Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Тихомиров, О бирациональных преобразованиях схем Гильберта алгебраической поверхности, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 281–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:20:10

УДК 517.2

О БИРАЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СХЕМ ГИЛЬБЕРТА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. С. Тихомиров

В статье дается точное описание замыкания Γ_f графика бирационального изоморфизма схем Гильберта точек алгебраических поверхностей $f: \text{Hilb}^d \tilde{S} \dashrightarrow \text{Hilb}^d S$, соответствующего раздутию $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ с центром в точке на гладкой алгебраической поверхности S . Доказывается, что проекция $\text{pr}_{\tilde{H}}: \Gamma_f \rightarrow \tilde{H} = \text{Hilb}^d \tilde{S}$ есть раздутие с центром в подмногообразии инциденции $R \subset \tilde{H}$, параметризующем наборы d точек в $\tilde{S}$, из которых по меньшей мере две точки инцидентны исключительной прямой раздутия σ ; при этом R снабжается схемной структурой посредством подходящего пучка идеалов Фиттинга. Доказывается, что Γ_f неособо только при $d \leq 2$, и в нетривиальном случае $d = 2$ дается точное описание разложения второй проекции $\text{pr}_H: \Gamma_f \rightarrow H = \text{Hilb}^d S$ в композицию двух раздутий с гладкими центрами.

Библиография: 8 названий.

Введение. Настоящая статья посвящена описанию бирациональных перестроек схем Гильберта точек гладкой алгебраической поверхности, индуцированных бирациональными преобразованиями поверхности. Поскольку бирациональные преобразования гладкой поверхности разлагаются в композицию раздутий точек (σ -процессов) и обратных к ним преобразований стягивания, достаточно рассмотреть случай перестройки схемы Гильберта при σ -процессе. Пусть S – гладкая алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k . Рассмотрим схему Гильберта точек $H = H_d := \text{Hilb}^d S$, параметризующую 0-мерные подсхемы длины d в S (системы точек). Как известно [1], H – гладкое неприводимое $2d$ -мерное многообразие. Пусть $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ – раздутие с центром в (приведенной) замкнутой точке $x_0 \in S$, $l_0 := \sigma^{-1}(x_0) \simeq \mathbf{P}^1$ – исключительная прямая на $\tilde{S}$, и пусть $\tilde{H} = \text{Hilb}^d \tilde{S}$. Раздутие σ индуцирует бирациональный изоморфизм

$$f: \tilde{H} \dashrightarrow H. \quad (1)$$

Естественным разрешением особенностей бирационального изоморфизма f является замыкание Γ_f графика отображения f с регулярными проекциями $\tilde{H} \xleftarrow{\text{pr}_{\tilde{H}}} \Gamma_f \xrightarrow{\text{pr}_H} H$, так что $\text{pr}_H = f \circ \text{pr}_{\tilde{H}}$. (Это разрешение минимально в обычном смысле: всякое многообразие H' с регулярными бирациональными проекциями $\tilde{H} \xleftarrow{p_1} H' \xrightarrow{p_2} H$ такими, что $p_2 = f \circ p_1$, доминирует над Γ_f , т.е. существует морфизм $\phi: H' \rightarrow \Gamma_f$ такой, что

Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS-OPEN-2000-269.

$p_1 = \text{pr}_{\tilde{H}} \circ \phi$, $p_2 = \text{pr}_H \circ \phi$. При этом Γ_f определяется указанным свойством минимальности однозначно с точностью до изоморфизма.)

Наша цель – получение точного описания многообразия Γ_f через бирациональный морфизм – проекцию $\text{pr}_{\tilde{H}}: \Gamma_f \rightarrow \tilde{H}$ как раздутие с центром в соответствующей подсхеме R в $\tilde{H}$. Первый основной результат статьи – теорема 1.3 – показывает, что R как замкнутое подмножество в $\tilde{H}$ есть цикл инцидентности¹

$$R = \{z \in \tilde{H} \mid \text{length}(Z \cap l_0) \geq 2\},$$

а схемная структура на R задается пучком идеалов Фиттинга

$$\text{Fitt}^0(\text{pr}_{2*} R^1(\sigma \times \text{id}_{\tilde{H}}) * \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}, \tilde{S} \times \tilde{H}}),$$

где

$$\tilde{\Gamma} = \{(x, z) \in \tilde{S} \times \tilde{H} \mid x \in Z\}$$

– универсальный цикл. Первый нетривиальный случай здесь – это $d = 2$. В этом случае вышеприведенная структура на R есть структура гладкого многообразия (см. замечание 1.1 ниже) и, тем самым, Γ_f – также гладкое многообразие. При этом второй основной результат работы – теорема 2.6 – дает точное описание второй проекции $\text{pr}_H: \Gamma_f \rightarrow H$ в композицию двух раздутий с гладкими центрами.

В заключении статьи рассматривается общий случай $d \geq 3$. В этом случае, как показывает простая проверка, уже не только схема R имеет особенности (хотя и приведена в общей точке), но и Γ_f является особым многообразием (теорема 3.1). Таким образом, Γ_f неособо только при $d \leq 2$.

1. Бирациональный изоморфизм схем Гильберта $\text{Hilb}^d \tilde{S} \dashrightarrow \text{Hilb}^d S$, индуцированный σ -процессом $\tilde{S} \rightarrow S$. Этот пункт посвящен описанию замыкания Γ_f графика бирационального отображения $f: \tilde{H} \dashrightarrow H$ из (1). Рассмотрим композицию проекций

$$\tilde{S} \times \tilde{H} \xrightarrow{\bar{\sigma} := \sigma \times \text{id}_{\tilde{H}}} S \times \tilde{H} \xrightarrow{\text{pr}_2} \tilde{H} \quad (2)$$

и определяемый ею пучок идеалов Фиттинга

$$\mathbf{J} = \text{Fitt}^0(\text{pr}_{2*} R^1 \bar{\sigma} * \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}, \tilde{S} \times \tilde{H}}). \quad (3)$$

Заметим, что по свойству раздутия σ имеют место равенства

$$\bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\tilde{S} \times \tilde{H}} = \mathcal{O}_{S \times \tilde{H}}, \quad R^i \bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\tilde{S} \times \tilde{H}} = 0, \quad i > 0. \quad (4)$$

Покажем, что

$$\text{Supp}(\mathcal{O}_{\tilde{H}}/\mathbf{J}) = R, \quad (5)$$

где R определено выше во введении. Для этого рассмотрим в $S \times \tilde{H}$ подмножество $\Gamma_0 = \bar{\sigma}(\tilde{\Gamma})$ как приведенное неприводимое подмногообразие (напомним, что $\tilde{\Gamma}$ неприводимо – см., например, [1]). Положим $\tilde{\Gamma}_R = \tilde{\Gamma} \cap \{l_0\} \times R$. Из определения множества R непосредственно следует, что

- (а) $\bar{\sigma} \mid \tilde{\Gamma} \setminus \tilde{\Gamma}_R: \tilde{\Gamma} \setminus \tilde{\Gamma}_R \rightarrow \Gamma_0 \setminus \{x_0\} \times R$ – изоморфизм, а
- (б) $\bar{\sigma} \mid \tilde{\Gamma}_R: \tilde{\Gamma}_R \rightarrow \{x_0\} \times R$ – конечный морфизм степени ≥ 2 .

