Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Балаганский, Антипроксиминальные множества в пространствах непрерывных функций, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 643–657

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1878>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 04:23:11

АНТИПРОКСИМИНАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В. С. Балаганский

Подмножество A банахова пространства X называется *антипроксиминальным*, если для любой точки $x \in X \setminus A$ в множестве A нет ближайшей точки.

Настоящая работа посвящена построению антипроксиминальных замкнутых выпуклых ограниченных тел в пространствах непрерывных функций и в других, близких к ним, пространствах. Впервые такое множество было обнаружено М. Эдельштейном и А. Томпсоном [1] в пространстве c_0 . С. Кобзаш (см. [2]–[5]) дал примеры антипроксиминальных замкнутых, абсолютно выпуклых ограниченных тел в c и некоторых других пространствах. В. П. Фонф [6] построил антипроксиминальные замкнутые, абсолютно ограниченные выпуклые тела в довольно широком классе пространств непрерывных функций (включающем $C(Q)$, где Q – n -мерный куб, канторово совершенное множество, метрический бикомпакт, содержащий гильбертов кирпич). В данной работе (см. следствие 1) построены антипроксиминальные замкнутые, выпуклые ограниченные тела во всех бесконечномерных пространствах $C(Q)$, где Q – топологическое пространство.

В работе применяются следующие обозначения: X – вещественное банахово пространство; X^* – пространство, сопряженное к X , $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ – семейство непустых замкнутых множеств пространства X ; для $x, y \in X$, $M \in \mathcal{F}$, $r > 0$ полагаем $xy = \|x - y\|$, $xM = d(x, M) = \inf\{xy : y \in M\}$;

$V(x, r) = \{z \in X : xz \leq r\}$, $\dot{V}(x, r) = \{z \in X : xz < r\}$, $S(x, r) = \{z \in X : xz = r\}$, $S = S(0, 1) = \{z \in X : \|z\| = 1\}$; $S^* = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$, $V^*(f, r) = \{g \in X^* : \|f - g\| \leq r\}$, $V^* = V^*(0, 1) = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$; $\overline{M}$ – замыкание множества M ; $\text{int } M$ – множество внутренних точек M , $\text{int}_Y M$ – множество точек M , внутренних относительно Y (для M , принадлежащего подпространству $Y \subset X$), $\text{conv } M$ – выпуклая оболочка множества M , $\overline{\text{conv}} M$ – замкнутая выпуклая оболочка множества M ; $\Sigma(M) = \{f \in X^* : \exists x \in M f(x) = \sup\{f(z) : z \in M\}\}$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–00196.

$X^\# = \Sigma(V(0, 1)) = \Sigma(S)$, для подпространства $Y \subset X$ определим аннулятор $Y^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \ \forall y \in Y\}$. Для $A \subset X^*$ обозначаем $A_\pi = \{x \in X : \sup\{g(x) : g \in A\} \leq 1\}$ (поляра множества A), $A_\pi^\pi = \{f \in X^* : \sup\{f(x) : x \in A_\pi\} \leq 1\}$ (биполяра множества A).

Пусть Q – произвольное множество, через $B(Q)$ обозначается пространство определенных на Q ограниченных функций. Пространство $C(Q)$ определено для топологического пространства Q и состоит из всех определенных на Q ограниченных непрерывных функций. Нормой для обоих пространств служит

$$\|f\| = \sup_{t \in Q} |f(t)|.$$

Для $y \in C(Q)$ обозначим $\text{crit } y = \{t \in Q : |y(t)| = \|y\|\}$. Для $\mu \in C^*(Q)$ обозначим $S(\mu) = \{t \in Q : |\mu|(G) > 0 \text{ для любого открытого } G \ni t\}$, $S^+(\mu) = S(\mu^+)$, $S^-(\mu) = S(\mu^-)$, где $\mu^+ - \mu^- = \mu$, $\mu^+ + \mu^- = |\mu| = \text{var } \mu$.

ЛЕММА 1 [1]. Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathcal{F}(X)$ выпукло, $A \neq X$. Тогда антипроксиминальность множества A эквивалентна условию $\Sigma(A) \cap \Sigma(S) = \{0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [1] множество A предполагается ограниченным, что, очевидно, не по существу.

