Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Темирбулатов, Спектральная задача для P_n -приближения уравнения переноса, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 627–630

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1875>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:37:43

Образует векторы $U(x) = (\varphi_0, \varphi_2, \dots, \varphi_{2k-2})$ и $J(x) = (\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_{2k-1})$ размерности k . Система (3), (4) запишется в следующем виде

$$\begin{cases} \lambda W_1 U + W_3 \frac{\partial J}{\partial x} + W_5 U = 0, \\ \lambda W_2 J + W_4 \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} W_6 U(0) - J(0) = 0, \\ W_6 U(1) + J(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

с матричными коэффициентами

$$W_1 = \text{Diag}\{1, 5, \dots, 4k-3\}, \quad W_2 = \text{Diag}\{3, 7, \dots, 4k-1\},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 3 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 2k-4 & 2k-3 & \\ & & & 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}, \quad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 3 & 4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2k-3 & 2k-2 \\ & & & & 2k-1 \end{bmatrix},$$

(здесь невыписанные элементы – нули), $W_5 = \text{Diag}\{-c, 0, \dots, 0\}$,

$$W_6 = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{02} & \dots & a_{0,2k-2} \\ a_{10} & a_{12} & \dots & a_{1,2k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,2k-2} \end{bmatrix}.$$

Из уравнений (5), (6) можно исключить вектор $J(x)$. При этом получим спектральную задачу, уже квадратично зависящую от параметра λ . Именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Спектр задачи, соответствующей P_n -приближению уравнения переноса, совпадает со спектром самосопряженного квадратичного операторного пучка*

$$\begin{aligned} L_n(\lambda) &= A_n \lambda^2 + B_n \lambda + C_n \\ &= \begin{bmatrix} F & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} G & & \\ & E & \\ & & E \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} D \frac{d^2}{dx^2} & & \\ & D & \\ & & -D \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

действующего в пространстве $H = L_2^k(0, 1) \times \mathbb{C}^{2k}$, состоящего из элементов $\bar{y} = (y(x), a, b)$ с нормой $\|\bar{y}\|_H^2 = \int_0^1 |y|^2 dx + |a|^2 + |b|^2$. Здесь матрицы $F = W_1$, $D = -W_3 W_2^{-1} W_4$, $E = -W_3 W_6$, $G = W_5 = \text{Diag}\{-c, 0, \dots, 0\}$, а оператор C_n определен на области $D(C_n) = \{\bar{y} \mid \bar{y} = \{y(x), y'(0), y'(1)\}, y(x) \in [W_2^2(0, 1)]^k\}$.

После приведения задачи к квадратическому пучку удается доказать теорему о локализации спектра.

Напомним, что вещественное $\text{CЗ } \mu$ называется собственным значением положительного (отрицательного) типа самосопряженного пучка $L(\lambda)$, если $\forall y \in \text{Ker } L(\mu)$ выполняется условие $(L'(\mu)y, y) > 0$ ($(L'(\mu)y, y) < 0$).

ТЕОРЕМА 2. *Спектр задачи дискретен, расположен в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq c/2$ и на отрезке $[c/2, c]$, где лежит конечное число вещественных СЗ положительного типа.*

Приведем схему доказательства. Непосредственными вычислениями с использованием рекуррентной формулы для полиномов Лежандра и формулы для $\int_0^1 p_i(\mu)p_{2m+1}(\mu) d\mu$ из [3, с. 42] нетрудно показать следующие свойства коэффициентов пучка $\mathbf{L}_n(\lambda)$:

- 1) матрицы F, D, E, G симметричные вещественные, а $-D, E, F$ положительно определенные и их максимальные СЗ стремятся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$;
- 2) операторы $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n$ – самосопряженные ограниченные и $\mathbf{A}_n > 0, \mathbf{B}_n \geq -c$;
- 3) оператор $\mathbf{C}_n \geq 0$, самосопряжен и $(\mathbf{C}_n + \delta I)^{-1}$ компактен при любом $\delta > 0$.

Так как $\mathbf{C}_n$ – самосопряженный оператор с дискретным спектром, а $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n$ – ограниченные операторы, то из теоремы о голоморфной оператор-функции [4] можно заключить, что спектр $\mathbf{L}_n(\lambda)$ дискретен (см. [5]).

Пусть $(\lambda, \bar{y})$ собственная пара и $\lambda = t + i\tau$. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_n(\lambda)\bar{y}, \bar{y}) &= \lambda^2(\mathbf{A}_n\bar{y}, \bar{y}) + \lambda(\mathbf{B}_n\bar{y}, \bar{y}) + (\mathbf{C}_n\bar{y}, \bar{y}) \\ &= (t^2 - \tau^2)(\mathbf{A}_n\bar{y}, \bar{y}) + t(\mathbf{B}_n\bar{y}, \bar{y}) + (\mathbf{C}_n\bar{y}, \bar{y}) \\ &\quad + i[\tau(\mathbf{B}_n\bar{y}, \bar{y}) + 2t\tau(\mathbf{A}_n\bar{y}, \bar{y})] = 0. \\ \operatorname{Im}(\mathbf{L}_n(\lambda)\bar{y}, \bar{y}) &= \tau[-c\|y_0\|^2 + (Ey(0), y(0)) + (Ey(1), y(1)) \\ &\quad + 2t(\|y_0\|^2 + 5\|y_1\|^2 + (4k-3)\|y_{k-1}\|^2)] = 0. \end{aligned}$$

Поэтому, если $t > c/2$, то с учетом свойства $E > 0$ имеем $\tau = 0$. Кроме того, легко видеть $L'_n(\lambda) > 0$ при $\lambda > c/2$ и $L_n(\lambda) > 0$ при $\lambda > c$.