¹Здесь и ниже мы пользуемся следующим стандартным соглашением об обозначениях: для произвольной точки $z \in H$ (соответственно $z \in \tilde{H}$) через Z будем обозначать соответствующую подсхему длины d в S (соответственно в $\tilde{S}$).

Таким образом, $\bar{\sigma} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma_0$ – конечный бирациональный морфизм. Тем самым, ввиду неприводимости $\tilde{\Gamma}$ пучок $\bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$ является $\mathcal{O}_{\Gamma_0}$ -пучком чистой размерности, равной $\dim \Gamma_0$ (т.е. не имеет подпучков кручения на Γ_0). Поэтому пучок $\bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}$ как подпучок в $\mathcal{O}_{S \times \tilde{H}}$ (здесь вложение $\bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H} \hookrightarrow \mathcal{O}_{S \times \tilde{H}}$ является следствием первого равенства (4)) совпадает с пучком идеалов подмногообразия Γ_0 в $S \times \tilde{H}$:

$$\bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H} = \mathcal{J}_{\Gamma_0, S \times \tilde{H}}. \quad (6)$$

Теперь применим функтор $R^i \bar{\sigma}_*$ к точной тройке

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S} \times \tilde{H}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow 0;$$

с учетом (4) получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H} \rightarrow \mathcal{O}_{S \times \tilde{H}} \rightarrow \bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow R^1 \bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H} \rightarrow 0,$$

которая ввиду (6) расщепляется на две точные тройки:

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_{\Gamma_0, S \times \tilde{H}} \rightarrow \mathcal{O}_{S \times \tilde{H}} \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_0} \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_0} \rightarrow \bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow R^1 \bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Из тройки (8) и вышеуказанных свойств (а) и (б) морфизма $\bar{\sigma}$ непосредственно следует, что $\text{Supp}(R^1 \bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H}) = \{x_0\} \times R$, а значит, ввиду изоморфизма $\text{pr}_2 : \{x_0\} \times R \rightarrow \{x_0\} \times R \xrightarrow{\sim} R$,

$$\text{Supp}(\text{pr}_{2*} R^1 \bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H}) = R, \quad (9)$$

что по определению идеала Фиттинга Fitt^0 равносильно (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В случае длины $d = 2$ из определения R непосредственно следует, что $R = \text{Hilb}^2 l_0 \simeq S^2 l_0$ – гладкое подмногообразие в $\tilde{H}$, изоморфное $\mathbf{P}^2$, причем

$$\sigma_R := \bar{\sigma} : \tilde{\Gamma}_R : \tilde{\Gamma}_R \rightarrow \{x_0\} \times R \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^2$$

есть двойное накрытие с ветвлением в диагональной конике $C \subset \mathbf{P}^2$, так что

$$\sigma_{R*} \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}_R} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1)$$

и, более того, с учетом свойств (а) и (б) многообразия $\tilde{\Gamma}_R$ выше

$$\bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}_R} / \mathcal{O}_{\Gamma_0} \simeq \sigma_{R*} \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}_R} / \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1).$$

Тем самым, ввиду (8) и того, что $\text{pr}_2 : \{x_0\} \times R : \{x_0\} \times R \xrightarrow{\sim} R$ – изоморфизм, имеем $\text{pr}_{2*} R^1 \bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{S} \times \tilde{H} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1)$, а значит, $\mathbf{J} \simeq \text{Fitt}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1))$ совпадает с пучком идеалов $\mathcal{J}_{R, \tilde{H}}$ гладкого подмногообразия R в $\tilde{H}$.

Рассмотрим раздутие $\delta : \hat{H} \rightarrow \tilde{H}$ с центром в подсхеме $R \subset \tilde{H}$, определяемой идеалом $\mathbf{J}$. Наша цель – доказать совпадение $\hat{H}$ с Γ_f . Сначала докажем существование

бirationального морфизма $\gamma: \hat{H} \rightarrow H$ такого, что $f \circ \delta = \gamma$. Для этого рассмотрим расслоенные произведения $\hat{\Gamma}_0 = \Gamma_0 \times_{\hat{H}} \hat{H}$ и $\hat{\Gamma} = \tilde{\Gamma} \times_{\Gamma_0} \hat{\Gamma}_0$ и образуемую ими диаграмму расслоенных квадратов, где $\sigma_0 = \bar{\sigma} \mid \tilde{\Gamma}$, а q_0 есть композиция $\Gamma_0 \hookrightarrow S \times \tilde{H} \xrightarrow{\text{pr}_2} \tilde{H}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{\Gamma} & \xrightarrow{\hat{q}} & \hat{H} \\
 \searrow \hat{\sigma} & \nearrow \hat{q}_0 & \\
 & \hat{\Gamma}_0 & \\
 \downarrow \pi & \downarrow \pi_0 & \downarrow \delta \\
 \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{\tilde{q}} & \tilde{H} \\
 \searrow \sigma_0 & \nearrow q_0 & \\
 & \Gamma_0 &
 \end{array} . \quad (10)$$

Так как по свойству универсального цикла $\tilde{\Gamma}$ проекция $\tilde{q}: \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{H}$ – плоский конечный морфизм степени d , то пучок

$$E = \tilde{q}_* \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} = q_{0*} \sigma_{0*} \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \quad (11)$$

