Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас, Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 597–601

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1867>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:07:47

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас

Рассматривается задача Коши

$$\sum_{j=0}^n A_j u^{(j)}(t) = 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u^{(j)}(0) = u_j, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (2)$$

Здесь A_j – линейные замкнутые операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y , с областями определения D_j соответственно. Уравнение вида (1) исследовалось многими авторами при условии обратимости оператора A_n . Мы не предполагаем обратимость оператора A_n и остальных операторов A_j . В связи с этим уравнение (1) мы будем называть *вырожденным*. Исследование общего уравнения (1) в данной заметке частично индуцировано работой [1], где также рассматривались вопросы единственности и аппроксимации при других ограничениях на резольвенту характеристического пучка. Экспоненциальные оценки резольвент и использование принципа Фрагмена–Линделёфа являются характерными при рассмотрении этих вопросов [2]–[4]. Под *решением задачи Коши* (1), (2) понимаются такие функции $u(t) \in C^n\{(0, \infty), X\} \cap C^{n-1}\{[0, \infty), X\}$, удовлетворяющие (1), (2), что $A_j u(t) \in C^j\{(0, \infty), Y\} \cap C^{j-1}\{[0, \infty), Y\}$, $j = 1, \dots, n$.

Для начальных данных (2) рассмотрим вектор $h_0 = \{u_j\}_{j=0}^{n-1} \in X^n$. Через X_0 обозначим замыкание (в X^n) множества всех векторов h_0 , для которых задача Коши (1), (2) разрешима. Подпространство X_0 может не совпадать с X^n и даже быть тривиальным. Оно является наименьшим замкнутым подпространством в X^n , содержащим векторы $h_t = \{u^{(j)}(t)\}_{j=0}^{n-1}$ для всех решений $u(t)$ уравнения (1) и всех $t \geq 0$. Подпространство X_0 назовем *n-кратным подпространством решений задачи Коши* (1), (2) или кратко – *подпространством решений*.

С уравнением (1) связывается операторный пучок $L(\lambda) = \sum_{j=0}^n \lambda^j A_j$, определенный на $D = \bigcap_{j=0}^n D_j$. Предполагается, что $D \neq \{0\}$, так как в противном случае задача Коши (1), (2) имеет только тривиальное решение. Для несобственных чисел λ рассматриваются резольвентные операторы $R(\lambda) = L^{-1}(\lambda)$ и $R_j(\lambda) = R(\lambda)A_j$, $j = 1, \dots, n$. Точку λ назовем *слабо регулярной* для пучка $L(\lambda)$, если резольвентные операторы $R_j(\lambda)$ определены всюду на $\tilde{D} = \bigcap_{j=1}^n D_j$. Пусть $E = \tilde{D}$ – банахово пространство с нормой $\|x\|_E = \|x\|_X + \sum_{j=1}^n \|A_j x\|_Y$. На множестве слабо регулярных точек все $R_j(\lambda)$ голоморфны как оператор-функции со значениями из $[E, X]$ и одновременно из $[E, E]$.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда и Правительства Украины, грант K4B100.

1. Норму графика оператора A_j обозначим $\|x\|_j (= \|x\|_X + \|A_j x\|_Y)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в правой полуплоскости существует луч $l = \{\lambda(r) = \lambda_0 + re^{i\theta}, 0 \leq r < \infty\}$ ($\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$), свободный от собственных чисел пучка $L(\lambda)$, и на нем выполнена хотя бы одна из двух оценок

$$\left\| R(\lambda) \sum_{j=1}^n A_j v_j \right\|_X \leq C e^{\beta \operatorname{Re} \lambda} \sum_{j=1}^n \|v_j\|_j, \quad \lambda \in l, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n \|A_k R(\lambda) \sum_{j=1}^n A_j v_j\|_Y \leq C e^{\beta \operatorname{Re} \lambda} \sum_{j=1}^n \|v_j\|_j, \quad \lambda \in l, \quad (4)$$

при некоторых $C > 0$, $\beta \geq 0$ и любых $v_j \in D_j$, при которых определена левая часть. Тогда имеет место единственность решения задачи Коши (1), (2).

Для доказательства теоремы заметим, что преобразование Лапласа

$$\hat{u}_t(\lambda) = \int_0^t e^{-\lambda s} u(s) ds$$

срезки решения $u(t)$ уравнения (1) с нулевыми начальными условиями (2) допускает представление на луче l

$$\hat{u}_t(\lambda) = -e^{-\lambda t} R(\lambda) \sum_{j=1}^n A_j \sum_{k=0}^{j-1} \lambda^k u^{(j-1-k)}(t), \quad \lambda \in l. \quad (5)$$

При фиксированном $\gamma > \beta$ и любых $t > \gamma$ рассматриваются целые по λ вектор-функции $z(\lambda) = e^{(t-\gamma)\lambda} \hat{u}_t(\lambda)$, $z_k(\lambda) = e^{(t-\gamma)\lambda} A_k \hat{u}_t(\lambda)$ ($k = 1, \dots, n$). Луч l разбивает полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda \geq \operatorname{Re} \lambda_0$ на два угла, в которых применяется принцип Фрагмена–Линделёфа для функции $z(\lambda)$ при условии (3) или для функций $z_k(\lambda)$ при условии (4). Далее, с использованием формулы обращения преобразования Лапласа для $z(\lambda)$ или для $z_k(\lambda)$ получаем, что $u(t) \equiv 0$ или $A_k u(t) \equiv 0$, откуда в силу (5) следует утверждение теоремы.