ТЕОРЕМА А (см., например, [7, с. 38, 40]). Пусть Q – бикомпакт, тогда для $X = C(Q)$ справедливо $X^\# = \{\mu \in X^* : S^+(\mu) \cap S^-(\mu) = \emptyset\}$.

ТЕОРЕМА Б [8, с. 300, теорема 20]. Пусть замкнутая подалгебра $\mathcal{U}$ вещественной алгебры $B(T)$ содержит единицу. Тогда существует такой бикомпакт Q , что вещественная алгебра $\mathcal{U}$ изометрически изоморфна $C(Q)$.

Следующая топологическая лемма, по-видимому, известна. Ради полноты приводим доказательство.

ЛЕММА 2. Пусть Q – бесконечный бикомпакт. Существуют счетные множества $A, B \subset Q$ такие, что $A \cap B = \emptyset$, $(\overline{A \cap B}) \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в Q есть некоторая сходящаяся последовательность с попарно различными членами, то, взяв в качестве A и B две непересекающиеся подпоследовательности, мы получим требуемое утверждение. Считаем, что Q не содержит сходящихся последовательностей. Возьмем некоторую последовательность t_n из Q такую, что $t_n \neq t_k$ при $n \neq k$. Обозначим $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t_n\}$.

Так как последовательность t_n не содержит сходящихся подпоследовательностей, то, отбрасывая, если необходимо, некоторые элементы последовательности t_n , мы построим последовательность открытых множеств $V_n \subset Q$ такую, что $t_n \in V_n$, $t_k \notin V_n$ при $k > n$. Пусть L – множество предельных точек последовательности A . Из условий $t_n \in V_n$, $t_k \notin V_n$

при $k > n$, следует, что $L \cap A = \emptyset$. В силу бикомпактности Q множество L не пусто и замкнуто.

Докажем, что множество L бесконечно. Допустим противное: L конечно, $L = \bigcup_{i=1}^I \{\tau_i\}$. Найдется замкнутая окрестность W точки τ_1 такая, что $\tau_i \notin W$ при $i \neq 1$. Бикомпакт $A \cap W$ имеет единственную предельную точку τ_1 и представляет собой сходящуюся последовательность, что противоречит предположению, следовательно, L бесконечно.

Поскольку множество L бесконечно, то возьмем любое его счетное (бесконечное) подмножество B . В силу бикомпактности Q найдется предельная точка τ_0 для множества B . Но множество L замкнуто, следовательно, $\tau_0 \in L$. Можно считать, что $\tau_0 \notin B$, в противном случае заменим B на $B \setminus \{\tau_0\}$. Имеем $L \cap A = \emptyset$, $B \subset L$, следовательно, $\tau_0 \notin A$, $B \cap A = \emptyset$ и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q – бесконечный бикомпакт. В пространстве $X = C(Q)$ существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 найдутся множества $T_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_{2n+1}\}$, $T_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_{2n}\}$ и точка τ_0 – такие, что $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $\tau_0 \in (\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) \setminus (T_1 \cup T_2)$. Пусть $\alpha = 1/2$, $\beta = 30$, $\gamma = 10$. Рассмотрим меры:

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta_{\tau_n} - \alpha \delta_{\tau_0}, \quad \nu = \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \delta_{\tau_{2n+1}} - \gamma \delta_{\tau_0}.$$

Нетрудно заметить, что $\|\mu\| = 1 + \alpha = 3/2$. Пусть

$$A_1 = V^*(\mu, 4 - \|\mu\|), \quad A = \text{conv}(A_1 \cup \{\nu\} \cup \{-\nu\}).$$

По теореме Алаоглу замкнутый единичный шар пространства X^* , множество A_1 , а по [8, с. 450, лемма 5] и множество A , – бикомпакты в w^* -топологии пространства X^* . Положим $A(y) = \sup\{f(y) : f \in A\}$, $A_1(y) = \sup\{f(y) : f \in A_1\}$, $y \in X$. Ясно, что $A(y) = \max\{A_1(y), |\nu(y)|\}$. Так как A ограничено, то $0 \in \text{int } A_\pi$, A_π – замкнутое выпуклое тело, ограниченное ввиду $0 \in \text{int } A$. По теореме о биполяре [9, с. 160] $A_\pi^\pi = A$.

