Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нгуен Мань Хунг, Задача Неймана для нестационарных систем в цилиндрических областях, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 631–634

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1876>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 08:33:00

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Нгуен Мань Хунг

Рассматривается следующая система:

$$(-1)^{m-1} \left[\sum_{|p|, |q|=1}^m D^p (a_{pq}(x, t) D^q u) + \sum_{|p|=1}^m a_p(x, t) D^p u + a(x, t) u \right] - u_{tt} = f, \quad (1)$$

где $(-1)^{|p|+|q|} \bar{a}_{pq} = a_{qp}$, a_p, a – ограниченные измеримые комплексные матрицы размера $r \times r$ в цилиндре $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in [0, T]\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей. Случай бесконечно гладкой границы и коэффициентов класса C^∞ , не зависящих от t , разрешимость задачи Неймана для системы (1) изучались в работе Г. Фикера [1]. Для эллиптической системы в работах [2], [3] В. Г. Мазья рассмотрел такую же задачу. В работе [4] О. А. Ладыевской установлено существование и единственность обобщенного решения гиперболического уравнения второго порядка.

Будем использовать следующие обозначения: α – мультииндекс $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum \alpha_i$, $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$.

$H_m(\Omega)$ – гильбертово пространство комплексных r -мерных вектор-функций, имеющих обобщенные производные до порядка m включительно в Ω такие, что

$$\|u\|_{m, \Omega}^2 = \sum_{0 \leq |p| \leq m} \int_{\Omega} |D^p u|^2 dx < +\infty.$$

$H_{m,1,Q_T}(Q_T)$ – гильбертово пространство комплексных r -мерных вектор-функций таких, что $u \in L_2(Q_T)$ и существуют обобщенные производные u_t , $D^p u$, $0 \leq |p| \leq m$, из $L_2(Q_T)$ с нормой

$$\|u\|_{m,1,Q_T}^2 = \sum_{0 \leq |p| \leq m} \int_{Q_T} |D^p u|^2 dx dt + \int_{Q_T} |u_t|^2 dx dt < +\infty.$$

Предположим, что для всех $u \in H_m(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\sum_{|p|=|q|=m} \int_{\Omega} a_{pq} D^q u \overline{D^p u} dx \geq \mu \|D^m u\|_{0,\Omega}^2, \quad (\mu = \text{const} > 0). \quad (2)$$

1. Существование и единственность обобщенного решения. Обозначим

$$Lu \equiv \sum_{|p|, |q|=1}^m D^p (a_{pq}(x, t) D^q u) + \sum_{|p|=1}^m a_p(x, t) D^p u + a(x, t) u,$$

где a_{pq}, a_p, a описаны выше.

Рассмотрим следующую систему:

$$(-1)^{m-1}Lu - u_{tt} = f \quad (3)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = g_0, \quad u_t|_{t=0} = g_1, \quad (4)$$

Обобщенное решение $u(x, t)$ задачи Неймана для системы (3), удовлетворяющей (4), определяется как элемент $H_{m,1}(Q_T)$, равный $g_0(x)$ при $t = 0$, удовлетворяющее тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[u_t \bar{\eta}_t + \sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{m-1+|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p \eta} + (-1)^{m-1} \sum_{|p|=1}^m a_p D^p u \bar{\eta} \right] dx dt \\ + (-1)^{m-1} \int_{Q_T} a u \bar{\eta} dx dt + \int_{\Omega} g_1(x) \overline{\eta(x, 0)} dx = \int_{Q_T} f \bar{\eta} dx dt \quad (5) \end{aligned}$$

при любой $\eta \in H_{m,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$.

Для $u, v \in H_{m,1}(Q_T)$ обозначим

$$B(u, v)(t) = \int_{\Omega} \left[\sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p v} + \sum_{|p|=1}^m 2a_p D^p u \bar{v} + a u \bar{v} \right] dx.$$

ЛЕММА 1.1. Пусть выполнены следующие условия:

- (i) $\sup_{\{Q_T, 1 \leq |p|, |q| \leq m\}} \left| \frac{\partial a_{pq}}{\partial t}, \frac{\partial a_p}{\partial t}, \frac{\partial a}{\partial t} \right| \leq \gamma_0 \quad (\gamma_0 = \text{const} > 0);$
- (ii) $(-1)^m \text{Re } B(v, v)(t) \geq \gamma_1 \|v(x, t)\|_{m, \Omega}^2 \quad (\gamma_1 = \text{const} > 0)$

для любой $v \in H_{m,1}(Q_T)$. Тогда задача Неймана для системы (3) с условиями (4) может иметь не более одного обобщенного решения из $H_{m,1}(Q_T)$.

