Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О сингулярных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 616–620

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1872>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 05:31:30

О СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Коньков

Рассматриваются решения уравнений порядка $m \geq 1$ вида

$$w^m = Q(r, w, \dots, w^{(m-1)}), \quad (1)$$

где Q – функция из класса Каратеодори $K_{\text{loc}}([a, +\infty) \times \mathbb{R}^m)$, $a > 0$, [1, с. 9], удовлетворяющая одному из следующих двух условий:

1) существует $k \in \{0, \dots, m-1\}$ такое, что на множестве $\{(r, t_0, \dots, t_{m-1}) : a \leq r, (-1)^i t_i \geq 0, i = 0, \dots, m-1\}$ выполнено неравенство

$$(-1)^m Q(r, t_0, \dots, t_{m-1}) \geq p(r)g(|t_k|), \quad (2)$$

2) существуют $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $\delta \in (0, +\infty)$ такие, что на множестве $\{(r, t_0, \dots, t_{m-1}) : a \leq r, t_{m-i} \geq (\delta/(i-1)!)r^{i-1}, i = 1, \dots, m\}$ выполнено неравенство

$$Q(r, t_0, \dots, t_{m-1}) \geq r^{m-k-1}p(r)g\left(\frac{t_k}{r^{m-k-1}}\right), \quad (3)$$

где в обоих случаях $p \in L_{\text{loc}}([a, +\infty))$, $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – измеримая функция, причем

$$p(r) \geq 0 \quad \text{при } r \geq a, \quad g(t) \geq g(\tau) > 0 \quad \text{при } t \geq \tau > 0. \quad (4)$$

Будем предполагать, что решения уравнения (1) удовлетворяют одному из условий:

$$(-1)^i w^{(i)}(r) \geq 0 \quad \text{при } r \geq a, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (5)$$

– так называемые кнезеровские решения, либо

$$w^{(m-i)}(a) \geq \frac{\delta}{(i-1)!}a^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Пусть

$$\int_0^1 (g(t))^{-1/(m-k)} t^{1/(m-k)-1} dt < +\infty, \quad (7)$$

определим функцию G_0 равенством

$$G_0(s) = \int_0^s (g(t))^{-1/(m-k)} t^{1/(m-k)-1} dt.$$

Аналогично, если

$$\int_1^\infty (g(t))^{-1/(m-k)} t^{1/(m-k)-1} dt < +\infty, \quad (8)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-0100653.

положим

$$G_{\infty}(s) = \int_s^{\infty} (g(t))^{-1/(m-k)} t^{1/(m-k)-1} dt.$$

Через G_0^{-1} , G_{∞}^{-1} обозначим функции, обратные соответственно к G_0 и G_{∞} .

Пусть $0 < \varepsilon$, $1 < \delta$. Под $\Lambda(\sigma, \varepsilon, [a, +\infty))$ ниже подразумевается класс множеств $E \subset [a, +\infty)$ таких, что $\forall r \geq a \text{ mes}([r, \sigma r] \setminus E) \leq \varepsilon(\sigma - 1)r$. Обозначим также

$$p_{\sigma}(r) = \operatorname{ess\,inf}_{r/\sigma \leq \xi \leq \sigma r} p(\xi).$$

Нас будет интересовать следующий вопрос: при каких условиях на функции p и g всякое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5) (условию (6)), является сингулярным решением первого (второго) рода [1, с. 262]? В частности, будут получены обобщения некоторых известных в случае дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера результатов [1], [2].

