Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Смаилов, О коэффициентах кратных рядов
Фурье по периодическим мультипликативным си-
стемам Прайса, *Матем. заметки*, 1996, том 60,
выпуск 4, 620–624

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1873>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:11:17

О КОЭФФИЦИЕНТАХ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПЕРИОДИЧЕСКИМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ ПРАЙСА

Е. С. Смаилов

В данной работе приведены результаты относительно коэффициентов Фурье–Прайса – теоремы типа Харди–Литтлвуда–Пэли и исследована их зависимость от свойства ограниченности образующей последовательности системы Прайса.

Периодические мультипликативные системы Прайса являются достаточно общим классом ортонормальных систем [1], обзор основных результатов по мультипликативным системам на нуль-мерных группах можно найти в [1], [2].

Пусть $\{\varphi_{\nu_i}^{(i)}(x_i)\}_{\nu_i=0}^{+\infty}$, $x_i \in G_i$, $i = 1, \dots, n$, – периодические мультипликативные системы Прайса [1], с образующими последовательностями натуральных чисел $\{p_{\nu_i}^{(i)}\}$, $i = 1, \dots, n$. Считаем, что

$$p_0^{(i)} = 1, \quad p_{\nu_i}^{(i)} \geq 2 \quad \forall \nu_i \in \mathbb{N};$$

$$m_{-1}^{(i)} = 0, \quad m_0^{(i)} = 1, \quad m_{N_i}^{(i)} = \prod_{\nu_i=1}^{N_i} p_{\nu_i}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $\overline{N} = \{N_1, \dots, N_n\}$, $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$;

$$A_{\overline{N}} = \{\overline{k} = (k_1, \dots, k_n) \mid m_{N_i}^{(i)} \leq k_i < m_{N_i+1}^{(i)}, k_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Если $\mathbb{Z}_n^+ = \{\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \mid \nu_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, \dots, n\}$, то

$$\mathbb{Z}_n^+ = \bigcup_{N_1=-1}^{\infty} \dots \bigcup_{N_n=-1}^{\infty} A_{\overline{N}},$$

$$|A_{\overline{N}}| = \prod_{i=1}^n (m_{N_i+1}^{(i)} - m_{N_i}^{(i)}) = \prod_{i=1}^n m_{N_i}^{(i)} (p_{N_i+1}^{(i)} - 1).$$

Перейдем к изложению основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi = \{\prod_{i=1}^n \varphi_{\nu_i}^{(i)}(x_i)\}$ – произведение мультипликативных систем Прайса.

1°. Пусть $2 \leq p < +\infty$ и задана таблица чисел $a = \{a_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_n^+}$ такая, что

$$D(a)_p = \sum_{\overline{\nu} \in \mathbb{Z}_n^+} \prod_{i=1}^n (m_{\nu_i+1}^{(i)})^{p/2-1} \left(\sum_{\overline{k} \in A_{\overline{\nu}}} |a_{\overline{k}}|^2 \right)^{p/2}$$

сходится, тогда существует функция $f(x) \in L_p(G^n)$, для которой $\{a_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_n^+}$ является таблицей ее коэффициентов Фурье–Прайса, и при этом

$$\|f\|_{L_p(G^n)} \leq B_p \{|a_0, \dots, a_0|^p + D_p(a)\}^{1/p},$$

где $B_p > 0$ не зависит от таблицы a , $G^n = G_1 \times \dots \times G_n$.

2°. Если $1 < p \leq 2$ и $f(x) \in L_p(G^n)$, тогда для таблицы $a = \{a_{\overline{k}}\}$ ее коэффициентов Фурье–Прайса имеет место неравенство

$$B_p^{-1} \{|a_0, \dots, a_0|^p + D_p(a)\}^{1/p} \leq \|f\|_{L_p(G^n)}.$$

3°. Если система $\Phi = \{\prod_{i=1}^n \varphi_{\nu_i}^{(i)}(x_i)\}$ – произведение мультипликативных систем Прайса с ограниченными образующими последовательностями, то в утверждениях 1° и 2° в выражении $D(a)_p$ сомножитель $\prod_{i=1}^n (m_{\nu_i+1}^{(i)})^{p/2-1}$ можно заменить на $\prod_{i=1}^n (m_{\nu_i}^{(i)})^{p/2-1}$.

Данная теорема является утверждением типа Харди–Литтлвуда–Пэли. Пункты 1° и 2° в настоящей форме для кратных тригонометрических рядов Фурье были впервые установлены В. Н. Темляковым [3]. Доказательство ведется по схеме Харди–Литтлвуда–Пэли [3].

Нам понадобится следующее утверждение, которое доказывается аналогично лемме 3.1' из [3].