Покажем, что A_π антипроксиминально в X .

Следующее равенство очевидно:

$$\begin{aligned} A_1(y) &= \sup\{f(y) : f \in V^*(0, 4 - \|\mu\|)\} + \mu(y) \\ &= \|y\|(3 - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n y(\tau_n) - \alpha y(\tau_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Имеем для $y \in X \setminus \{0\}$

$$4\|y\| \geq A_1(y) \geq \|y\|(2 - 2\alpha) = \|y\| > 0.$$

Пусть $\zeta \in \Sigma(A_\pi) \setminus \{0\}$. В силу леммы 1 нужно показать, что $\zeta \notin \Sigma(S)$. Пусть $y \in A_\pi$, $\zeta(y) = \sup\{\zeta(z) : z \in A_\pi\}$. Тогда $y \in \partial A_\pi$, что равносильно $\sup\{\xi(y) : \xi \in A_\pi^\pi\} = \sup\{\xi(y) : \xi \in A\} = 1$. Можно считать, что $\zeta \in \partial A_\pi^\pi$, что равносильно $\{\zeta(z) : z \in A_\pi\} = 1$. Таким образом, $\zeta(y) = A(y) = 1$. Так как $\zeta \in A_\pi^\pi = A$, то

$$\zeta = \alpha_1 \psi + \beta_1 \nu, \quad (2)$$

где $\psi \in A_1$, $0 \leq \alpha_1$, $\alpha_1 + |\beta_1| = 1$.

Рассмотрим случай $\tau_0 \in \text{crit } y$ ($\|y\| > 0$ ввиду $y \in \partial A_\pi$). Пусть $y(\tau_0) = \rho\|y\|$, где $|\rho| = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} -\rho\nu(y) &= -\rho\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} y(\tau_{2n+1}) + \rho\gamma y(\tau_0) \\ &= -\rho\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} y(\tau_{2n+1}) + \gamma\|y\| \geq \gamma\|y\| - \beta \frac{\|y\|}{6} \\ &= 5\|y\| \geq \|y\|(3 - 2\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n y(\tau_n) + \|y\| \\ &= A_1(y) + \|y\|, \end{aligned}$$

следовательно, $-\rho\nu(y) \geq A_1(y) + \|y\| > \|y\|$, $\rho\nu(y) \leq -\|y\|$. Тогда $A(y) = -\rho\nu(y) > A_1(y) > 0 > \rho\nu(y)$, ввиду (2) $\zeta = -\rho\nu \notin X^\#$.

Рассмотрим случай $\tau_0 \notin \text{crit } y$. Тогда $|y(\tau_0)| < \|y\|$ и существует некоторое число $\varepsilon > 0$ такое, что $|y(\tau_0)| + \varepsilon < \|y\|$.

Если для $|\rho| = 1$ имеем $-\rho\nu(y) > A_1(y)$, то $\rho\nu(y) < 0$, $A(y) = -\rho\nu(y)$ и, следовательно, как и выше, $\zeta = -\rho\nu \notin X^\#$.

Остается возможность $A(y) = A_1(y)$. Так как y — непрерывная функция, то существует открытое множество W такое, что $\tau_0 \in W$ и $|y(t)| + \varepsilon/2 < \|y\|$ для любого $t \in W$.

У нас

$$\begin{aligned} \zeta(y) &= A(y) = A_1(y) = \|y\|(3 - \alpha) + \mu(y) = \psi(y) = (\psi - \mu)(y) + \mu(y), \\ (\psi - \mu)(y) &= \|y\|(3 - \alpha), \quad \|\psi - \mu\| \leq (3 - \alpha), \end{aligned}$$

тогда $(\psi - \mu)(y) = \|\psi - \mu\| \cdot \|y\|$, $S(\psi - \mu) \subset \text{crit } y$, $S(\psi - \mu) \cap W = \emptyset$. Следовательно, для всякого борелевского множества $E \subset W$ справедливо $\psi(E) = \mu(E)$. Если $-\mu(y) < A_1(y)$ и $\mu(y) < A_1(y)$, то аналогично предыдущему $\zeta = \psi$. Тогда для всякого борелевского множества $E \subset W$ $\zeta(E) = \mu(E)$, $\tau_0 \in W \cap S^+(\mu) \cap S^-(\mu) = W \cap S^+(\zeta) \cap S^-(\zeta)$, и по теореме А $\zeta \notin X^\#$.