является локально свободным $\mathcal{O}_{\hat{H}}$ -пучком ранга d . Отсюда и из неприводимости многообразия $\hat{H}$ (общее свойство раздутий) и неприводимости $\tilde{\Gamma}$ следует, что в расслоенной диаграмме (10) схема $\hat{\Gamma}$ – также неприводимое многообразие, $\hat{q}: \hat{\Gamma} \rightarrow \hat{H}$ – плоский конечный морфизм. При этом замена базы показывает, что

$$\hat{q}_* \mathcal{O}_{\hat{\Gamma}} = \delta^* E \quad (12)$$

– локально свободный $\mathcal{O}_{\hat{H}}$ -пучок ранга d . Кроме того, из диаграммы (10) в силу конечности (а значит, аффинности) морфизмов $\hat{q}_0$ и q_0 также вытекают равенства

$$\hat{q}_{0*} \mathcal{O}_{\hat{\Gamma}_0} = \hat{q}_{0*} \pi_0^* \mathcal{O}_{\Gamma_0} = \delta^* q_{0*} \mathcal{O}_{\Gamma_0}. \quad (13)$$

Так как q_0 – конечный морфизм, то, применяя к тройке (8) функтор $R^i q_{0*}$, с учетом (11) получаем

$$0 \rightarrow q_{0*} \mathcal{O}_{\Gamma_0} \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0, \quad (14)$$

где

$$F := \text{pr}_{2*} R^1 \bar{\sigma}_* \mathcal{J}_{\tilde{\Gamma}, \tilde{S} \times \tilde{H}}. \quad (15)$$

Применим теперь к (14) функтор δ^* ; с учетом (13) получаем тройку

$$0 \rightarrow \hat{q}_{0*} \mathcal{O}_{\hat{\Gamma}_0} \xrightarrow{i} \delta^* E \rightarrow \delta^* F \rightarrow 0. \quad (16)$$

Эта тройка точна слева: в самом деле, ввиду неприводимости Γ_0 и того, что $\hat{q}_0: \hat{\Gamma}_0 \rightarrow \hat{H}$ – конечный сюръективный морфизм, $\mathcal{O}_{\hat{H}}$ -пучок $\hat{q}_{0*} \mathcal{O}_{\hat{\Gamma}_0}$ не имеет подпучков кручения, поэтому морфизм i в (16), будучи по построению инъективным в общей точке, инъективен. Кроме того, в силу известных свойств раздутий [2, гл. 2, 7.13] (в нашем случае, т.е. в случае раздутия $\delta: \hat{H} \rightarrow \tilde{H}$), пучок

$$\text{Fitt}^0(\delta^* F) = \delta^{-1} \text{Fitt}^0(F) \cdot \mathcal{O}_{\hat{H}} = \delta^{-1} \mathbf{J} \cdot \mathcal{O}_{\hat{H}} \quad (17)$$

(здесь в первом равенстве мы пользуемся функториальностью идеалов Фиттинга) является обратимым $\mathcal{O}_{\hat{H}}$ -пучком.

Теперь воспользуемся следующим техническим результатом (см. [3, лемма 1]).

ЛЕММА 1.2. Пусть X – целая нётерова схема и F – ненулевой когерентный $\mathcal{O}_X$ -пучок кручения. Тогда пучок идеалов Фиттинга $\text{Fitt}^0(F)$ является обратимым $\mathcal{O}_X$ -пучком тогда и только тогда, когда F имеет гомологическую размерность 1: $dh_X F = 1$.

Применяя эту лемму к обратимому $\mathcal{O}_{\hat{H}}$ -пучку $\text{Fitt}^0(\delta^* F)$, получаем, что $\mathcal{O}_{\hat{H}}$ -пучок кручения $\delta^* F$ имеет гомологическую размерность 1. Отсюда и из точной тройки (16) ввиду локальной свободы пучка $\delta^* E$ следует, что пучок $\hat{q}_0^* \mathcal{O}_{\hat{\Gamma}_0}$ локально свободен ранга d , что, в свою очередь, равносильно тому, что конечный морфизм $\hat{q}_0: \hat{\Gamma}_0 \rightarrow \hat{H}$ является плоским морфизмом степени d (см., например, [4, лекция 6, предложение 7]). Заметим, что по построению проекция $\hat{q}_0^*$ разлагается в композицию $\hat{\Gamma}_0 \hookrightarrow S \times \hat{H} \xrightarrow{p_2} \hat{H}$. Тем самым, по универсальному свойству схемы Гильберта H определен морфизм $\gamma: \hat{H} \rightarrow H$ такой, что $\hat{\Gamma}_0 = (\gamma \times \text{id}_H)^{-1}(\Gamma)$, где $\Gamma \subset S \times H$ – универсальный цикл. При этом по конструкции, очевидно, $\gamma = f \circ \delta$.

Теперь рассмотрим произвольное разрешение бирационального изоморфизма $f: \tilde{H} \dashrightarrow H$, т.е. неприводимое многообразие H' с бирациональными морфизмами $\tilde{H} \xleftarrow{p_1} H' \xrightarrow{p_2} H$ такими, что $p_2 = f \circ p_1$, и докажем существование морфизма $\phi: H' \rightarrow \hat{H}$, включающегося в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & H' & \\
 p_1 \swarrow & \downarrow \phi & \searrow p_2 \\
 & \hat{H} & \\
 \delta \swarrow & & \searrow \gamma \\
 \tilde{H} & \xrightarrow{f} & H
 \end{array} . \quad (18)$$

Отсюда и из свойства минимальности Γ_f (см. введение) будет следовать, что $\Gamma_f = \hat{H}$. Для доказательства существования морфизма ϕ рассмотрим сначала диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Gamma} & \hookrightarrow & \tilde{S} \times \tilde{H} \\
 \downarrow \sigma_0 & & \downarrow \bar{\sigma} \\
 \Gamma_0 & \hookrightarrow & S \times \tilde{H}
 \end{array} . \quad (19)$$

Так как $\bar{\sigma}$ – раздутие с центром $\{x_0\} \times \tilde{H}$, а σ_0 – бирациональный морфизм неприводимых многообразий, то диаграмма (19) является расслоенным квадратом (в котором, тем самым, σ_0 – также раздутие с центром $\Gamma_0 \cap \{x_0\} \times \tilde{H}$). Далее, рассмотрим диаграмму