ЛЕММА 1.2. Пусть коэффициенты системы (3) удовлетворяют предположениям леммы 1.1. Тогда задача Неймана для системы (3) с условиями (4) имеет обобщенное решение $u(x, t) \in H_{m,1}(Q_T)$, если $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, $g_0(x) \in H_m(\Omega)$, $g_1(x) \in L_2(\Omega)$. Кроме того, справедливо следующее неравенство

$$\|u\|_{m,1,Q_T}^2 \leq C (\|g_0\|_{m,\Omega}^2 + \|g_1\|_{0,\Omega}^2 + \|f\|_{L_2(Q_T)}^2), \quad (6)$$

где $C = \text{const} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы основано на методе Галеркина.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть коэффициенты системы (3), помимо (2), удовлетворяют условиям

$$\sup_{\{Q_T, 1 \leq |p|, |q| \leq m\}} \left| \frac{\partial a_{pq}}{\partial t}, \frac{\partial a_p}{\partial t}, \frac{\partial a}{\partial t} \right| \leq \gamma, \quad (\gamma = \text{const} > 0).$$

Предположим, что $f \in H_{1,1}(Q_T)$ и $g_0 \equiv g_1 \equiv 0$. Тогда задача Неймана для системы (3) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из $H_{m,1}(Q_T)$, которое удовлетворяет условию (4) и неравенству (6).

2. Гладкость обобщенных решений по временной переменной. Через $\overset{\circ}{H}_{2m}(\Omega)$ обозначим подпространство $H_{2m}(\Omega)$, плотным множеством в котором являются бесконечно дифференцируемые комплексные r -мерные вектор-функции с компактным носителем в Ω .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $f_{tk} \in L_2(Q_T)$ ($k \leq h$); $f_{tk}(x, 0) = 0$ в Ω ($k \leq h-1$), $g_0, g_1 \in \overset{\circ}{H}_{2m}(\Omega)$, кроме того, выполнены следующие условия:

- (i) $\sup_{\{Q_T, 0 \leq |p|, |q| \leq m\}} \left| \frac{\partial^{k+|p|} a_{pq}}{\partial t^k \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \right| < \mu$ ($\mu = \text{const} > 0$, $k \leq h+1$);
- (ii) $(-1)^m \text{Re } B(v, v)(t) \geq \gamma \|v(x, t)\|_{m, \Omega}^2$ ($\gamma = \text{const} > 0$)

для любой $v \in H_{m,1}(Q_T)$. Тогда обобщенное решение задачи Неймана для системы (3), удовлетворяющее (4), имеет обобщенные производные по t до порядка h включительно из $H_{m,1}(Q_T)$ и справедливо неравенство

$$\|u_{th}\|_{m,1,Q_T}^2 \leq C \left(\|g_0\|_{2m,\Omega}^2 + \|g_1\|_{2m,\Omega}^2 + \sum_{k=0}^h \|f_{tk}\|_{L_2(Q_T)}^2 \right), \quad (7)$$

где $C = \text{const} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение может быть получено индукцией по h с использованием предыдущих лемм.

ТЕОРЕМА 2.2. Если коэффициенты системы (3), помимо (2), удовлетворяют условию (i) теоремы 2.1, кроме того, $f_{tk} \in L_2(Q_T)$ ($k \leq h$), $f_{tk}(x, 0) = 0$ в Ω ($k \leq h-1$), $g_0 \equiv g_1 \equiv 0$, то обобщенное решение задачи (1), (3), (4) имеет производные по t до порядка h включительно из $H_{m,1}(Q_T)$ и справедливо неравенство

$$\|u_{th}\|_{m,1,Q_T}^2 \leq C \sum_{s=0}^h \|f_{ts}\|_{L_2(Q_T)}^2,$$

где $C = \text{const} > 0$.

3. Задача Неймана в линейной теории упругости. Рассмотрим следующую систему:

$$\sum_{j,k,h=1}^n \frac{\partial}{\partial x_h} \left[a_{ih}^{jk}(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (8)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad ut|_{t=0} = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{j,k,h=1}^n a_{ih}^{jk} \cos(\nu, x_k) \Big|_{S_T = \partial\Omega} = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10)$$

где ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂S_T , a_{ik}^{jh} — непрерывные действительные функции, удовлетворяющие условиям: $a_{ih}^{jk} \equiv a_{jk}^{ih} \equiv a_{hi}^{kj} \equiv a_{kj}^{hi}$ в Q_T .

Предполагается, что упругий потенциал системы (8) является положительно-определенной квадратичной формой. Тогда из второго неравенства Корна следует

$$\sum_{i,h,j,k=1}^n \int_{\Omega} a_{ih}^{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} dx \geq C_2 \|u\|_{1,\Omega}^2 - \lambda_0 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u = (u_1, \dots, u_n).$$

Таким образом, мы приходим к теореме существования и единственности, а также к теореме гладкости обобщенного решения задачи (8)–(10). Частным случаем системы (8) является нестационарная система Ламе.

В заключение автор выражает благодарность профессору В. А. Кондратьеву за постановку задачу и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27.06.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
2. Мазья В. Г. // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астроном. 1972. № 1. С. 26–33.
3. Мазья В. Г. // Сиб. матем. ж. 1968. Т. 9. № 6. С. 1322–1350.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Мир, 1973.