theta)^2} \leq c(\alpha). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Кроме того $(t-x \geq (1-x^2)^{1/2}/n)$,

$$\begin{aligned} &n^{\alpha+1/2} (1-x^2)^{-\alpha/2+1/4} \int_{x_2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{(t-x)^2} dt \\ &\leq n^{\alpha+5/2} (1-x^2)^{-\alpha/2-3/4} \left(\frac{4}{n^2} \right)^{\alpha+2} \\ &\leq c(\alpha) n^{\alpha+5/2} n^{\alpha+3/2} n^{-2\alpha-4} \leq c(\alpha). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Сопоставляя (4.37)–(4.39), мы замечаем, что при $\nu = 1$ оценка (4.36) верна. Пусть $\nu = 2$. Учитывая (2.8), из (4.22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_4} \rho(t) |f_2(t)| dt &\leq \frac{c(\alpha, \beta, a, b)}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+3/4} \\ &\times \left[\int_{x_0}^{x_2} \frac{(1-t^2)^{\alpha/2-1/4} dt}{(t-x)^2} + n^{\alpha+1/2} \int_{x_2}^1 \frac{(1-t^2)^\alpha}{(t-x)^2} dt \right], \end{aligned} \quad (4.40)$$

где

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+3/4} \int_{x_0}^{x_2} \frac{(1-t^2)^{\alpha/2-1/4}}{(t-x)^2} dt \\ &\leq \frac{1}{n} (\sin \varphi)^{-\alpha+3/2} \int_{\varphi_0}^{\varphi-1/n} \frac{(\sin \theta)^{\alpha+1/2} d\theta}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2} \\ &\leq \frac{c(\alpha)}{n} \varphi^{-\alpha+3/2} \int_{2/n}^{\varphi-1/n} \frac{\theta^{\alpha+1/2}}{(\varphi^2 - \theta^2)^2} d\theta \\ &\leq \frac{c(\alpha)}{n} \varphi^{-\alpha} \int_{\varphi_0}^{\varphi-1/n} \frac{\theta^\alpha d\theta}{(\varphi - \theta)^2} \leq \frac{c(\alpha)}{n\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi-1/n} \frac{(\theta/\varphi)^\alpha d(\theta/\varphi)}{(1 - \theta/\varphi)^2} \\ &\leq \frac{c(\alpha)}{n\varphi} \int_{1/(n\varphi)}^{1-1/(n\varphi)} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(1-\tau)^2} \\ &\leq \frac{c(\alpha)}{n\varphi} \left[4 \int_{1/(n\varphi)}^{1/2} \tau^\alpha d\tau + 2 \int_{1/2}^{1-1/(n\varphi)} \frac{d\tau}{(1-\tau)^2} \right] \leq c(\alpha), \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+3/4} n^{\alpha+1/2} \int_{x_2}^1 \frac{(1-t^2)^\alpha}{(t-x)^2} dt \\ &\leq c(\alpha) n^{\alpha-1/2} \varphi^{-\alpha+3/2} \int_0^{\varphi_1} \frac{\theta^{2\alpha+1} d\theta}{(\varphi^2 - \theta^2)^2} \\ &\leq c(\alpha) n^{\alpha-1/2} \varphi^{-\alpha-1/2} \int_0^{\varphi_1} \frac{\theta^{2\alpha+1} d\theta}{(\varphi - \theta)^2}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где $\varphi_1 = \arccos x_2$. Так как $x_0 \leq x_2$, то

$$\cos \varphi_1 \geq \frac{x + (1-x^2)^{1/2}}{n} > \cos \varphi \cos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n} \sin \varphi = \cos \left(\varphi - \frac{1}{n} \right),$$

стало быть, $1/n \leq \varphi - \varphi_1$. С другой стороны, так как $x_2 \geq 1 - 4/n^2$, то $\cos \varphi_1 \geq 1 - 4/n^2$ или $\cos^2 \varphi_1 \geq 1 - 8/n^2 + 16/n^4$. Отсюда $\sin^2 \varphi_1 \leq 8/n^2 - 16/n^4 < 8/n^2$ и, стало быть, $\varphi_1 \leq \pi\sqrt{2}/n$. Используя эти оценки, мы имеем