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что имеют место соотношения (2), (4), (7), и пусть h – измеримая, неотрицательная, монотонно убывающая функция такая, что $G_0(t/r^k)h(r) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ равномерно по r из некоторой окрестности $+\infty$. Тогда если для некоторых вещественных чисел $\tau > 0$, $\nu > 0$, $\sigma > 1$ найдутся неограниченно возрастающие последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что*

$$\sigma x_i \leq y_i, \quad (9)$$

и $\operatorname{mes}\{\xi \in [x_i, y_i] : (\xi h(\xi))^{m-k} p(\xi) \geq \tau\} \geq \nu(y_i - x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, то всякое ненулевое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5), является неколеблющимся сингулярным решением первого рода.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнены соотношения (3), (4), (8), и пусть для некоторых вещественных чисел $\tau > 0$, $\nu > 0$, $\sigma > 1$ найдутся неограниченно возрастающие последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что имеет место (9), и $\operatorname{mes}\{\xi \in [x_i, y_i] : \xi^{m-k} p(\xi) \geq \tau\} \geq \nu(y_i - x_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда всякое непродолжаемое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (6), является неколеблющимся сингулярным решением второго рода.*

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что имеют место соотношения (2), (4), (7), (соотношения (3), (4), (8)), и пусть найдутся вещественные числа $\varepsilon > 0$, $\sigma > 1$ такие, что $\forall E \in \Lambda(\sigma, \varepsilon, [a, +\infty))$*

$$\int_E r^{m-k-1} p(r) dr = +\infty,$$

тогда всякое ненулевое (всякое непродолжаемое) решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5) (условию (6)), является неколеблющимся сингулярным решением первого (второго) рода.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены соотношения (2), (4), (7), и пусть найдутся вещественные числа $\varepsilon > 0$, $\sigma > 1$ такие, что $\forall c > 0 \quad \forall E \in \Lambda(\sigma, \varepsilon, [a, +\infty))$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^k G_0^{-1} \left(c \left(\int_{E \cap [r, +\infty)} \xi^{m-k-1} p(\xi) d\xi \right)^{1/(m-k)} \right) > 0,$$

тогда всякое ненулевое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5), является неколеблущимся сингулярным решением первого рода.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq k \leq m-1$, выполнены соотношения (2), (4), (7), и пусть найдутся вещественные числа $\varepsilon > 0$, $\sigma > 1$ такие, что $\forall c > 0 \quad \forall E \in \Lambda(\sigma, \varepsilon, [a, +\infty))$

$$\int_a^\infty dr r^{k-1} G_0^{-1} \left(c \left(\int_{E \cap [r, +\infty)} \xi^{m-k-1} p(\xi) d\xi \right)^{1/(m-k)} \right) = +\infty,$$

тогда всякое ненулевое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5), является неколеблущимся сингулярным решением первого рода.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < \sigma$, имеют место соотношения (2), (4), (7) (соотношения (3), (4), (8)) и

$$\int_a^\infty r^{m-k-1} p_\sigma(r) dr = +\infty, \quad (10)$$

тогда всякое ненулевое (всякое непродолжаемое) решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5) (условию (6)), является неколеблущимся сингулярным решением первого (второго) рода.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 < \sigma$, $1 \leq k \leq m-1$, выполнены соотношения (2), (4), (7) и $\forall c > 0$

$$\int_a^\infty dr r^{k-1} G_0^{-1} \left(c \left(\int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{1/(m-k)} \right) = +\infty, \quad (11)$$

тогда всякое ненулевое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5), является неколеблущимся сингулярным решением первого рода.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1 < \sigma$, имеют место соотношения (2), (4), (7) (соотношения (3), (4), (8)) и

$$\forall c > 0 \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^k G_0^{-1} \left(cr (p_\sigma(r))^{1/(m-k)} \right) > 0 \quad (12)$$

$$\left(\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{m-k} p_\sigma(r) > 0 \right), \quad (13)$$

тогда всякое ненулевое (всякое непродолжаемое) решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5) (условию (6)), является неколеблущимся сингулярным решением первого (второго) рода.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $1 < \sigma$, $0 < \lambda < 1$, $p \in L_{\text{loc}}([a, +\infty))$ – неотрицательная функция такая, что выполнено (10), тогда всякое ненулевое решение уравнения

$$w^{(m)} = (-1)^m p(r) |w^{(k)}|^\lambda \text{sign } w, \quad r > a > 0, \quad (14)$$

