Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошапка, Локальные инварианты и запреты на отображения CR-многообразий, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 588–592

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:26:23

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЛОКАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И ЗАПРЕТЫ НА ОТОБРАЖЕНИЯ CR-МНОГООБРАЗИЙ

В. К. Белошапка

В работах автора [1], [2], были построены три серии локальных CR-инвариантов CR-многообразия $\Gamma(p), \gamma(q), \delta(r)$. Каждая из этих серий представляет собой систему вложенных проективных множеств (флаговая конструкция) в касательном пространстве над каждой точкой многообразия. Эти инварианты строятся на базе формы Леви и, в силу этого, их значение в точке определяется 2-струей многообразия в этой точке. Инвариантность означает следующее. Если имеется CR-диффеоморфизм двух таких многообразий, то индуцированный изоморфизм касательных расслоений обеспечивает изоморфизм упомянутых флаговых конструкций, что позволяет построить большое количество числовых инвариантов (размерности, степени и т.п.). В данной работе построенные флаговые конструкции применяются для получения запретов на отображения между CR-многообразиями различных CR-типов (размерность, CR-размерность). Начиная с работ Форстнерича эта ситуация изучалась в серии публикаций [3], [4] и др., однако, основное внимание уделялось при этом вопросам продолжения отображений.

Пусть, сначала, M – вложенное порождающее подмногообразие $\xi \in M$, $n = \dim T_\xi M$ – комплексная размерность, $\dim(T_\xi M/T_\xi^c M) = k$, т.е. $\dim M = 2n + k$. Локальное уравнение M в некоторых координатах может быть записано так [5]:

$$\operatorname{Im} w = H(z, \bar{z}) + \dots,$$

где $z = (z^1, \dots, z^n)$, $w = (w^1, \dots, w^k)$, $H(z, \bar{z})$ – это форма Леви M в точке ξ , $H = (H^1, \dots, H^k)$, H^p – обычная эрмитова матрица размером $(n \times n)$, точками обозначено выражение от $z, \bar{z}$, $\operatorname{Re} w$, содержащее члены степени три и выше. При этом размерность объемлющего комплексного пространства равна $n + k$, $\xi = (0, 0)$, $T_\xi M = \{\operatorname{Im} w = 0\}$, $T_\xi^c M = \{w = 0\}$ и k – это коразмерность. Поверхность, заданная уравнением $\operatorname{Im} w = H(z, \bar{z})$ называется *касательной квадрикой*. Ее свойства во многом определяют свойства многообразия.

Пусть имеется два таких многообразия M_1 и M_2 , с каждым из которых связан набор $\{\xi_j, n_j, k_j, z_j, w_j, H_j\}$, где $j = 1, 2$. И пусть имеется голоморфное отображение $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$, заданное в окрестности точки ξ_1 , так что $\varphi(\xi_1) = \xi_2$. Представим φ в виде $\varphi = (z_1 \mapsto Cz_1 + \dots, w_1 \mapsto \rho w_1 + \dots)$, где $C: \mathbb{C}^{n_1} \mapsto \mathbb{C}^{n_2}$ и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 093-01-00225, и Международного научного фонда, грант NCE300.

$\rho: \mathbb{R}^{k_1} \mapsto \mathbb{R}^{k_2}$ – линейные отображения. Тогда, записывая условие того, что образ M_1 содержится в M_2 , получаем

$$\operatorname{Im}(\rho w_1 + \dots) = H_2(Cz_1 + \dots, \overline{Cz_1 + \dots}) + \dots,$$

где $w_1 = u_1 + iH_1(z_1, \bar{z}_1)$, $u_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$. Отделяя в этом выражении эрмитову компоненту, получаем

$$H_2(Cz_1, \overline{Cz_1}) = \rho H_1(z_1, \bar{z}_1). \quad (1)$$

Линейный по u_1 член при этом дает $\operatorname{Im} \rho = 0$. Отметим, что C задается комплексной матрицей размером $(n_2 \times n_1)$, а ρ – вещественной $(k_2 \times k_1)$.