ЛЕММА. Пусть $1 \leq p < r \leq +\infty$, $\Phi = \{\prod_{i=1}^n \varphi_{\nu_i}^{(i)}(x_i)\}$ – произведение мультипликативных систем Прайса. Тогда $\forall \bar{M} = (M_1, \dots, M_n)$, $M_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, и заданной таблицы чисел $\{a_{\bar{\nu}}\}_{\bar{\nu} \in \mathbb{Z}_n^+}$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\nu_1=-1}^{M_1} \cdots \sum_{\nu_n=-1}^{M_n} \left(\sum_{\bar{k} \in A_{\bar{\nu}}} a_{\bar{k}} \prod_{i=1}^n \varphi_{k_i}^{(i)}(\cdot) \right) \right\|_{L_p(G^n)} \geq C_{pr} \left\{ \sum_{\nu_1=-1}^{M_1} \cdots \sum_{\nu_n=-1}^{M_n} \prod_{i=1}^n (m_{\nu_i+1}^{(i)})^{p/r-1} \left\| \sum_{\bar{k} \in A_{\bar{\nu}}} a_{\bar{k}} \prod_{i=1}^n \varphi_{k_i}^{(i)}(\cdot) \right\|_{L_r(G^n)}^p \right\}^{1/p},$$

где $C_{pr} > 0$ не зависит от $\bar{M}$ и $\{a_{\bar{k}}\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в произведении Φ неограничена образующая последовательность хотя бы одной системы $\{\varphi_{\nu_{i_0}}^{(i_0)}(x_{i_0})\}_{\nu_{i_0}=0}^{+\infty}$. Тогда в теореме 1 сомножитель $\prod_{i=1}^n (m_{\nu_i+1}^{(i)})^{p/2-1}$ из выражения $D(a)_p$ заменить на $\prod_{i=1}^n (m_{\nu_i}^{(i)})^{p/2-1}$, без нарушения справедливости утверждений пунктов 1° и 2°, нельзя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть двумерный случай. Пусть система $\{\varphi_{\nu_1}^{(1)}(x_1)\}_{\nu_1=0}^{+\infty}$ имеет ограниченную образующую последовательность $\{p_{\nu_1}^{(1)}\}_{\nu_1=0}^{+\infty}$, а для системы $\{\varphi_{\nu_2}^{(2)}(x_2)\}_{\nu_2=0}^{+\infty}$ образующая последовательность $\{p_{\nu_2}^{(2)}\}_{\nu_2=0}^{+\infty}$ неограничена, т.е. $\sup_{\nu} p_{\nu}^{(2)} = +\infty$.

Пусть $2 < p < +\infty$. Тогда существует подпоследовательность натуральных чисел $\{r_j\}_{j=1}^{+\infty}$ такая, что $(p_{r_j+1}^{(2)})^{p/2-1} \geq 2^j \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Положим

$$f_0(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} (m_{r_j}^{(1)} m_{r_j+1}^{(2)})^{1/p-1} \sum_{\bar{k} \in A_{\bar{r}_j}} \varphi_{k_1}^{(1)}(x_1) \varphi_{k_2}^{(2)}(x_2),$$

где $A_{\bar{r}_j} = \{(k_1, k_2) \mid m_{r_j}^{(i)} \leq k_i < m_{r_j+1}^{(i)}, i = 1, 2\}$. Согласно определению множеств $A_{\bar{\nu}}$ и условию теоремы можно утверждать, что

$$|A_{\bar{r}_j}| \leq C_1 m_{r_j}^{(1)} m_{r_j+1}^{(2)} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Определение чисел $m_{r_j}^{(i)}$ и условия для $p_{\nu_i}^{(i)}$, $i = 1, 2$, и неравенство $p > 2$ позволяют установить, что $f_0(x_1, x_2) \in L_2(G^2)$. Если обозначить через $\{b_{k_1, k_2}(f_0)\}$ коэффициенты Фурье–Прайса этой функции, то нетрудно видеть, что ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \sum_{\nu_2=0}^{+\infty} (m_{\nu_1}^{(1)} m_{\nu_2}^{(2)})^{p/2-1} \left(\sum_{k_1=m_{\nu_1}^{(1)}}^{m_{\nu_1+1}^{(1)}-1} \sum_{k_2=m_{\nu_2}^{(2)}}^{m_{\nu_2+1}^{(2)}-1} |b_{k_1, k_2}(f_0)|^2 \right)^{p/2} \\ & \leq C_p \sum_{j=1}^{+\infty} (m_{r_j}^{(2)})^{p/2-1} (m_{r_j+1}^{(2)})^{-p/2+1} = C_p \sum_{j=1}^{+\infty} (p_{r_j+1}^{(2)})^{-p/2+1} \\ & \leq C_p \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} < +\infty \end{aligned}$$

сходится.

