Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 601–605

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1868>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:49:41

О НУЛЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ ДИРИХЛЕ ИЗ КЛАССА СЕЛЬБЕРГА

С. А. Гриценко

А. Сельберг определил в [1] класс S рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) существует целое неотрицательное число m такое, что функция $(s-1)^m F(s)$ целая;
- 2) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют неравенствам

$$a(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$$

для любого положительного ε , причем, $a(1) = 1$;

- 3) существует функция $\gamma_F(s)$ вида

$$\gamma_F(s) = \varepsilon_1 Q^s \prod_{\nu=1}^k \Gamma(\lambda_{\nu} s + \mu_{\nu}),$$

где $|\varepsilon_1| = 1$, $k = k_F$ – натуральное число, $Q > 0$, $\lambda_{\nu} > 0$, $\operatorname{Re}(\mu_{\nu}) \geq 0$, и такая, что для функции $\Phi(s) = \gamma_F(s)F(s)$ справедливо тождество

$$\Phi(s) = \overline{\Phi}(1 - \overline{s});$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00002.

4) при $\operatorname{Re}(s) > 1$ функция $F(s)$ раскладывается в эйлерово произведение

$$F(s) = \prod_p (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \dots),$$

p пробегает простые числа;

$$\log F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s},$$

где $b(n) = 0$, если n не равно положительной степени простого числа, причем, $b(n) \ll n^{\theta}$ для некоторого $\theta \leq 1/2$.

В статье [2] для любой функции $F(s)$ из S определена степень $F(s)$ следующим образом:

$$d_F = 2 \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu}.$$

Изложим известные факты и гипотезы о распределении нулей рядов Дирихле (см. также [3]–[6]).

Пусть $F(s)$ – функция из класса S . Назовем нули $F(s)$, совпадающие с полюсами функции $\gamma_F(s)$, *тривиальными*, а остальные – *нетривиальными*.

Известно (см. [1]), что нетривиальные нули $F(s)$ расположены в полосе $1 - A \leq \operatorname{Re}(s) \leq A$, $A = A_F > 0$.

Кроме того, так как $F(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа, то

$$N(T) \sim cT \log T, \quad c = c_F > 0,$$

где $N(T)$ – число нетривиальных нулей ρ функции $F(s)$ таких, что $0 < \operatorname{Im}(\rho) \leq T$.

Будем говорить, что для $F(s)$ справедлива гипотеза Римана, если все ее нетривиальные нули лежат на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

Известно, что существуют функции, представляющиеся в области $\operatorname{Re}(s) > 1$ рядами Дирихле, удовлетворяющие функциональным уравнениям риманова типа, но не имеющие разложений в эйлеровы произведения, для которых гипотеза Римана неверна. Таковы, например, функция Дэвенпорта–Хейльбронна (см. [7], [8], [3]), дзета-функции Эпштейна, соответствующие неодноклассным бинарным квадратичным формам (см. [9], [10], [5], [6]) и дзета-функция Гурвица (см. [12], [14]). Все перечисленные функции представляются в виде линейных комбинаций рядов Дирихле, имеющих функциональное уравнение и разложение в эйлерово произведение.

Следующие гипотезы, принадлежащие соответственно А. Сельбергу [1], А. А. Карацубе [3] и Г. Монгмери (см. [1, с. 384]), пока не доказаны и не опровергнуты:

для всех функций из класса S (которые по определению не только удовлетворяют функциональным уравнениям риманова типа, но и имеют разложения в эйлеровы произведения), справедлива гипотеза Римана;

почти все нетривиальные нули функции Дэвенпорта–Хейльбронна лежат на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1/2$;

почти все нетривиальные нули дзета-функций Эпштейна лежат на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

Э. Бомбьери и Д. Хейчал дали в [5] условное доказательство гипотезы Монтгомери.

Введем три функции:

$$\rho(s) = \overline{\gamma}_F(1 - \overline{s})\gamma_F^{-1}(s) = \overline{\varepsilon}_1^2 Q^{1-2s} \prod_{\nu=1}^k \Gamma(\lambda_\nu(1-s) + \overline{\mu}_\nu) \Gamma^{-1}(\lambda_\nu + \mu_\nu),$$

$$\exp(i\theta(t)) = \left(\rho\left(\frac{1}{2} + it\right) \right)^{-1/2}, \quad Z(t) = \exp(i\theta(t)) F\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

Из функционального уравнения следует, что $Z(t)$ принимает вещественные значения при вещественных t .

Пусть теперь $a_1, \dots, a_N$ — произвольные вещественные числа. Рассмотрим функцию $\Phi_1(s)$ вида

$$\Phi_1(s) = \sum_{j=1}^N a_j (\rho_j(s))^{-1/2} F_j(s),$$

где $F_j(s)$ — функции из S .

Определим функцию $f(t)$:

$$f(t) = \Phi_1\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{j=1}^N a_j \left(\rho_j\left(\frac{1}{2} + it\right) \right)^{-1/2} F_j\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{j=1}^N a_j Z_j(t). \quad (1)$$

Начиная отсюда будем считать, что $T \geq T_0 > 0$, где T_0 — достаточно большая постоянная, зависящая лишь от $F_1(s), \dots, F_N(s)$.

Как отмечено в [3], $\Phi_1(s)$ “подобна” функции Дэвенпорта–Хейльбронна (все $F_j(s)$ удовлетворяют функциональным уравнениям риманова типа, а $\Phi_1(s)$, вообще говоря, не имеет разложения в эйлерово произведение).