$$n^{\alpha-1/2} \varphi^{-\alpha-1/2} \int_0^{\varphi_1} \frac{\theta^{2\alpha+1} d\theta}{(\varphi - \theta)^2} = n^{\alpha-1/2} \varphi^{-\alpha-1/2} \int_0^{\varphi_1} \frac{(\theta/\varphi)^{2\alpha+1} d(\theta/\varphi)}{(1 - \theta/\varphi)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= (n\varphi)^{\alpha-1/2} \left[\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{\varphi_1/\varphi} \right] \frac{\tau^{2\alpha+1} d\tau}{(1-\tau)^2} \\
&\leq (n\varphi)^{\alpha-1/2} \left[4 \int_0^{1/2} \tau^{2\alpha+1} d\tau + (2^{-2\alpha-1} + 1) \int_{1/2}^{\varphi_1/\varphi} \frac{d\tau}{(1-\tau)^2} \right] \\
&\leq c(\alpha)(n\varphi)^{\alpha-1/2} \left(1 + \frac{\varphi}{\varphi - \varphi_1} \right) = c(\alpha)(n\varphi)^{\alpha-1/2} \left(2 + \frac{\varphi_1}{\varphi - \varphi_1} \right) \\
&< c(\alpha)(n\varphi)^{\alpha-1/2} (2 + \pi\sqrt{2}) \leq c(\alpha).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Сопоставляя (4.40)–(4.43), приходим к равенству (4.36) при $\nu = 2$. Пусть $\nu = 3$. Из (4.23) с учетом (2.8) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} \int_{\Delta_4} \rho(t) |f_3(t)| dt &\leq \frac{c(\alpha, \beta, a, b)}{n^2} (1-x^2)^{-\alpha/2+1/4} \\
&\times \left[\int_{x_0}^{x_2} \frac{(1-t)^{\alpha/2-1/4} dt}{(t-x)^2} + n^{\alpha+1/2} \int_{x_2}^1 \frac{(1-t)^\alpha dt}{(t-x)^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Заметим, что для $0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$

$$\frac{1}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+1/4} \leq (1-x^2)^{-\alpha/2+3/4}.$$

Поэтому правая часть (4.44) по порядку не превосходит правой части (4.40). Следовательно, оценка (4.31) верна и для $\nu = 3$. Подобным образом оцениваются и слагаемые, составляющие суммы в правых частях равенств (4.24)–(4.26). Это приводит к оценке (4.36) при $\nu = \{4, 5, 6\}$, тем самым она полностью доказана. Отсюда и из (4.27) мы выводим оценку

$$V_0^4 \leq c(\alpha, \beta, a, b). \tag{4.45}$$

Сопоставляя (4.4) с (4.45), находим

$$\int_{\Delta_4} \leq c(\alpha, \beta, a, b). \tag{4.46}$$

Теперь займемся оценкой интеграла $\int_{\Delta_4}$. Имеем ($0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$), стало быть ($x_0 < 1 - 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)/n^2$),

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_3} &= \frac{1}{n+1} \int_{\Delta_3} \rho(t) \left| \sum_{k=m}^{m+n} K_k^{\alpha, \beta}(x, t) \right| dt \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{\nu=0}^k \{h_\nu^{\alpha, \beta}\}^{-1} |P_\nu^{\alpha, \beta}(x)| \int_{\Delta_3} \rho(t) |P_\nu^{\alpha, \beta}(t)| dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{n+1} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{\nu=0}^k (1-x)^{-\alpha/2-1/4} \int_{\Delta_3} (1-t)^{\alpha/2-1/4} dt \\
&\leq c(\alpha, \beta) n (1-x)^{-\alpha/2-1/4} \frac{(1-x^2)^{1/2} (1-x_0)^{\alpha/2-1/4}}{n} \\
&\leq c(\alpha, \beta) (1-x)^{-\alpha/2+1/4} \left(1-x-\frac{(1-x^2)^{1/2}}{n}\right)^{\alpha/2-1/4} \\
&= c(\alpha, \beta) \left(1-\frac{(1+x)^{1/2}}{n(1-x)^{1/2}}\right)^{\alpha/2-1/4} \\
&\leq c(\alpha, \beta) \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\alpha/2-1/4} \leq c(\alpha, \beta). \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Собирая оценки (4.15), (4.31), (4.46), (4.47) и сопоставляя их с (4.2) и (4.3), мы приходим к оценке

