Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Эминян, Об одной бинарной задаче, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 634–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1877>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 09:57:33

ОБ ОДНОЙ БИНАРНОЙ ЗАДАЧЕ

К.М. Эминян

Рассмотрим двоичное разложение натурального числа n :

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i 2^i,$$

где $\varepsilon_k = 0, 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Пусть

$$\mathbb{N}_0 = \left\{ n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}, \quad \mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0.$$

Обозначим

$$\chi(n, m; a) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv a \pmod{a}, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv a \pmod{a}. \end{cases}$$

А. О. Гельфонд доказал (см. [1]) теорему о том, что

$$\sum_{n \leq X, n \in \mathbb{N}_0} \chi(n, m; a) = \frac{X}{2m} + O(X^\lambda),$$

где $\lambda = \log 3/2 \log 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант N FV000.

В статье [2] получена асимптотическая формула со степенным понижением в проблеме делителей для случая, когда суммирование распространяется на так называемые “позиционные последовательности $(\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_1)$ натуральных чисел.

В этой статье рассматривается другой тип задачи, связанный с “позиционными последовательностями”.

Обозначим через $F_{i,j}(X)$ число решений уравнения $n - m = 1$, $n, m \leq X$, $n \in \mathbb{N}_i$, $m \in \mathbb{N}_j$, $i, j = 0, 1$.

ТЕОРЕМА. *Справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned} F_{0,0}(X) &= \frac{X}{6} + O(\log X), & F_{1,1}(X) &= \frac{X}{6} + O(\log X), \\ F_{1,0}(X) &= \frac{X}{3} + O(\log X), & F_{0,1}(X) &= \frac{X}{3} + O(\log X). \end{aligned}$$

Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Справедлива формула*

$$S_0(X) = \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) \varepsilon(n+1) = -\frac{X}{3} + O(\log X),$$

где

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$S_r(X) = \sum_{k \leq (X-2^r+1)/2^r} \varepsilon(k) \varepsilon(k+1).$$

Перепишем $S_r(X)$ таким образом:

$$\begin{aligned} S_r(X) &= \sum_{k=2n \leq (X-2^r+1)/2^r} \varepsilon(k) \varepsilon(k+1) + \sum_{k=2n+1 \leq (X-2^r+1)/2^r} \varepsilon(k) \varepsilon(k+1) \\ &= \sum_{n \leq (X-2^r+1)/2^{r+1}} \varepsilon(2n) \varepsilon(2n+1) + \sum_{n \leq (X-2^r+1+1)/2^{r+1}} \varepsilon(2n+1) \varepsilon(2(n+1)) \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Заметим, что $\varepsilon(n) = \varepsilon(2n)$ и $\varepsilon(2n+1) = -\varepsilon(n)$. Действительно, пусть

$$n = \sum_{i=0}^{N(n)} \varepsilon_i 2^i;$$

тогда

$$2n = \sum_{i=0}^{N(n)} \varepsilon_i 2^{i+1}$$

и, следовательно, количество единиц в двоичном разложении чисел n и $2n$ одинаковы. В силу определения функции $\varepsilon(n)$ это означает, что $\varepsilon(n) = \varepsilon(2n)$. А для числа $2n + 1$ имеем представление

$$1 + \sum_{i=0}^{N(n)} \varepsilon_i 2^{i+1},$$

т.е. количество разрядов в двоичном разложении числа $2n + 1$ на единицу больше, чем у числа n , поэтому $\varepsilon(2n + 1) = -\varepsilon(n)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n \leq (X - 2^r + 1)/2^{r+1}} \varepsilon(n) \varepsilon(2n + 1) = - \left[\frac{X - 2^r + 1}{2^{r+1}} \right], \\ B &= \sum_{n \leq (X - 2^{r+1} + 1)/2^{r+1}} \varepsilon(2n + 1) \varepsilon(2(n + 1)) \\ &= - \sum_{n \leq (X - 2^{r+1} + 1)/2^{r+1}} \varepsilon(n) \varepsilon(n + 1) = -S_{r+1}(X). \end{aligned}$$