расслоенных квадратов

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Gamma}' & \xrightarrow{\tilde{q}'} & H' \\
 \pi' \downarrow & \searrow & \nearrow \text{pr}_2 \\
 & \tilde{S} \times H' & \\
 & \downarrow \text{id} \times p_1 & \\
 \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{\tilde{q}} & \tilde{H} \\
 & \searrow & \nearrow \text{pr}_2 \\
 & \tilde{S} \times \tilde{H} &
 \end{array}
 \quad , \quad (20)$$

Так как $\tilde{q}$ и $\tilde{q}'$ – плоские конечные морфизмы, а p_1 – бирациональный морфизм неприводимых многообразий, то, рассуждая как и выше с неприводимостью многообразия $\tilde{\Gamma}$, получаем, что $\tilde{\Gamma}'$ неприводимо. Аналогично, рассматривая многообразие $\Gamma' = \Gamma \times_H H'$ с проекцией $q': \Gamma' \hookrightarrow S \times H' \rightarrow H'$, являющейся конечным плоским морфизмом степени d , получаем неприводимость Γ' . Далее, по построению коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Gamma}' & \xrightarrow{g} & \Gamma' \\
 \tilde{q}' \searrow & & \swarrow q' \\
 & H' & \\
 \text{pr}_2 \nearrow & & \nwarrow \text{pr}_2 \\
 \tilde{S} \times H' & \xrightarrow{\sigma \times \text{id}_{H'}} & S \times H'
 \end{array}
 \quad , \quad (21)$$

в которой $g := \sigma \times \text{id}_{H'} \mid \tilde{\Gamma}': \tilde{\Gamma}' \rightarrow \Gamma'$ – сюръективный бирациональный морфизм ввиду неприводимости $\tilde{\Gamma}'$ и Γ' . Отсюда, так как $\tilde{q}'$ и q' – плоские конечные морфизмы степени d , получаем, что $\tilde{q}' = q' \circ g$ есть разложение Штейна морфизма $\tilde{q}'$ ([2, гл. 3, 11.5]), так что $g: \tilde{\Gamma}' \rightarrow \Gamma'$ – изоморфизм:

$$g: \tilde{\Gamma}' \xrightarrow{\sim} \Gamma'. \quad (22)$$

Теперь расслоенные диаграммы (19) и (20) дают декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Gamma}' & \xrightarrow{g'} & \Gamma'' \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \\
 \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{\sigma_0} & \Gamma_0
 \end{array}
 \quad , \quad (23)$$

в котором Γ'' есть расслоенное произведение $\Gamma_0 \times_{\tilde{H}} H'$ с естественным вложением $\Gamma'' \hookrightarrow S \times H'$, так что $\tilde{\Gamma}' = \Gamma'' \times_S \tilde{S}$, а проекция g' индуцирована нижней проекцией $\sigma \times \text{id}_{H'}$

в диаграмме (21); тем самым, ввиду неприводимости $\tilde{\Gamma}'$ многообразие Γ'' также неприводимо и ввиду (22) совпадает с Γ' (соответственно $g' = g$). Итак, имеем диаграмму расслоенных произведений:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\Gamma}' & \xrightarrow{g'} & \Gamma' & \xrightarrow{q'} & H' \\
 \downarrow \pi' & \searrow \tilde{q}' & \downarrow p'_1 & \nearrow & \downarrow p_1 \\
 \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{\sigma_0} & \Gamma_0 & \xrightarrow{q_0} & \tilde{H} \\
 & \searrow \tilde{q} & & \nearrow &
 \end{array} . \quad (24)$$

Так как q' – конечный плоский морфизм степени d , то из этой диаграммы следует, что

$$E' := q'_* \mathcal{O}_{\Gamma'} = q'_* p_1'^* \mathcal{O}_{\Gamma_0} = p_1^* q_{0*} \mathcal{O}_{\Gamma_0} = p_1^* \text{pr}_{2*} \mathcal{O}_{\Gamma_0} \quad (25)$$

– локально свободный $\mathcal{O}_{H'}$ -пучок степени d . Заметим также, что нижние треугольники в диаграммах (10) и (24) совпадают. Поэтому, применяя к точной тройке (8) функтор $p_1^* \text{pr}_{2*}$ и учитывая (14) и (25), получаем точную тройку:

$$0 \rightarrow E' \rightarrow p_1^* E \rightarrow p_1^* F \rightarrow 0.$$

Тем самым, поскольку $p_1^* E$ и E' – локально свободные $\mathcal{O}_{H'}$ -пучки степени d , а H' – неприводимое многообразие, то пучок $p_1^* F$ является $\mathcal{O}_{H'}$ -пучком кручения гомологической размерности 1, а значит, по лемме 1.2 пучок идеалов Фиттинга

$$\text{Fitt}^0(p_1^* F) = p_1^{-1} \text{Fitt}^0(F) \cdot \mathcal{O}_{H'} = p_1^{-1} \mathbf{J} \cdot \mathcal{O}_{H'}$$

обратим. Поэтому по универсальному свойству раздутий (см., например, [2, гл. 2, 7.14]) существует единственный морфизм $\phi: H' \rightarrow \tilde{H}$ такой, что $p_1 = \delta \circ \phi$. Из диаграммы (18) теперь следует, что проекция $p_2 := \gamma \circ \phi$ удовлетворяет требуемому условию $p_2 = f \circ p_1$. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть Γ_f – замыкание в $\tilde{H} \times H$ графика бирационального изоморфизма схем Гильберта $f: \tilde{H} \dashrightarrow H$, индуцируемого раздутием $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ точки x_0 в S . Тогда Γ_f изоморфно раздутию схемы Гильберта $\tilde{H}$ в подсхеме $(R, \mathcal{O}_R)$, где $R := \{z \in \tilde{H} \mid \text{length}(Z \cap l_0) \geq 2\}$ – цикл инциденции, а $\mathcal{O}_R = \mathcal{O}_{\tilde{H}}/\mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ есть пучок нулевых идеалов Фиттинга $\mathbf{J} = \text{Fitt}^0(\text{pr}_{2*} R^1 \tilde{\sigma}_* \mathcal{I}_{\tilde{\Gamma}, \tilde{S} \times \tilde{H}})$.

В случае $d = 2$ из теоремы 1.3 и замечания 1.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.4. При $d = 2$ многообразие Γ_f является гладким и $\text{pr}_{\tilde{H}}: \Gamma_f \rightarrow \tilde{H}$ – раздутие $\tilde{H}$ в гладкой подсхеме $R = \text{Hilb}^2 l_0$, изоморфной $\mathbf{P}^2$.