Теперь рассмотрим

$$S_N(f_0; x_1, x_2) = \sum_{j=1}^N (m_{r_j}^{(1)} m_{r_{j+1}}^{(2)})^{1/p-1} \sum_{\bar{k} \in A_{\bar{r}_j}} \varphi_{k_1}^{(1)}(x_1) \varphi_{k_2}^{(2)}(x_2).$$

Пусть $p < q < +\infty$. Тогда согласно лемме и соотношению

$$\left\| \sum_{\bar{k} \in A_{\bar{r}}} \prod_{i=1}^2 \varphi_{k_i}^{(i)}(\cdot) \right\|_{L_q(G^2)} \asymp \prod_{i=1}^2 (m_{\nu_i+1}^{(i)})^{1-1/q}$$

имеем

$$\begin{aligned} \|S_N(f_0)\|_{L_p(G^2)}^p &\geq C_{pq}^p \sum_{j=1}^N (m_{r_j+1}^{(1)} m_{r_{j+1}}^{(2)})^{p/q-1} \\ &\quad \times (m_{r_j}^{(1)} m_{r_{j+1}}^{(2)})^{1-p} (m_{r_{j+1}}^{(1)} m_{r_j}^{(2)})^{p-p/q} \geq \overline{C}_{pq}^p \sum_{j=1}^N 1, \end{aligned}$$

так как по условию теоремы $m_{r_j}^{(1)} \asymp m_{r_{j+1}}^{(1)}$.

Отсюда следует, что $f_0(x_1, x_2) \notin L_p(G^2)$.

В случае $1 < p < 2$ контрпример строится по аналогичному принципу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия теоремы 1 не улучшаемы в том смысле, что существуют последовательность $\{a_k\}$ в пункте 1° и функция $f_0(x)$ в пункте 2°, для которых условия, а вследствие этого, и утверждения теоремы при данном “ p ” не выполняются. В то же время, $\forall r: 2 < r < p$ в пункте 1°, $1 < r < p < 2$ в пункте 2° – утверждения теоремы выполнены.

Достаточно рассмотреть одномерный случай. Пусть $1 < p < +\infty$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} m_{\nu+1}^{1/p-1} \sum_{k=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} \varphi_k(x), \quad (2)$$

где $x \in G$. Положим $a_k = m_{\nu+1}^{1/p-1} \quad \forall k \in [m_\nu, m_{\nu+1}-1] \cap \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть сначала $2 < p < +\infty$. Тогда $\forall r \in (2, p)$ имеем

$$D(a)_r \leq C_r \sum_{\nu=1}^{+\infty} m_{\nu+1}^{r/p-1} < +\infty.$$

Тогда согласно теореме 1 $\exists f_0(x) \in L_r(G)$, для которой ряд (2) является рядом Фурье–Прайса, но

$$D(a)_p \geq C_p \left\{ \sum_{\nu=1}^N m_{\nu+1}^{p/2-1} m_{\nu+1}^{p(1/p-1)} m_{\nu+1}^{p/2} \right\}^{1/p} = C_p N^{1/p} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

т.е. $D(a)_p = +\infty$. Поэтому $f_0(x) \notin L_p(G)$. В самом деле, для частной суммы $S_{m_{N+1}}(f_0, x)$ ряда (2) с помощью леммы, как и в теореме 2, устанавливается неравенство

$$\|S_{m_{N+1}}(\cdot)\|_{L_p(G)} \geq C_p N^{1/p} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $f_0(x) \notin L_p(G)$, хотя, как было показано, $\forall r \in (2, p)$ $f_0(x) \in L_r(G)$.

Пусть теперь $1 < p < 2$. Тогда $\forall r \in (1, p)$ ряд (2) определяет функцию $f_0(x) \in L_r(G)$ и согласно пункту 2° теоремы 1 $D(a)_r < +\infty$. По лемме

$$\begin{aligned} & \|S_{m_{N+1}}(\cdot)\|_{L_p(G)} \\ & \geq C_p \left\{ \sum_{\nu=1}^N m_{\nu+1}^{p/2-1} \left\| m_{\nu+1}^{1/p-1} \sum_{k=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} \varphi_k(\cdot) \right\|_{L_2(G)}^p \right\}^{1/p} \geq C'_p N^{1/p} \quad \forall N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Это означает, что $f_0(x) \notin L_p(G)$. Поэтому $D_p(a) = +\infty$. В самом деле,

$$D(a)_p \geq C_p \left\{ \sum_{\nu=1}^N m_{\nu+1}^{p/2-1} m_{\nu+1}^{p(1/p-1)} \left(\sum_{k=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} 1 \right)^{p/2} \right\}^{1/p} = C_p N^{1/p} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

т.е. $D(a)_p = +\infty$. В то же время, как уже известно, $\forall r \in (1, p)$: $D_r(a) < +\infty$, что и требовалось доказать.

Карагандинский государственный университет
им. Е. А. Букетова

Поступило
15.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: ЭЛМ, 1984. 2. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. Теория применения. М.: Наука, 1987. 3. Темляков В. Н. Приближение функции с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178.