Остались два случая: 1) $\nu(y) = A_1(y)$, $-\nu(y) < A_1(y)$ и 2) $-\nu(y) = A_1(y)$, $\nu(y) < A_1(y)$.

Рассмотрим случай 1). Тогда в (2) $\beta_1 \geq 0$, а для борелевского множества $E \subset W$ $\zeta(E) = \alpha_1\mu(E) + \beta_1\nu(E)$. Следовательно, $\zeta\{\tau_0\} < 0$, $\zeta\{\tau_{2n}\} > 0$ для бесконечного числа номеров n , $\zeta \notin X^\#$.

Рассмотрим случай 2) $-\nu(y) = A_1(y)$, $\nu(y) < A_1(y)$. Тогда в (2) $\beta_1 \leq 0$, а для $E \subset W$ справедливо

$$\zeta(E) = \alpha_1\mu(E) + \beta_1\nu(E) = \alpha_1\mu(E) - (1 - \alpha_1)\nu(E).$$

У нас $\tau_0 \in \overline{T_1} \cap \overline{T_2}$, следовательно, τ_0 – предельная точка для каждого из двух множеств $D_1 = T_1 \cap W = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\tau_{2n_i+1}\}$ и $D_2 = T_2 \cap W = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\tau_{2m_i}\}$. Имеем

$$\begin{aligned}\zeta\{\tau_0\} &= -\alpha_1\alpha + (1 - \alpha_1)\gamma = \frac{20 - 21\alpha_1}{2}, \\ \zeta\{\tau_{2m_k}\} &= \alpha_1\mu\{\tau_{2m_k}\} = \alpha_1\left(\frac{1}{2}\right)^{2m_k} > 0, \\ \zeta\{\tau_{2n_i+1}\} &= (\alpha_1 - (1 - \alpha_1)\beta)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n_i+1} = (31\alpha_1 - 30)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n_i+1}.\end{aligned}$$

При $\alpha_1 = 0$ имеем $\beta = -1$, $\zeta = -\nu \notin \Sigma(S)$. При любом $\alpha_1 \in (0, 1]$ $\tau_0 \in \overline{D_2} \subset S^+(\zeta)$. Если окажется, что $\alpha_1 < 30/31$, то $\tau_0 \in \overline{D_1} \subset S^-(\zeta)$; при $\alpha_1 > 20/21$ $\tau_0 \in S^-(\zeta)$. Таким образом, при любом $\alpha_1 \in (0, 1]$ имеем $\tau_0 \in S^+(\zeta) \cap S^-(\zeta)$ и по теореме А $\zeta \notin X^\#$.

По лемме 1 A_π – антипроксиминальное множество.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически в теореме 1 доказано, что для $X = C(Q)$ и любого бесконечного множества $B = \overline{B} \subset Q$ существуют точка $\tau_0 \in B$ и выпуклое замкнутое ограниченное множество $M \subset X$, $0 \in \text{int } M$, такие, что для любой меры $\zeta \in \Sigma(M) \setminus \{0\}$ справедливо $\tau_0 \in S^+(\zeta) \cap S^-(\zeta)$ и ζ – атомическая мера в некоторой окрестности точки τ_0 (при этом атомы из окрестности принадлежат B).

Из теорем Б и 1 можно получить много следствий, здесь мы, в целях экономии места, приведем только самые важные.

СЛЕДСТВИЕ 1. В бесконечномерном пространстве $C(Q)$, где Q – произвольное топологическое пространство, существует ограниченное замкнутое выпуклое антипроксиминальное тело.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 1 и Б, так как пространство $C(Q)$ является алгеброй с единицей [8, с. 298].