2. Случай длины $d = 2$. В этом пункте мы рассматриваем случай $d = 2$. Согласно следствию 1.4 в этом случае Γ_f – гладкое многообразие. Более того, оказывается, что морфизм $\mathrm{rg}_H: \Gamma_f \rightarrow H$ разлагается в композицию двух раздутий с гладкими центрами. Цель этого пункта – получить точное описание этих разложений. Для этого в схеме Гильберта $H = H_2$ рассмотрим замкнутое подмножество $Q = \{z \in H \mid Z \ni x_0\}$ (цикл инцидентности). Легко видеть, что Q как приведенная подсхема в H изоморфна $\tilde{S}$, и при этом изоморфизме

$$Q \xrightarrow{\sim} \tilde{S} \quad (26)$$

имеем

$$\{z \in Q \mid \mathrm{Supp} Z = x_0\} \xrightarrow{\sim} l_0. \quad (27)$$

Пусть $\Gamma = \{(x, z) \in S \times H \mid x \in Z\}$ – универсальный цикл (см. [1]) с проекциями $S \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} H$, рассматриваемый как приведенная неприводимая подсхема в $S \times H$. (Аналогично имеем универсальный цикл $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{S} \times \tilde{H}$ с проекциями $\tilde{S} \xleftarrow{\tilde{p}} \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\tilde{q}} \tilde{H}$.) Рассмотрим раздутие $\sigma_Q: H' \rightarrow H$ схемы H с центром в Q как гладкой подсхемы, и пусть $D_Q = \sigma^{-1}(Q)$ – исключительный дивизор раздутия σ . Используя отождествления (26) и (27), имеем линейчатую поверхность $F = \sigma_Q^{-1}(l_0) = \mathbf{P}(N_{Q/H} \mid l_0)$ с проекцией

$$\pi_F = \sigma_Q \mid F: F \rightarrow l_0 \simeq \mathbf{P}^1$$

и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & D_Q \\ \pi_F \downarrow & & \downarrow \sigma_Q \\ \mathbf{P}^1 \simeq l_0 & \hookrightarrow & \tilde{S} \simeq Q \end{array} \quad (28)$$

ЛЕММА 2.1. *Имеем*

$$N_{Q/H} \mid l_0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1),$$

так что поверхность F есть поверхность типа $\mathbb{F}_3$. При этом F канонически изоморфна многообразию полных пунктуальных флагов подсхем длины 1, 2 и 3 на S с носителем в точке x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для произвольной точки $z \in l_0 \subset Q$ соответствующая схема $Z \subset S$ включается в точную тройку²

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{x_0} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow k_{x_0} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Применяя к этой тройке функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_Z)$, имеем

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}(k_{x_0}, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{x_0}, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(k_{x_0}, \mathcal{O}_Z) \rightarrow 0. \quad (30)$$

²Здесь и ниже через k_x будем обозначать поле вычетов точки x на данной схеме X .

Легко видеть с учетом двойственности Серра на S и равенства

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(k_{x_0}, \mathcal{O}_Z) = 0,$$

что

$$\operatorname{Hom}(k_{x_0}, \mathcal{O}_Z) = k, \quad \operatorname{Ext}^2(k_{x_0}, \mathcal{O}_Z) = \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Z, k_{x_0})^\vee = k, \quad \operatorname{Ext}^1(k_{x_0}, \mathcal{O}_Z) = k^2. \quad (31)$$

Далее, беря произвольную точку $z \in Q$, где $\operatorname{Supp} Z = x_0 \cup x_1$, и применяя функтор $\operatorname{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_Z)$ к тройке

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{I}_{x_0} \rightarrow k_{x_1} \rightarrow 0, \quad (32)$$

получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}(k_{x_1}, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_{x_0}, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \operatorname{Ext}^1(k_{x_1}, \mathcal{O}_Z) \rightarrow \cdots. \quad (33)$$

Эта последовательность и естественные изоморфизмы

$$T_z Q \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_{x_0}, \mathcal{O}_Z) / \operatorname{Hom}(k_{x_1}, \mathcal{O}_Z) \simeq k^2, \quad T_z H \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_Z) \simeq k^4$$

вместе с равенством $\operatorname{Ext}^1(k_{x_1}, \mathcal{O}_Z) = k^2$, получаемым из последнего равенства (31) заменой x_0 на x_1 , дают изоморфизм

$$N_{Q/H}|_z \simeq \operatorname{Ext}^1(k_{x_1}, \mathcal{O}_Z). \quad (34)$$

Для получения релятивизированного варианта равенства (34) рассмотрим семейство двоеточий $\Gamma_{l_0} = \Gamma \times_H l_0$ с носителем x_0 как подсхему в $S \times l_0 \simeq S \times \mathbf{P}^1$ и положим $\mathcal{E} := \mathcal{E}xt_{\operatorname{pr}_2}^1(k_{x_0} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}, \mathcal{O}_{\Gamma_{l_0}})$, где $\operatorname{pr}_2: S \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ – проекция. Замена базы для функтора $\mathcal{H}om_{\operatorname{pr}_2}(\cdot, \mathcal{O}_{\Gamma_{l_0}})$ ввиду равенств (31) дает канонический изоморфизм $N_{Q/H}|_z \simeq \mathcal{E}|_z$, $z \in l_0$. Более того, тройка (29) релятивизируется в $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{P}^1}$ -тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{x_0 \times \mathbf{P}^1} \rightarrow \mathcal{O}_{S \times \mathbf{P}^1} \rightarrow k_{x_0} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \rightarrow 0,$$

и применение к последней функтора $\mathcal{H}om_{\operatorname{pr}_2}(\cdot, \mathcal{O}_{\Gamma_{l_0}})$ дает длинную точную последовательность $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$ -пучков – релятивизированный вариант последовательности (30). Аналогично получаем и релятивизированный вариант последовательности (33), и предыдущие рассуждения дают канонический изоморфизм расслоений:

$$N_{Q/H} | l_0 \simeq \mathcal{E}. \quad (35)$$

Теперь совпадение поверхности $F = P(N_{Q/H} | l_0)$ с многообразием полных пунктуальных флагов подсхем длины 1, 2 и 3 на S с носителем в точке x_0 следует из основного результата работы [5] (см. также [6]). В той же работе [5] доказано равенство $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$ и, тем самым, совпадение F с $\mathbb{F}_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для произвольной точки $z \in Q \setminus l_0$, как легко видеть, определен канонический изоморфизм $N_{Q/H}|_z \simeq T_{x_0}S$, так что слой $\sigma_Q^{-1}(z)$ изоморфен l_0 . Таким образом, точки из $D_Q \setminus F$ параметризуют подсхемы длины 2 в $\tilde{S}$, состоящие из двух различных точек, из которых в точности одна лежит на l_0 .