2. Каждой цепочке $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in D$ из собственного и присоединенных векторов (СПВ) [5] пучка $L(\lambda)$ отвечают элементарные решения

$$u_k(t) = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} \varphi_{k-j}$$

уравнения (1) и векторы их начальных значений $\{u_k^{(j)}(0)\}_{j=0}^{n-1} = h_k \in X_0 \subset X^n$ ($k = 0, \dots, m$). Элементарные решения дополним тривиальным решением и соответственно систему $\{h_k\}$ дополним нулевым вектором. Систему СПВ пучка $L(\lambda)$ назовем n -кратно полной в подпространстве решений X_0 , если линейная оболочка векторов h_k (для всевозможных собственных чисел и соответствующих цепочек СПВ) плотна в X_0 .

Мы будем обозначать через σ_g степень целой скалярной функции $g(\lambda)$, а через δ_g – аналог степени для мероморфной функции:

$$\sigma_g = \varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln^+ \max_{|\lambda|=r} |g(\lambda)|, \quad \delta_g = \varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Известно, что для любой целой функции $g(\lambda)$ конечной степени (т.е. первого порядка и не максимального типа) $\delta_g \leq \sigma_g \leq \pi \delta_g$ (см. приложение в [6]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть резольвенты $R_m(\lambda) \in [E, X]$ ($m = 1, \dots, n$) являются мероморфными оператор-функциями (следовательно, все точки, за исключением полюсов, являются слабо регулярными), которые имеют конечную совместную степень

$$\delta = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \ln^+ \sum_{m=1}^n \|R_m(re^{i\varphi})\|_{[E, X]} d\varphi < \infty.$$

Тогда на каждом сегменте $[\pi\delta, T]$ любое решение уравнения (1) аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений в норме пространства $C^{n-1}\{[\pi\delta, T], X\}$. Если $\delta = 0$, то система СПВ пучка $L(\lambda)$ n -кратно полна в подпространстве решений.

Заметим, что если спектр пучка $L(\lambda)$ пуст, то из теоремы следует, что любое решение $u(t)$ уравнения (1) равно нулю при всех $t \geq \pi\delta$. Следующий пример показывает, что для $t < \pi\delta$ решения, вообще говоря, отличны от нуля:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad u(t, 0) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0.$$

Непрерывно дифференцируемое решение $u(t, x) = 0$ при $t > 1$, но $u(t, x) = u_0(x - t) \neq 0$ при $0 \leq t < x \leq 1$, если $u_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1]$. Для представления примера в абстрактной форме (1), (2) положим $X = Y = C[0, 1]$, $A_1 = I$, $A_0 f(x) = \frac{d}{dx} f(x)$, $f(0) = 0$. Тогда спектр пуст, $R(\lambda)f = \int_0^x e^{\lambda(s-x)} f(s) ds$ и $\delta = 1/\pi$. По теореме 2 элементарные решения (нулевые) аппроксимируют решение $u(t)$ на сегменте $[1, T]$ и непосредственно видно, что этого не происходит на $[0, 1]$.

В случае нулевой совместной степени $\delta = 0$ и пустого спектра уравнение (1) имеет только тривиальное решение.

Доказательство теоремы достаточно провести для решений $u(t)$, принадлежащих $C^{2n-2}\{[0, \infty), E\}$, так как они аппроксимируют любое решение задачи (1), (2) в норме пространства $C^{n-1}\{[0, T], X\}$. Справедлива формула связи решений $u(t)$ повышенной гладкости с резольвентами $R_m(\lambda)$

$$\int_0^t u(s + \tau) e^{-\lambda s} ds = -e^{-\lambda t} \varepsilon(\lambda, t, \tau) + \varepsilon(\lambda, 0, \tau), \quad (6)$$

где

$$\varepsilon(\lambda, t, \tau) = \sum_{m=1}^n R_m(\lambda) \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k u^{(m-1-k)}(t + \tau).$$

В пространстве $M = C^{n-1}\{[0, T_1], X\}$ ($T_1 = T - \pi\delta$) вводится линейная замкнутая оболочка M_0 элементарных решений и рассматривается линейный непрерывный функционал $g_0 \in M^*$, ортогональный M_0 : $\langle g_0, M_0 \rangle = 0$. После вложения уравнения (6) в пространство M и применения функционала g_0 получится скалярное уравнение

$$\int_0^t y(s) e^{-\lambda s} ds = -e^{-\lambda t} g(\lambda, t) + g(\lambda, 0). \quad (7)$$