Соотношение (1), на котором основаны наши дальнейшие построения, справедливо и в абстрактной ситуации. Если M почти CR-многообразие, то его формой Леви называется отображение [6]

$$L: T^c M \rightarrow TM/T^c M,$$

которое строится так. Пусть X – вещественное CR-поле на M , тогда $L(X, \bar{X}) = \pi([X, JX])$, где π – естественная проекция $T^c M \rightarrow TM/T^c M$, J – почти комплексная структура на $T^c M$, $[\cdot, \cdot]$ – скобка векторных полей. При ближайшем рассмотрении оказывается, что значение L в точке многообразия зависит лишь от значения векторного поля X в самой этой точке и является, тем самым, отображением расслоений, а не их сечений.

Пусть M_1 и M_2 – два абстрактных почти CR-многообразия, ξ_1 и ξ_2 – их точки, H_1, H_2 – значения соответствующих форм в соответствующих точках. И пусть имеется CR-отображение $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$, заданное в окрестности точки ξ_1 , так что $\varphi(\xi_1) = \xi_2$. Пусть C – это сужение касательного отображения φ_* на $T_{\xi_1}^c M_1$. Фиксируем локальные разложения вида $TM_j = T^c M_j \oplus NM_j$ и локальные координаты, тогда $T^c M_j \cong \mathbb{C}^{n_j}$, $T_{\xi_j}/T_{\xi_j}^c \cong NM_j \cong \mathbb{R}^{k_j}$. Пусть ρ – это сужение касательного отображения φ_* на $N_{\xi_1} M_1$. Записывая теперь факт эквивариантности скобки векторных полей, получаем соотношение (1).

Пусть $H(z, \bar{z})$ – векторзначная эрмитова форма. Для вектора z определим подпространство $z^\perp = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : H(\zeta, \bar{z}) = 0\}$. Если $k = 1$ и форма невырождена, то для всякого ненулевого вектора $\dim z^\perp = n - 1$, тогда как при $k > 1$ ситуация гораздо разнообразнее [1]. Для описания этого разнообразия удобно ввести следующую систему вложенных подмножеств комплексной касательной.

$$\Gamma(p) = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{rank}(H^1 z, \dots, H^k z) \leq p\} = \{z \in \mathbb{C}^n : \dim z^\perp \geq n - p\}.$$

Возвращаясь к изучению следствий соотношения (1), будем обозначать ортогональное подпространство, определенное для векторов в $\mathbb{C}^{n_j}$ по отношению к форме H_j , одним и тем же знаком $(\perp)$, однако для обозначения множеств $\Gamma(p)$ из разных пространств введем индекс j .

Предложение 1. Для любого $z \in \mathbb{C}^{n_1}$ $C(z^\perp) \subseteq (Cz)^\perp$.

Доказательство. Пусть $\zeta \in z^\perp$, тогда $H_2(C\zeta, \overline{Cz}) = \rho H_1(\zeta, \bar{z}) = 0$, т.е. $C\zeta \in (Cz)^\perp$ и предложение доказано.

Следствие 2. $C(\Gamma_1(p) \setminus \Gamma_1(p-1)) \subseteq \Gamma_2(p + (n_2 - n_1) + \dim \operatorname{Ker} C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z \in \Gamma_1(p) \setminus \Gamma_1(p-1)$, то $\dim z^\perp = n_1 - p$. Но в силу предложения 1 $(Cz)^\perp$ содержит подпространство $C(z^\perp)$, поэтому $\dim(Cz)^\perp \geq \dim C(z^\perp) = n_1 - p - \dim(\text{Ker } C) \cap z^\perp \geq n_1 - p - \dim \text{Ker } C$, и, следовательно, $Cz \in \Gamma_2(p - (n_2 - n_1) + \dim \text{Ker } C)$. Следствие доказано.

Переходя к основной цели данной работы – получению запретов на существование CR-отображений, отметим, что на вопрос, существует ли CR-отображение одного произвольного многообразия в другое, следует отвечать положительно, так как всегда имеется тривиальная возможность отобразить первое многообразие в точку второго. Поэтому вопрос становится содержательным, лишь в случае наличия ограничений на степень вырождения касательного отображения. Предложение 1 и следствие 2 – это инструмент, позволяющий получать такого рода запреты. Поэтому приводимый ниже список примеров имеет иллюстративный характер. Все наши запреты построены на основе информации о размерности и степени множеств $\Gamma(p)$. Однако, ситуация такова, что тип многообразия (k, n) не определяет этих параметров, поэтому все утверждения делаются для многообразий общего положения. Общее положение – это общее положение касательной квадрики, которое понимается в смысле топологии Зарисского. Информация о строении флагов Γ для квадрики общего положения взята из работы [1]. В качестве ограничений на степень вырождения касательного отображения будем использовать простейшее условие – условие отсутствия ядра.