Рассмотрим диаграмму расслоенных произведений

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma'_1 & \longrightarrow & \Gamma_1 & \longrightarrow & \Gamma \\ \downarrow i'_1 & & \downarrow i_1 & & \downarrow i \\ \tilde{S} \times H' & \xrightarrow{\text{id}_{\tilde{S}} \times \sigma_Q} & \tilde{S} \times H & \xrightarrow{\sigma \times \text{id}_H} & S \times H \end{array}, \quad (36)$$

где i – естественное вложение, так что i_1 и i'_1 – также вложения. Пусть $D'_1 = \Gamma'_1 \times_{H'} D_Q$, $\Gamma' = \overline{\Gamma'_1 \setminus D'_1}$ (замыкание берется в $\tilde{S} \times H'$) и $\gamma' := q' | \Gamma': \Gamma' \rightarrow H'$ – проекция. Далее, согласно лемме 2.1 на поверхности F в H' имеем исключительную прямую m_0 , определяемую условием $(m_0^2)_F = -3$.

ЛЕММА 2.3. *Морфизм $\gamma': \Gamma' \rightarrow H'$ конечен степени 2 над $H' \setminus m_0$ и имеет слой $\mathbf{P}^1$ над точками прямой m_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство локальными вычислениями в подходящей открытой окрестности на $S \times H$. Выберем на S локальные параметры u, v в точке x_0 , т.е. функции, регулярные в некоторой окрестности $U \subset S$ точки x_0 такие, что отображение $\phi: U \rightarrow \mathbf{A}^2$, при котором $x \mapsto (u(x), v(x))$, имеет невырожденный дифференциал $d\phi|_{x_0}$ в точке x_0 . В силу открытости последнего условия можно считать, что $d\phi|_x$ невырожден в каждой точке $x \in U$, т.е. выполнено условие:

(*) для произвольной точки $x \in U$ функции $u - u(x), v - v(x)$ являются локальными параметрами в точке x .

Уменьшив U , если нужно, можем считать также, что выполнено условие:

(**) $\phi^{-1}(0, 0) = x_0$.

Далее, для произвольной точки $(a, b) \in \mathbf{A}^2$ рассмотрим в U кривую

$$C_{a,b} = \{x \in U \mid v(x) - au(x) - b = 0\}.$$

Из условия (*) следует, что если $C_{a,b} \neq \emptyset$, то $C_{a,b}$ – гладкая кривая в U . В частности, $\emptyset \neq C_{0,0}$ – гладкая кривая в U , содержащая точку x_0 . Тем самым, однозначно определена точка $z_0 \in H$ такая, что

$$Z_0 \subset C_{0,0}, \quad \text{Supp } Z_0 = x_0. \quad (37)$$

Пусть $Z \subset U$ – произвольная подсхема длины 2, $\text{Supp } Z = x_1 \cup x_2$. Определим на H рациональную функцию $a: H \dashrightarrow k$ следующим образом:

(i) если точки x_1 и x_2 различны, то полагаем

$$a(z) = \frac{(v(x_1) - v(x_2))}{(u(x_1) - u(x_2))}; \quad (38)$$

(ii) если $x_1 = x_2$, то ввиду условия (*) через точку $\phi(x_1)$ проходит единственная кривая C_{a_1,b_1} такая, что $d\phi(T_{x_1}Z) = T_{\phi(x_1)}C_{a_1,b_1}$ (и в этом случае $b_1 = v(x_1) - a_1 u(x_1)$);

в этом случае полагаем $a(z) = a_1$. Легко проверяется корректность этого определения. Рассмотрим в H открытое подмножество V' , на котором функция a регулярна, и в нем открытое подмножество $V = \{z \in V' \mid Z \subset U\}$. Определим на V наряду с a еще три регулярные функции b, c, d следующим образом:

$$\begin{aligned} b(z) &= v(x_1) - a(z)u(x_1) = v(x_2) - a(z)u(x_2), \\ c(z) &= u(x_1) + u(x_2), \quad d(z) = -u(x_1)u(x_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Из (37), (38), (39) следует, что $z_0 \in V$, причем в силу (*) и (**) система уравнений $a = b = c = d = 0$ имеет в V единственное решение z_0 . Поэтому, уменьшив V подходящим образом, мы можем считать, что

(***) $a - a(z), b - b(z), c - c(z), d - d(z)$ – локальные параметры в каждой точке $z \in V$.

Открытое множество $U \times V$ – подходящая окрестность точки $(x_0, z_0) \in S \times H$, в которой мы будем проводить дальнейшие вычисления. Из (38) и (39) непосредственно получаем уравнения универсального цикла $\Gamma \cap (U \times V)$ в $U \times V$:

$$v(x) - au(x) - b = u^2(x) + cu(x) + d = 0; \quad (40)$$

соответственно, уравнения поверхности $Q \cap V$ и прямой $l_0 \cap V$ в V имеют вид

$$Q \cap V: \quad b = d = 0, \quad l_0 \cap V: \quad b = c = d = 0. \quad (41)$$

Перейдем к локальным формулам раздутий $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ и $\sigma_Q: H' \rightarrow H$. Возьмем произвольную точку $x' \in l_0$. Как известно (см., например, [7, дополнение В.6.10]), в подходящей окрестности $U' \subset \sigma^{-1}(U)$ точки x' можно выбрать локальные параметры u', v' так, что уравнения раздутия $\sigma: U' \rightarrow U$ имеют вид

$$u = u', \quad v = u'v'. \quad (42)$$

Соответственно, в подходящей окрестности $V' \subset \sigma_Q^{-1}(V)$ произвольной точки $z' \in \sigma_Q^{-1}(z_0)$ выберем локальные параметры a', b', c', d' , в которых уравнения раздутия $\sigma_Q: V' \rightarrow V$ имеют вид