удовлетворяющее условию

$$(-1)^i w^{(i)}(r) w(r) \geq 0 \quad \text{при } r \geq a, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (15)$$

является неколеблущимся сингулярным решением первого рода.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $1 < \sigma$, $1 < \lambda$, $p \in L_{\text{loc}}([a, +\infty))$ – неотрицательная функция такая, что

$$\int_a^\infty r^{\lambda(m-k-1)} p_\sigma(r) dr = +\infty, \quad (16)$$

тогда всякое непродолжаемое решение уравнения

$$w^{(m)} = p(r) |w^{(k)}|^\lambda \text{sign } w, \quad r > a > 0, \quad (17)$$

удовлетворяющее условию

$$w^{(i)}(a) w(a) > 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (18)$$

является неколеблущимся сингулярным решением второго рода.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $1 < \sigma$, $0 < \lambda < 1$, $1 \leq k \leq m-1$, $p \in L_{\text{loc}}([a, +\infty))$ – неотрицательная функция такая, что

$$\int_a^\infty dr r^{k-1} \left(\int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{1/(1-\lambda)} = +\infty, \quad (19)$$

тогда всякое ненулевое решение уравнения (14), удовлетворяющее условию (15), является неколеблущимся сингулярным решением первого рода.

В случае $g(t) = t^\lambda$ при $0 < \lambda < 1$ из следствия 3 получаем теорему 4 работы [2] (см. также [1, с. 331], соответственно при $1 < \lambda$ – теорему 17.5 из [1, с. 331]). Из следствия 4 в случае, когда p монотонно возрастает, $m = 2$, $k = 0$, получаем теорему 17.4 из [1, с. 330].

ЗАМЕЧАНИЕ. Если p монотонно не возрастает, то в силу неравенства $p_\sigma(r) \geq p(\sigma r)$ следствия 1–6 остаются справедливыми, если в соотношениях (10)–(13), (16), (19) p_σ заменить на p .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 < \sigma$, имеют место соотношения (2), (4), (7) (соотношения (3), (4), (8)), тогда для всякого правильного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (5) (условию (6)), найдется вещественное число $a^* \geq a$ такое, что $\forall r \geq a^*$

$$\begin{aligned} (-1)^k w^{(k)}(r) &\geq A G_0^{-1} \left(B \left(\int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{1/(m-k)} \right) \\ \left(w^{(k)}(r) \leq A r^{m-k-1} G_\infty^{-1} \left(B \left(\int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{1/(m-k)} \right) \right), \end{aligned}$$

где постоянные $A > 0$, $B > 0$ зависят только от m, σ .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $1 < \sigma$, справедливы соотношения (2), (4), (10) (соотношения (3), (4), (10)) и одновременно с этим не справедливо соотношение (7) (соотношение (8)). Тогда для всякого правильного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (5) (условию (6)) найдется вещественное число $a^* \geq a$ такое, что $\forall r \geq a^*$

$$(-1)^k w^{(k)}(r) \leq A H_0^{-1} \left(B \left(\int_a^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{1/(m-k)} \right) \\ \left(w^{(k)}(r) \geq A r^{m-k-1} H_\infty^{-1} \left(B \left(\int_a^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{1/(m-k)} \right) \right),$$

где

$$H_0(s) = \int_s^1 (g(t))^{-1/(m-k)} t^{1/(m-k)-1} dt, \\ H_\infty(s) = \int_1^s (g(t))^{-1/(m-k)} t^{1/(m-k)-1} dt,$$

H_0^{-1}, H_∞^{-1} — функции, обратные соответственно к H_0, H_∞ , постоянные $A > 0, B > 0$ зависят только от m, σ .

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
15.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
2. Кигурадзе И. Т. // Докл. РАН. 1968. Т. 181. № 5. С. 1054–1057.