СЛЕДСТВИЕ 2. В бесконечномерных пространствах $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ и $B(T)$ существуют ограниченные замкнутые выпуклые антипроксиминальные тела.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ следует из теоремы 1, так как $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ изометрически изоморфно (см., например, [8, с. 482, теорема 11] пространству $C(Q)$, где Q – некоторый бикомпакт. Для $B(T)$ доказательство следует из теорем 1 и Б, так как пространство $B(T)$ является алгеброй с единицей [8, с. 298].

СЛЕДСТВИЕ 3. В пространстве $\tilde{C}[0, 2\pi]$ непрерывных 2π -периодических функций существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1, если в качестве Q взять окружность.

СЛЕДСТВИЕ 4. В бесконечномерном (AM) -пространстве с единицей существует ограниченное замкнутое выпуклое антипроксиминальное тело.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1, так как в [10, с. 104, теорема 7.4] доказано, что (AM) -пространство с единицей изометрически изоморфно пространству $C(Q)$, где Q – некоторый бикомпакт.

Через $C^{(n)}[0, 1]$ обозначим пространство функций x , определенных на $[0, 1]$, непрерывных на этом отрезке и имеющих на нем непрерывные производные до n -го порядка включительно, с обычной нормой

$$\|x\| = \max_{0 \leq i \leq n} \max_{t \in [0, 1]} |x^{(i)}(t)|.$$

Нам потребуется пространство $C_1^{(n)}[0, 1]$ функций $x \in C^{(n)}[0, 1]$ с новой нормой, эквивалентной обычной норме,

$$\|x\|_1 = \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq n-1} |x^{(i)}(0)|, \max_{t \in [0, 1]} |x^{(n)}(t)| \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X = C_1^{(n)}[0, 1]$. В пространстве X существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1, так как пространство $C_1^{(n)}[0, 1]$ изометрически изоморфно пространству $C(Q)$, где Q – объединение отрезка $[0, 1]$ и n различных точек $t_1, t_2, \dots, t_n$, не принадлежащих отрезку $[0, 1]$: положим $(\Psi x)(t) = x^{(n)}(t)$ при $t \neq t_i$, $(\Psi x)(t_i) = x^{(i)}(0)$, тогда Ψ – названный изоморфизм.

Рассмотрим также пространство $C_2^{(n)}$ функций $x \in C^{(n)}[0, 1]$ с другой эквивалентной нормой:

$$\|x\|_2 = |x(0)| + |x'(0)| + \dots + |x^{(n-1)}(0)| + \max_{t \in [0, 1]} |x^{(n)}(t)|.$$

Нормы, очень похожие на нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, рассматривались в [11]. Как сообщил Л.П. Власов, норма $\|\cdot\|_1$, в отличие от обычной нормы, позволяет в явном виде вычислить норму в сопряженном пространстве. То же верно для нормы $\|\cdot\|_2$.

ЛЕММА 3. Пусть X – банахово пространство. Для того, чтобы в X существовало ограниченное замкнутое выпуклое антипроксиминальное множество, необходимо, чтобы $X^* \setminus X^\#$ было плотно в X^* (т.е. чтобы $\text{int } X^\# = \emptyset$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получается из известной теоремы Бишопа–Фелпса (см., например, [12]) о том, что $\Sigma(M)$ плотно в X^* для любого ограниченного замкнутого выпуклого $M \subset X$, и леммы 1 и фактически содержится в доказательстве теоремы 2 [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем точку $x \in S$ усиленно достижимой, если существуют функционал $f \in S^*$ с $f(x) = 1$ и константа $c > 0$ такие, что $\|x - y\| \leq cf(x - y)$ для любого $y \in S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если единичная сфера S банахова пространства X содержит усиленно достижимую точку, то в X нет ограниченных замкнутых выпуклых антипроксиминальных множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in S$, $f \in S^*$ с $f(x) = 1$ и константа $c > 0$ такие, что $\|x - y\| \leq cf(x - y)$ для любого $y \in S$. Для любого числа $\varepsilon < 1/c$, любой точки $y \in S$ и любого функционала $g \in S^*$ имеем $f(x - y) \geq \|x - y\|/c > \varepsilon\|y - x\| \geq \varepsilon g(y - x)$, т.е. $(f + \varepsilon g)(x) \geq (f + \varepsilon g)(y)$, $f + \varepsilon g \in X^\#$, $f \in \text{int } X^\#$. По лемме 3 в X нет ограниченных замкнутых выпуклых антипроксиминальных множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространство без выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств, которое строит В.П. Фонф [13] путем эквивалентной перенормировки произвольного банахова пространства, имеет единичную сферу с усиленно достижимой точкой.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть банахово пространство X является l -произведением $\mathbb{R}$ и банахова пространства Y : для $(r, y) \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $y \in Y$, $\|(r, y)\| = |r| + \|y\|$. В X нет ограниченных замкнутых выпуклых антипроксиминальных множеств.