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad d = b'd'; \quad (43)$$

соответственно,

$$D_Q \cap V': \quad b' = 0, \quad F \cap V': \quad b' = c' = 0. \quad (44)$$

Кроме того, элементарное вычисление дает

$$m_0 \cap V': \quad b' = c' = d' = 0. \quad (45)$$

Из (40), (42) и (43) находим

$$\Gamma'_1 \cap (U' \times V'): \quad u'v' - a'u' - b' = u'^2 + c'u' + b'd' = 0. \quad (46)$$

Обозначим через q'_1 естественную проекцию $\Gamma'_1 \rightarrow H'$. Из (44) и первого уравнения (46) находим

$$q'^{-1}_1(D_Q) \cap (U' \times V') = \{u' = 0\},$$

так что уравнения пересечения $\Gamma'_1 \cap (U' \times V')$ в $U' \times V'$ получаются подстановкой выражения для b' из первого уравнения (46) во второе и делением последнего на u' :

$$\Gamma'_1 \cap (U' \times V'): \quad b' - u'(v' - a') = u' + c' + d'(v' - a') = 0. \quad (47)$$

Пусть $\text{pr}: U' \times V' \xrightarrow{\text{pr}_1} U' \xrightarrow{\phi} \mathbf{A}^2$ – проекция. Из (47) для произвольной точки $(a', 0, c', d') \in D_Q \cap V'$ находим

$$\gamma'^{-1}(a', 0, c', d') = x'_1 \cup x'_2, \quad \text{pr}(x'_1) = (-c', a'), \quad \text{pr}(x'_2) = (0, a' - c'/d'). \quad (48)$$

Соответственно, (45), (47) и (48) показывают, что для произвольной точки $(a', 0, 0, 0) \in m_0 \cap V'$ находим

$$\text{pr}_1(\gamma'^{-1}(a', 0, 0, 0) \cap (U' \times V')) = \{u' = 0\} = l_0 \cap U'. \quad (49)$$

Аналогичные вычисления проводим в других локальных картах. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Имеет место естественный изоморфизм схем:*

$$F \setminus m_0 \simeq \{z \in \tilde{H} \mid \text{Supp } Z = \{pt\} \in l_0, Z \not\subset l_0\}. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести вычисление в любой из карт. Согласно (44) и (45) всякая точка $z \in (F \setminus m_0) \cap V'$ имеет вид $z = (a', 0, 0, d')$, $d' \neq 0$; отсюда и из (41), (43), (48) и (46) следует, что схема $Z = \gamma'^{-1}(z)$ имеет носитель в точке $x'_1 \in l_0$, где $\text{pr}(x'_1) = (0, a')$, т.е. a' есть аффинная координата на l_0 ; соответственно, d' есть аффинная координата на проективной прямой $P(T_{x'_1}\tilde{S})$ такая, что точка $P(T_{x'_1}l_0)$ имеет координату $d' = 0$, а точка $P(T_{x'_1}Z)$ – координату $-d'$. Поэтому условие $d' \neq 0$ означает, что $F \setminus m_0$ параметризует неприведенные схемы длины 2 в $\tilde{S}$ с носителем на l_0 , не лежащие на l_0 .

Рассмотрим многообразие $R = \text{Hilb}^2 l_0 \simeq S^2 l_0$ (см. замечание 1.1) и его естественное вложение $R \hookrightarrow \tilde{H}$. Так как $l_0 \simeq P(T_{x_0}S) \simeq \mathbf{P}^1$, имеем канонический изоморфизм $R \simeq \mathbf{P}^2$. (Более того, несложное вычисление показывает, что $N_{R/\tilde{H}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1)^{\oplus 2}$.) Далее, из следствия 2.4 и замечания 2.2 вытекает естественный изоморфизм многообразий

$$\tilde{H} \setminus R \xrightarrow{\sim} H' \setminus m_0. \quad (51)$$

Рассмотрим раздутие $\sigma_{m_0}: H'' \rightarrow H'$ с центром в m_0 , и пусть $D_{m_0} = \sigma_{m_0}^{-1}(m_0)$ – исключительный дивизор на H'' , $\Gamma_2 = H'' \times_{H'} \Gamma'$ и $D_2 = \Gamma_2 \times_{H''} D_{m_0}$ – дивизор на Γ_2 . Считая Γ_2 естественно вложенным в $\tilde{S} \times H''$, рассмотрим многообразие $\Gamma'' = \overline{\Gamma_2 \setminus D_2}$ (замыкание берется в $\tilde{S} \times H''$), и пусть $\gamma'': \Gamma'' \rightarrow H''$ – естественная проекция.

ЛЕММА 2.5. *Отображение $\gamma'': \Gamma'' \rightarrow H''$ – конечный плоский морфизм степени 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями из доказательства леммы 2.3. Пусть $V'' \subset \sigma_{m_0}^{-1}(V')$ – локальная карта в H'' с локальными параметрами a'', b'', c'', d'' , в которых раздутие σ_{m_0} задается уравнениями

$$a' = a'', \quad b' = b'', \quad c' = b''c'', \quad d' = b''d''. \quad (52)$$

Из (52) и (47) получаем уравнения $\Gamma_2 \cap (U' \times V'')$ в $U' \times V''$:

$$\Gamma_2 \cap (U' \times V''): \quad b'' - u'(v' - a'') = 0, \quad u' + b''c'' + b''d''(v' - a'') = 0. \quad (53)$$

Отсюда по аналогии с (47) находим уравнения $\Gamma'' \cap (U' \times V'')$ в $U' \times V''$:

$$\Gamma'' \cap (U' \times V''): \quad b'' - u'(v' - a'') = 0, \quad 1 + c''(v' - a'') + d''(v' - a'') = 0. \quad (54)$$

Отсюда сразу следует, что слой проекции $\gamma'': \Gamma'' \cap (U' \times V'')$ над произвольной точкой дивизора $D_{m_0} \cap V'' = \{b'' = 0\}$ состоит из двух точек (не обязательно различных). Таким образом, γ'' – конечный морфизм степени 2. Так как каждый слой морфизма γ'' имеет постоянную схемную длину 2, то, значит, γ'' – плоский морфизм.