Получаем следующую рекуррентную формулу:

$$S_r(X) = - \left[\frac{X - (2^r - 1)}{2^{r+1}} \right] - S_{r+1}(X).$$

Умножаем обе части последней формулы на $(-1)^r$ и, суммируя по r , получаем

$$\sum_{r=0}^N (-1)^r S_r(X) = \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} \left[\frac{X - (2^r - 1)}{2^{r+1}} \right] + \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} S_{r+1}(X),$$

где $N = [\log_2((X + 1)/2)]$. Следовательно,

$$S_0(X) = \sum_{r=0}^N (-1)^{r+1} \left[\frac{X - (2^r - 1)}{2^{r+1}} \right] + O(1).$$

Поэтому

$$\sum_{n \leq X} \varepsilon(n) \varepsilon(n + 1) = S_0(X) = -\frac{X}{3} + O(\log X),$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Ввиду определения $\varepsilon(n)$ имеем

$$F_{0,0}(X) = \sum_{\substack{n, m \leq X \\ n-m=1}} \frac{1 + \varepsilon(n)}{2} \frac{1 + \varepsilon(m)}{2}$$

или

$$F_{0,0}(X) = \frac{1}{4}F(X) + \frac{1}{4}G_1(X) + \frac{1}{4}G_2(X) + \frac{1}{4}G_3(X),$$

где $F(X)$ – число решений уравнения $n - m = 1$, $m, n \leq X$ (ясно, что $F(X) = X + O(1)$), и

$$\begin{aligned} G_1(X) &= \sum_{\substack{n, m \leq X \\ n-m=1}} \varepsilon(n) = \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) \sum_{\substack{m \leq X \\ n-m=1}} 1, \\ G_2(X) &= \sum_{\substack{n, m \leq X \\ n-m=1}} \varepsilon(m) = \sum_{m \leq X} \varepsilon(m) \sum_{\substack{n \leq X \\ n-m=1}} 1, \\ G_3(X) &= \sum_{\substack{n, m \leq X \\ n-m=1}} \varepsilon(n)\varepsilon(m) = \sum_{n \leq X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+1). \end{aligned}$$

По лемме $S_0(X) = G_3(X)$.

Заметим, что при фиксированном n или m уравнение $n - m = 1$, $n, m \leq X$, может иметь одно решение, поэтому

$$G_1(X) = \sum_{n < X} \varepsilon(n) + O(1), \quad G_2(X) = \sum_{m < X} \varepsilon(m) + O(1),$$

но

$$\begin{aligned} \sum_{n < X} \varepsilon(n) &= \sum_{n=2t < X} \varepsilon(n) + \sum_{n=2t+1 < X} \varepsilon(n) \\ &= \sum_{t < X/2} \varepsilon(2t) + \sum_{t < (X-1)/2} \varepsilon(2t+1) = \sum_{t < X/2} \varepsilon(t) - \sum_{t < (X-1)/2} \varepsilon(t) = O(1). \end{aligned}$$

Аналогичным образом $G_2(X) = O(1)$. Поэтому

$$F_{0,0}(X) = \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}S_0(X) + O(1) = \frac{1}{4}X - \frac{X}{3} \cdot \frac{1}{4} + O(\log X) = \frac{X}{6} + O(\log X).$$

Соответственно

$$\begin{aligned} F_{1,1}(X) &= \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}S_0(X) + O(1), \\ F_{1,0}(X) &= \frac{1}{4}X - \frac{1}{4}S_0(X) + O(1), \quad F_{0,1}(X) = \frac{1}{4}X - \frac{1}{4}S_0(X) + O(1). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы теорема полностью доказана.

Поступило
21.07.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfond A. O. // Acta Arith. 1968. V. 13. P. 259–265. 2. Эминян К. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 3. С. 680–686.