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha,\beta}(x)\| \leq c(\alpha, \beta, a, b) \\
&\left(0 \leq x \leq 1 - \frac{4}{n^2}, \quad a \leq \frac{m}{n} \leq b, \quad -1 < \alpha, \beta \leq 0\right). \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Пусть теперь $1 - 4/n^2 \leq x \leq 1$. В этом случае мы разобьем интеграл в (4.2) по следующей схеме

$$\|\mathcal{V}_{m,n}^{\alpha,\beta}(x)\| = \int_{-1}^1 = \int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{1-8/n^2} + \int_{1-8/n^2}^1 = I_1 + I_2 + I_3. \tag{4.49}$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для $\int_{\Delta_1}, \int_{\Delta_2}$. При этом вместо оценки

$$|P_k^{\gamma,\nu}(x)| \leq c(\gamma, \nu) (1-x)^{-\gamma/2-1/4} k^{-1/2} \quad (k \geq 1)$$

следует воспользоваться оценкой ($m \leq k \leq m+n, a \leq m/n \leq b$)

$$|P_k^{\gamma,\nu}(\tau)| \leq c(\gamma, \nu, a, b) k^\gamma \quad \left(1 - \frac{4}{n^2} \leq \tau \leq 1\right), \tag{4.50}$$

вытекающей из (2.8) при $1 - 4/n^2 \leq \tau \leq 1$. Таким образом,

$$I_j \leq c(\alpha, \beta, a, b) \quad (j \in \{1, 2\}). \tag{4.51}$$

Для I_3 из (4.50) имеем

$$\frac{1}{n+1} \int_{1-8/n^2}^1 \rho(t) \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{l=0}^k \{h_l^{\alpha,\beta}\}^{-1} |P_l^{\alpha,\beta}(x) P_l^{\alpha,\beta}(t)| dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{n} \int_{1-8/n^2}^1 (1-t)^\alpha dt \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{l=0}^k (1+l)^{1+2l} \\ &\leq c(\alpha, \beta) n^{-2\alpha-3} (n+m)^{2\alpha+3} \leq c(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Сопоставляя (4.49), (4.51) и (4.52), имеем

$$\begin{aligned} &\|\psi_{m,n}^{\alpha,\beta}(x)\| \leq c(\alpha, \beta, a, b) \\ &\left(1 - \frac{4}{n^2} \leq x \leq 1, \quad -1 < \alpha, \beta \leq 0, \quad a \leq \frac{m}{n} \leq b\right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

а из (4.48) и (4.53), в свою очередь, выводим

$$\begin{aligned} \|\psi_{m,n}^{\alpha,\beta}\| &= \sup_{-1 \leq x \leq 1} \|\psi_{m,n}^{\alpha,\beta}(x)\| \leq c(\alpha, \beta, a, b) \\ &\left(-1 < \alpha, \beta \leq 0, \quad a \leq \frac{m}{n} \leq b\right). \end{aligned}$$

Тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in C[-1, 1]$, $E_m(f)$ – наилучшее приближение f алгебраическими полиномами степени m в пространстве $C[-1, 1]$. Тогда при соблюдении условий теоремы имеет место оценка

$$\|f - \psi_{m,n}^{\alpha,\beta}(f)\| \leq c(\alpha, \beta, a, b) E_m(f).$$

В заключение авторы выражают признательность рецензенту за полезные замечания.

Махачкала

Поступило

06.07.94

Исправленный вариант

12.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Агаханов С. А., Натансон Г. И. Функция Лебега сумм Фурье–Якоби // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон. 1968. № 1. С. 11–23.
- [2] Бадков В. М. Оценка функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби // Сиб. матем. ж.. Т. 7. № 6. С. 1263–1283.
- [3] Шарапудинов И. И. О наилучшем приближении и суммах Фурье–Якоби // Матем. заметки. 1983. Т. 34. № 5. С. 651–661.
- [4] Cer G. Ортогональные многочлены. М., 1962.
- [5] Askey R., Wainger S. A convolution structure for Jacobi series // Amer. J. Math. 1969. № 2. Р. 463–483.
- [6] Gasper G. Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. Math. 1972. V. 95. № 2. Р. 261–280.
- [7] Кальней С. Г. Об аналоге теоремы С. М. Никольского для рядов Якоби // Укр. матем. ж. 1991. Т. 41. № 4. С. 503–513.