2. Сходимость СЗ и СФ в правой открытой полуплоскости. Метод сферических гармоник по сути является проекционным методом. Подход с этой точки зрения позволяет доказать сходимость СЗ в правой открытой полуплоскости и соответствующих им СФ к СЗ и СФ задачи (1), (2). Распределение спектра задачи (1), (2) исследовалась в работе [6]. Было показано, что спектр задачи состоит из замкнутой левой полуплоскости, образующей непрерывный спектр, и конечного числа положительных вещественных СЗ.

Приведем задачу (1), (2) к эквивалентной спектральной задаче для квадратического пучка. Любая функция единственным образом представляется в виде суммы четных и нечетных частей. Пусть $\varphi(\mu) = \varphi_+(\mu) + \varphi_-(\mu)$, где $\varphi_+(-\mu) = \varphi_+(\mu)$, $\varphi_-(-\mu) = -\varphi_-(\mu)$.

Разрешим систему (1), (2) относительно $\varphi_+(\mu, x)$ и заметим, что задача (1), (2) не может иметь решением нечетную функцию по переменной μ . Следовательно, верно

ТЕОРЕМА 3. *Спектр задачи (1), (2) совпадает со спектром самосопряженного квадратичного операторного пучка*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\lambda) &= \mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C} \\ &= \begin{bmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} -c \int_0^1 d\mu & & \\ & \mu & \\ & & \mu \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & & \\ & -\mu^2 & \\ & & \mu^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

действующего в пространстве $H = L_2([0, 1] \times [0, 1]) \times L_2^2[0, 1]$, состоящего из элементов $\bar{z} = (z_1(x, \mu), z_2(\mu), z_3(\mu))$ с нормой

$$\|\bar{z}\|_H^2 = \int_0^1 dx \int_0^1 |z_1(x, \mu)|^2 d\mu + \int_0^1 |z_2(\mu)|^2 d\mu + \int_0^1 |z_3(\mu)|^2 d\mu.$$

Оператор $\mathbf{C}$ определен на области $D(\mathbf{C}) = \{\bar{z} \mid \bar{z} = \{z(x, \mu), z'(0, \mu), z'(1, \mu)\}, z(x) \in [W_2^2(0, 1)]\}$.

Пучок $\mathbf{L}_n(\lambda)$ является приближением проекционным методом для пучка $\mathbf{L}(\lambda)$ при подходящем выборе проекторов. Пусть P_n – проектор на линейную оболочку четных полиномов Лежандра $\{p_i(\mu), \mu \in [0, 1]\}$ степени $< n$. Тогда

$$P_n u(\mu) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4i+1}{2} v_i p_{2i}(\mu).$$

Учитывая рекуррентную формулу для полиномов Лежандра легко убедиться, что $P_n \mathbf{L}(\lambda) P_n \bar{z} = \mathbf{L}_n(\lambda) \bar{y}_n$. В дальнейшем вместо пучков неограниченных операторов удобно рассмотреть пучки с ограниченными операторными коэффициентами (см. [5], [7]) $\mathbf{T}_n(\lambda) = \mathbf{L}_n(\lambda)(\mathbf{C}_n + I)^{-1}$ и $\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{L}(\lambda)(\mathbf{C} + I)^{-1}$. С учетом свойств операторов A_n, B_n, C_n из теоремы 2, получаем, что операторы $A_n(\mathbf{C}_n + I)^{-1}, B_n(\mathbf{C}_n + I)^{-1}, (\mathbf{C}_n + I)^{-1}$ компактны.

Из результатов работы [8] следует

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\sigma(\mathbf{T})$ – множество точек спектра пучка $\mathbf{T}(\lambda)$, $\mathbb{C}^+ = \{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) для каждого $\lambda \in \sigma(\mathbf{T}) \cap \mathbb{C}^+$ существует последовательность $\{\lambda_n\} \in \sigma(\mathbf{T}_n)$, что $\lambda_n \rightarrow \lambda, n \rightarrow \infty$;
- 2) если $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{C}^+, \lambda_n \in \sigma(\mathbf{T}_n), (n \in N' \subset \mathbb{N})$, то $\lambda \in \sigma(\mathbf{T})$;
- 3) если $\bar{y}_n \in H_n, \|\bar{y}_n\| = 1, \mathbf{T}_n(\lambda_n) \bar{y}_n = 0, \lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{C}^+,$ то для $\forall N' \subset \mathbb{N}, \exists N'' \subset N', \exists \bar{z} \in H$, что $\|\bar{y}_n - P_n \bar{z}\| \rightarrow 0, n \in N'',$ и для ее пределов $\bar{z} \in H$ верно $\|\bar{z}\| = 1, \mathbf{T}(\lambda) \bar{z} = 0$.

Автор благодарит проф. А. А. Шкаликова за внимание к работе и полезные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24.06.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961.
2. Султангазин У. М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979.
3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
5. Шкаликов А. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. Т. 14. С. 140–224.
6. Lechner J., Wing G. M. // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. № 2. P. 217–234.
7. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986.
8. Вайникко Г. М., Карма О. О. // ЖВМиМФ. 1974. Т. 14. № 6. С. 1393–1408.