В окрестности полюса резольвенты $R_m(\lambda) \in [E, X]$ главная часть разложения Лорана вектор-функции $\lambda^k e^{\lambda \tau} R_m(\lambda) y$ представляет собой линейную комбинацию $\sum_k c_k(\lambda) u_k(\tau)$ элементарных решений $u_k(\tau)$. Поэтому применение функционала

g_0 устраняет особенности резольвент, и функция $g(\lambda, t)$ является целой функцией и притом конечной степени $\sigma_g \leq \pi\delta$. Тогда из (7) следует, что в углах $[-\eta, \eta]$, $[\pi - \eta, \pi + \eta]$ ($0 < \eta < \pi/2$) при всех $t > \pi\delta \sec \eta$ функция $g(\lambda, t) \rightarrow 0$, $|\lambda| \rightarrow \infty$. Так как порядок функции $g(\lambda, t)$ не превосходит 1, то согласно принципу Фрагмена–Линделёфа она также ограничена в дополнительных углах $[\eta, \pi - \eta]$, $[\pi + \eta, 2\pi - \eta]$, откуда $g(\lambda, t) = 0$ при $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall t > \pi\delta \sec \eta$. В силу произвольности $0 < \eta < \pi/2$ заключаем, что $\langle g_0, u(\pi\delta + \tau) \rangle = 0$ при $0 \leq \tau \leq T_1$. Учитывая выбор функционала g_0 , убеждаемся в справедливости теоремы.

3. В качестве приложения рассмотрим смешанную задачу для уравнения не типа Ковалевской

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j} p_{j,k}(z) \frac{\partial^{j+k} u(z, t)}{\partial t^j \partial z^k} = 0, \quad t > 0, \quad a \leq z \leq b; \quad (8)$$

$$1) \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(z, 0) = u_j(z), \quad j = 0, \dots, n-1; \quad 2) U_k[u] = 0, \quad k = 1, \dots, m_0. \quad (9)$$

Задаче отвечает обыкновенное дифференциальное выражение

$$l(\lambda, y) = \sum_{j=0}^n \lambda^j l_j(y), \quad l_j(y) = \sum_{k=0}^{m_j} p_{j,k} \frac{d^k y}{dz^k}.$$

Предполагается, что

$$m_0 > \max_{1 \leq j \leq n} m_j + n, \quad p_{j,k}(z) \in C^{n-1}[a, b], \quad p_{0,m_0}^{-1}(z) \in C^n[a, b]$$

и характеристический определитель краевой задачи $l(\lambda, y) = 0$ с краевыми условиями (9.2) тождественно не равен нулю. Пусть дифференциальные выражения l_j порождают в $L_2[a, b] = L_2$ замкнутые операторы A_j с областями определения D_j , для которых функции из пересечения $\bigcap_{j=0}^n D_j = D$ удовлетворяют краевым условиям (9.2). Спектр пучка $L(\lambda) = \sum_{j=0}^n \lambda^j A_j$ состоит не более чем из счетного множества собственных чисел с возможной точкой сгущения на бесконечности [7]. С помощью функции Грина дифференциального оператора $L(\lambda_0)$ и признаков ядерности интегральных операторов [8] устанавливается сходимость ряда $\sum_k s_{jk}^p$ из s -чисел s_{jk} операторов $A_j R(\lambda_0)$ при любом $p > 1/(n + \frac{1}{2})$. Затем с привлечением одной оценки нормы резольвенты ядерного оператора через бесконечные определители [8] проверяется, что оператор-функция $R(\lambda) \in [L_2]$ имеет нулевую степень. Если в правой полуплоскости существует угол, свободный от собственных чисел пучка $L(\lambda)$, то найдется луч внутри этого угла, на котором выполнена оценка $\|R(\lambda)\| \leq C e^{\beta \operatorname{Re} \lambda}$. Следовательно, все условия абстрактных теорем 1, 2 выполняются. Смешанная задача (8), (9) имеет не более одного решения, и на любом отрезке $[0, T]$ каждое ее решение аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений в норме $C^{n-1}\{[0, T], L_2\}$. Система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ n -кратно полна в подпространстве решений.

Полнота для задачи (8), (9) при $n = 2$ была получена в [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкаликов А. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. Т. 14. С. 140–224.
2. Agmon S., Nirenberg L. // Comm. Pure Appl. Math. 1969. V. 16. P. 121–239.
3. Любич Ю. И., Ткаченко В. А. // Матем. сб. 1966. Т. 70 (112). № 3. С. 416–437.
4. Прокопенко Л. Н. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1030–1033.
5. Келдыш М. В. // УМН. 1971. Т. 26. № 4 (160). С. 15–41.
6. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1968.
8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
9. Власенко Л. А., Руткас А. Г. // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 138–140.