ПРИМЕР 3. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(1, n)$ (гиперповерхность) в многообразие общего положения типа $(2, n)$, $n > 1$, с условием $\text{Ker } C = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2 получаем $C(\Gamma_1(1) \setminus \Gamma_1(0)) \subseteq \Gamma_2(1)$, но $\Gamma_1(1) \setminus \Gamma_1(0) = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, тогда как $\Gamma_2(1)$ – это набор из n прямых. Получаем противоречие с условием невырожденности.

ПРИМЕР 4. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(1, 3)$ в многообразие общего положения типа $(3, 3)$ с условием $\text{Ker } C = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2 получаем $C(\Gamma_1(1) \setminus \Gamma_1(0)) \subseteq \Gamma_2(1)$, но $\Gamma_1(1) \setminus \Gamma_1(0) = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, тогда как $\Gamma_2(1) = \{0\}$. Получаем противоречие с условием невырожденности.

ПРИМЕР 5. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(2, 4)$ в многообразие общего положения типа $(3, 4)$ с условием $\text{Ker } C = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2 получаем $C(\Gamma_1(2) \setminus \Gamma_1(1)) \subseteq \Gamma_2(2)$, но $\Gamma_1(2) \setminus \Gamma_1(1)$ – это $\mathbb{C}^4 \setminus \{\text{объединение четырех прямых}\}$, тогда как $\Gamma_2(1)$ – это двумерная поверхность. Противоречие.

ПРИМЕР 6. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(2, 3)$ в многообразие общего положения типа $(3, 3)$ с условием $\text{Ker } C = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2 получаем $C(\Gamma_1(2) \setminus \Gamma_1(1)) \subseteq \Gamma_2(2)$, но $\Gamma_1(2) \setminus \Gamma_1(1) = \mathbb{C}^3 \setminus \{\text{набор из трех прямых}\}$, тогда как $\Gamma_2(1)$ – это двумерная поверхность. Противоречие.

ПРИМЕР 7. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(3, 3)$ в многообразие общего положения типа $(4, 4)$ с условием $\text{Ker } C = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2 получаем $C(\Gamma_1(2) \setminus \Gamma_1(1)) \subseteq \Gamma_2(3)$, но $\Gamma_1(2)$ – это кубика однородная гиперповерхность степени три в $\mathbb{C}^3$, тогда как $\Gamma_2(3)$ – это гиперповерхность в $\mathbb{C}^4$ степени четыре и для гиперповерхности общего положения такое отображение невозможно.

Переходя к построению запретов на основе флага γ , запишем соотношение (1) в следующем виде

$$\begin{aligned} C^* H_2^1 C &= \rho_1^1 H_1^1 + \cdots + \rho_{k_1}^1 H_1^{k_1}, \\ &\dots\dots\dots \\ C^* H_2^1 C &= \rho_1^{k_2} H_1^1 + \cdots + \rho_{k_1}^{k_2} H_1^{k_1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Определим выражения $H_j(w_j)$ формулой $H_j(w_j) = H_j^1 w_j^1 + \cdots + H_j^{k_j} w_j^{k_j}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Имеет место соотношение $C^* H_2(w_2) C = H_1(\rho'(w_2))$, где ' означает транспонирование.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно домножить m -е равенство (2) на w_2^m и все сложить. Предложение доказано.

Система множеств γ определяется так [1]:

$$\gamma_j(q) = \{w_j \in \mathbb{C}^{k_j} : \text{rank } H_j(w_j) \leq q\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 9. $\rho': \gamma_2(q) \mapsto \gamma_1(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 8 $\text{rank } H_2(w_2) \geq \text{rank } H_1(\rho' w_2)$, поэтому если $w_2 \in \gamma_2(q)$, то $w_1 = \rho' w_2 \in \gamma_1(q)$, и следствие доказано.