Если для $\Phi_1(s)$ справедлива гипотеза, сформулированная для функции Дэвенпорта–Хейльбронна (в связи с этим см. [1, п. 4]), то существует постоянная $c_1 = c_1(\Phi_1) > 0$ такая, что

$$N_0(T) \geq c_1 T \log T.$$

Назовем последнее неравенство “ожидаемым”.

Для случая, когда $F_1(s), \dots, F_N(s)$ являются L -функциями Дирихле, отвечающими примитивным характерам (в нашей терминологии они относятся к функциям из класса S степени 1), А. А. Карацуба получил в [3] своим методом следующие оценки величины $N_0(T)$

$$N_0(T) \geq T(\log T)^{2\beta} \exp(-c_2 \sqrt{\log \log T}),$$

если характеры Дирихле $\chi_1, \dots, \chi_N$ имеют одинаковую четность,

$$N_0(T) \geq T(\log T)^\beta \exp(-c_3 \sqrt{\log \log T})$$

– в противном случае; здесь $\beta = (\varphi(K))^{-1}$, K – наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1, \dots, k_N$ – модулей характеров $\chi_1, \dots, \chi_N$, $\varphi(K)$ – функция Эйлера, c_2, c_3 – абсолютные положительные постоянные.

В настоящей статье анонсируется оценка снизу величины $N_0(T)$ для случая, когда $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – функции из S степени 2.

Для $F_1(s), \dots, F_N(s)$ принимается ряд гипотез, формулировки которых приводятся ниже.

Прежде всего заметим, что если в условиях нашей теоремы применить метод Харди–Литтлвуда [11], то получится неравенство

$$N_0(T) \geq c_4 T, \quad c_4 > 0,$$

и задача состоит в его уточнении.

Из нашей теоремы легко вывести, что

$$N_0(T) \geq \frac{1}{2} T \exp(\sqrt{\log \log \log T}).$$

Эта оценка, хотя из нее следует, что прямая $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ является “особой” для нулей функции $\Phi_1(s)$, очевидно, гораздо менее точна, чем выписанные выше оценки А. А. Карацубы, и далека от “ожидаемой”.

Первый результат о том, что прямая $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ является “особой” для нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна был получен в 1980 году С. М. Воронинным [13]. Им было доказано, что

$$N_0(T) \geq c_5 T \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\log \log \log \log T}\right)$$

(c_5 – абсолютная положительная постоянная).

Переходим к формулировке условий для функций $F_1(s), \dots, F_N(s)$ (в связи с этим см. также статью [1]). Пусть $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – функции из S степени 2. Пусть, кроме того, они таковы, что

- 1) при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы

$$\sum_{p \leq x} |a_j(p)|^2 \log p = x + O(x(\log x)^{-1}),$$

где $a_j(n)$ – коэффициенты Дирихле функций $F_j(s)$, а p здесь и везде в дальнейшем обозначает простые числа;

- 2) при $x \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\sum_{p \leq x} a_j(p) \bar{a}_i(p) p^{-1} = O(1),$$

где $a_j(n)$ и $a_i(n)$ – коэффициенты Дирихле любых функций $F_j(s)$, $F_i(s)$, $1 \leq j \neq i \leq N$;

- 3) при любых j , $1 \leq j \leq N$, существуют положительные постоянные c_{F_j} такие, что

$$|1 + a_j(p)p^{-1/2-it} + a_j(p^2)p^{-1-2it} + \dots| > c_{F_j};$$

- 4) пусть $F(s)$ – любая из функций $F_1(s), \dots, F_N(s)$; тогда при $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 n^{-1} = A_F \log x + B_F + O((\log x)^{-4}),$$

где $a(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $F(s)$, $A_F > 0$, B_F – постоянные, зависящие только от $F(s)$.

Сформулируем наш основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть N – произвольное натуральное число, $a_1, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа, $a_1 \neq 0$, $T \geq T_0 > 0$. Пусть $f(t)$ – определенная формулой (1) функция, а $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – функции степени 2 из S , удовлетворяющие условиям 1–4.

Тогда на отрезке $[T, 2T]$ лежит не меньше, чем $T \exp(\sqrt{\log \log \log T})$, нулей нечетного порядка функции $f(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проводится методом С. М. Воронина (см. [13], [12]), разработанным им в 1980 году для оценки числа нулей функции Дэвенпорта–Хейлбронна, лежащих на отрезке критической прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно указать подкласс класса S , все функции которого удовлетворяют условиям 1–4. Его составляют различные L -функции Гекке, понимаемые в том же смысле, что в монографии [12], и соответствующие комплексным характеристам Гекке одного и того же мнимого квадратичного расширения поля рациональных чисел. Для функций данного подкласса утверждение теоремы безусловно.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
23.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Selberg A. // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory: Univ. di Salerno, 1992. P. 365–387.
2. Conrey J. B., Ghosh A. // Duke Math. J. 1993. V. 72. № 3. P. 673–695.
3. Карацуба А. А. // Тр. МИРАН. 1994. Т. 207. С. 180–196.
4. Карацуба А. А. // Math. Slovaca. 1994. Т. 44. № 5. С. 633–649.
5. Bombieri E., Hejhal D. // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1987. V. 304. P. 213–217.
6. Hejhal D. // Proc. International Congress Math. Berkeley. California, 1986. P. 1362–1383.
7. Davenport H., Heilbronn H. // J. London Math. Soc. 1936. V. 11. P. 181–185, 307–312.
8. Карацуба А. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 303–315.
9. Воронин С. М. // Тр. МИАН. 1976. Т. 142. С. 136–147.
10. Воронин С. М. // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 257–258.
11. Hardy G., Littlewood J. E. // Math. Zs. 1921. V. 10. P. 283–317.
12. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
13. Воронин С. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 1. С. 63–91.
14. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.