Из леммы 2.5 и универсальности схемы Гильберта $\tilde{H}$ теперь немедленно следует, что определен морфизм $\delta: H'' \rightarrow \tilde{H}$ такой, что $\Gamma'' = (\text{id}_{\tilde{S}} \times \delta)^{-1}(\tilde{\Gamma})$, где $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{S} \times \tilde{H}$ – универсальный цикл над $\tilde{H}$. При этом из (51) следует, что $\delta: H'' \setminus D_{m_0} \rightarrow \tilde{H} \setminus R$ – изоморфизм. Тем самым, ввиду гладкости и неприводимости многообразий R и D_{m_0} имеем

$$D_{m_0} = \delta^{-1}(R). \quad (55)$$

Пусть $\text{pr}_{\tilde{H}}: \hat{H} \rightarrow \tilde{H}$ – раздутие с центром в R как гладкой подсхеме (следствие 1.4) и $D_R := \text{pr}_{\tilde{H}}^{-1}(R)$. Так как D_{m_0} – дивизор на гладком многообразии H'' , то из универсального свойства раздутий [2, гл. 2, 7.14] следует, что определен морфизм (регулярный бирациональный) $\psi: H'' \rightarrow \Gamma_f$ такой, что $\delta = \text{pr}_{\tilde{H}} \circ f$, причем

- (i) $\psi^{-1}(D_R) = D_{m_0}$,
- (ii) $\psi: H'' \setminus D_{m_0} \rightarrow \Gamma_f \setminus D_R$ – изоморфизм.

Нетрудно видеть, что ψ – изоморфизм. В самом деле, в противном случае ввиду гладкости Γ_f и известного свойства бирациональных морфизмов (см., например, [8, гл. 2, § 4, теорема 2]) существует непустое замкнутое неприводимое подмножество Z коразмерности ≥ 2 в Γ_f такое, что $D = \psi^{-1}(Z)$ – дивизор в H'' ; при этом в силу (ii) $Z \subset D_R$, а значит, $D \subset \psi^{-1}(D_R)$; тем самым, $\psi^{-1}(D_R)$ содержит кроме D еще по крайней мере одну компоненту $\overline{\psi^{-1}(D_R \setminus Z)}$ (замыкание в H'') вопреки условию (i), поскольку D_{m_0} неприводим. Итак, ψ – изоморфизм, т.е. можно считать, что $H'' = \Gamma_f$ и δ совпадает с $\text{pr}_{\tilde{H}}$, и мы получаем следующий основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ – раздутие с центром в точке $x_0 \in S$ и $l_0 = \sigma^{-1}(x_0)$. Пусть $d = 2$, $\sigma_Q: H' \rightarrow H$ – раздутие схемы Гильберта $H = \text{Hilb}^2 S$ с центром в гладкой поверхности $Q = \{z \in H \mid Z \ni x_0\}$, $l_0 \hookrightarrow \tilde{S} \simeq Q$ – вложение исключительной прямой в Q , $F = \sigma_Q^{-1}(l_0)$ – линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_3$ и $m_0 \subset F$ – исключительная прямая на F . Тогда определен морфизм $\sigma_{m_0}: \Gamma_f \rightarrow H'$, являющийся раздутием с гладким центром m_0 , такой, что проекция $\text{pr}_H: \Gamma_f \rightarrow H$ разлагается в композицию раздутий σ_{m_0} и σ_Q с гладкими центрами:

$$\text{pr}_H = \sigma_Q \circ \sigma_{m_0}. \quad (56)$$

3. Общий случай длины $d \geq 3$. В общем случае $d \geq 3$ цикл инциденции R в $\tilde{H}$, рассматриваемый как неприводимое многообразие с приведенной структурой $R = R_{\text{red}}$, уже не является неособым и нетрудно видеть, что его особенности имеют вид:

$$Y := \text{Sing } R_{\text{red}} = \{z \in \tilde{H} \mid \text{length}(Z \cap l_0) \geq 3\}.$$

Тем самым, в общей точке $z \in Y$ многообразие R_{red} локально аналитически изоморфно $Y \times T$, где T – объединение трех координатных осей в $\mathbf{A}^3$ (с приведенной структурой). Поэтому, как показывает простое вычисление, результат раздутия $\tilde{H}$ с центром в R_{red} является особым многообразием. Далее, рассмотрим в $\mathbf{A}^3$ координатные плоскости $V_1 = \{x = 0\}$, $V_2 = \{y = 0\}$, $V_3 = \{z = 0\}$ и их объединение $V = \{xyz = 0\}$, и пусть

$$g = (\text{res}_{V_1}, \text{res}_{V_2}, \text{res}_{V_3}): \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_{V_1} \oplus \mathcal{O}_{V_2} \oplus \mathcal{O}_{V_3}$$

– естественный морфизм. Нетрудно видеть, что в окрестности общей точки $z \in Y$ пучок F из (28) локально аналитически изоморфен пучку $\mathcal{O}_Y \boxtimes \mathcal{F}_0$, где $\mathcal{F}_0 := \text{Coker}(g)$. С другой стороны, из определения $\mathcal{F}_0$ легко получаем, что (при подходящей нормировке компонент res_{V_i} морфизма g) пучок $\mathcal{F}_0$ изоморфен коядру морфизма $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^3}^{\oplus 3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}^3}^{\oplus 2}$, задаваемого (2×3) -матрицей

$$M = (m_{ij}), \quad \text{где } m_{11} = x, m_{12} = y, m_{13} = -2z, m_{21} = -2x, m_{22} = y, m_{23} = z.$$

Тем самым, элементарным вычислением получаем, что пучок идеалов Фиттинга $\text{Fitt}^0(\mathcal{F}_0)$ локально изоморфен пучку идеалов объединения координатных осей в $\mathbf{A}^3$ (т.е. имеет образующие xy, xz, yz); ввиду вышесказанного, это равносильно тому, что пучок идеалов Фиттинга $\mathbf{J} = \text{Fitt}^0 F$ локально аналитически в окрестности общей точки $z \in Y$ изоморфен пучку идеалов приведенной схемы R_{red} . Тем самым, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. *При $d \geq 3$ Γ_f является особым многообразием.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fogarty J. Algebraic families on an algebraic surface, II: The Picard scheme of the punctual Hilbert scheme // Amer. J. Math. 1973. V. 95. P. 660–687.
- [2] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1984.
- [3] Тихомиров А.С. Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 153–180.
- [4] Мамфорд Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968.
- [5] Тихомиров С.А. Пунктуальные схемы Гильберта малой длины в размерностях 2 и 3 // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 3. С. 414–432.
- [6] Тихомиров А.С. Гладкая модель пунктуальных схем Гильберта поверхности // Тр. МИАН. 1995. Т. 208. С. 318–334.
- [7] Фултон У. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
- [8] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988.