Располагая информацией о строении множеств системы γ , можно формулировать множество запретов на существование CR-отображений, аппелирующих к ограничениям на степень вырождения ρ , т.е. действия касательного отображения φ_* на дополнении к комплексной касательной. Вот примеры.

ПРИМЕР 10. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(1, n)$ в многообразии общего положения типа $(2, n)$ с условием $\text{rank } \rho > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\gamma_2(1)$ – это набор из n прямых, тогда как $\gamma_1(1) = \{0\}$.

ПРИМЕР 11. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(1, 3)$ в многообразии общего положения типа $(3, 3)$ с условием $\text{rank } \rho > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\gamma_2(2)$ – это кубическая гиперповерхность, тогда как $\gamma_1(2) = \{0\}$.

ПРИМЕР 12. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(2, 3)$ в многообразии общего положения типа $(3, 3)$ с условием $\text{rank } \rho > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\gamma_2(2)$ – это кубическая гиперповерхность, тогда как $\gamma_1(2)$ – прямая.

ПРИМЕР 13. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(2, 4)$ в многообразии общего положения типа $(3, 4)$ с условием $\text{rank } \rho > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\gamma_2(3)$ – это гиперповерхность степени четыре, тогда как $\gamma_1(2)$ – прямая.

ПРИМЕР 14. Не существует CR-отображения многообразия общего положения типа $(3, 3)$ в многообразие общего положения типа $(5, 3)$ с условием $\text{rank } \rho > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\gamma_2(2)$ — это гиперповерхность степени пять, тогда как $\gamma_1(2)$ — гиперповерхность степени три.

Третья серия запретов появляется с использованием флага δ (см. [2]). Если M_1 и M_2 — два многообразия φ, C, ρ как и выше, Q_1 и Q_2 — касательные квадрики в соответствующих точках (касательные квадрики определяются через форму Леви и для абстрактных многообразий), то соотношение (1) означает, что линейное отображение

$$\tilde{\varphi}(\xi_1) = (z_1 \mapsto Cz_1, w_1 \mapsto \rho w_1)$$

переводит Q_1 в Q_2 . Переходя к однородным координатам $z_j = Z_j/T_j, w_j = W_j/T_j, T_j \in \mathbb{C}$, получаем вложение $\mathbb{C}^{n+k}$ в $\mathbb{CP}^{n+k}$. Проективизация квадрик задается уравнениями

$$\overline{Q_j} = \{(T_j, Z_j, W_j) \in \mathbb{CP}^{n+k} : \text{Im}(W_j \overline{T_j}) = H_j(Z_j, \overline{Z_j})\}.$$

Тогда $\tilde{\varphi}(\xi_1)$ — проективизация отображения $\tilde{\varphi}(\xi_1)$,

$$\tilde{\varphi}(\xi_1) = (T_1 \mapsto T_1, Z_1 \mapsto CZ_1, W_1 \mapsto \rho W_1)$$

будет отображать $\overline{Q_1}$ в $\overline{Q_2}$. Квадрика является неособой поверхностью, а ее проективизация при $k > 1$ имеет на бесконечности особенности. В связи с этим введем в рассмотрение систему δ , стратифицирующую $\overline{Q}$:

$$\delta_j(r) = \{\eta \in \overline{Q_j} : \dim T_\eta \overline{Q_j} \geq r\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. $\tilde{\varphi}(\xi_1): \delta_1(r) \mapsto \delta_2(r - \dim \text{Ker } C - \dim \text{Ker } \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\dim \text{Ker } \tilde{\varphi}(\xi_1) = \dim \text{Ker } C - \dim \text{Ker } \rho$.

Это предложение, как и предложения 1 и 8, имеет множество следствий.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Флаговые конструкции серий Γ, γ, δ имеют вещественные аналоги $\Gamma r, \gamma r, \delta r$, с которыми связана своя система запретов на отображения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: beloshap@ium.ips.ras.ru

Поступило
24.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белошадка В. К. // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 3–12.
2. Белошадка В. К. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 1. С. 42–52.
3. Forstnerič F. // Math. Ann. 1992. V. 292. P. 163–180.
4. Sukhov A. // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. № 1. P. 27–36.
5. Белошадка В. К. // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 2. С. 3–9.
6. Чирка Е. М. // УМН. 1991. Т. 46. № 1 (277). С. 81–164.