Действительно, $(1, 0)$ является усиленно достижимой точкой для S с функционалом $f = (1, 0)$ и константой $c = 2$.

В качестве примера пространств X , удовлетворяющих условию следствия 5, можно указать пространство $C_2^{(n)}[0, 1]$, пространство $V_{[0, 1]}$ функций с ограниченной вариацией с нормой $\|x\| = |x(0)| + \bigvee_0^1(x)$, пространство Гёльдера $C_\alpha[0, 1]$ функций, удовлетворяющих условию Гёльдера (Липшица) с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$), с нормой

$$\|x\| = |x(0)| + \sup_{t_1, t_2 \in [0, 1]} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

Во всех трех случаях X является l -произведением $\mathbb{R}$ и подпространства $\{x \in X : x(0) = 0\}$.

Следующее утверждение (С. Кобзаш [3]) тоже вытекает из следствия 5. Если (S, Σ, μ) – пространство с мерой, содержащее по крайней мере один атом, то в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ нет ограниченных замкнутых выпуклых антипроксиминальных множеств.

ЛЕММА 4. Пусть X – банахово пространство, $Y \subset X$ – замкнутое подпространство, $M \in \mathcal{F}(Y)$ – выпуклое множество в Y . Тогда

а) если M – тело относительно Y , $0 \in \text{int}_Y M$, то для антипроксиминальности множества M относительно Y достаточно, чтобы $\Sigma(M) \cap \Sigma(S) \subset Y^\perp$;

б) для антипроксиминальности множества M относительно X необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma(M) \cap \Sigma(S) \subset Y^\perp$ и подпространство Y было антипроксиминально относительно X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Допустим, что имеется точка $x \in Y \setminus M$ такая, что $P_M(x) \neq \emptyset$. Пусть $z \in P_M(x)$, тогда $z \in Y$. По теореме Хана–Банаха найдется линейный непрерывный функционал $\mu \in S^*$, разделяющий множество M и шар $V(x, \|x - z\|)$, т.е. такой, что $\mu(z) = \sup\{\mu(y) : y \in M\}$, $\mu(x - z) = \|\mu\| \cdot \|x - z\| > 0$. Получили, что $\mu \in \Sigma(M) \cap \Sigma(S)$, тогда по условию $\mu \in Y^\perp$, $\mu(x) = \mu(z) = 0$, противоречие.

б) **Достаточность.** Имеем $\Sigma(M) \cap \Sigma(S) \subset Y^\perp = \Sigma(Y)$, по лемме 1 $\Sigma(Y) \cap \Sigma(S) = \{0\}$, следовательно,

$$\{0\} \subset \Sigma(M) \cap \Sigma(S) = (\Sigma(M) \cap \Sigma(S)) \cap \Sigma(S) \subset \Sigma(Y) \cap \Sigma(S) = \{0\},$$

по лемме 1 множество M антипроксиминально относительно X .

Необходимость. Если подпространство Y не является антипроксиминальным, то найдется некоторая точка $x \in X \setminus Y$ такая, что $0 \in P_Y(x)$, тогда для любой точки $y \in M \subset Y$ справедливо $y \in P_M(x+y) \subset P_Y(x+y)$, $x+y \notin Y$. По лемме 1 из антипроксиминальности M следует, что $\Sigma(M) \cap \Sigma(S) = \{0\}$, тогда $\Sigma(M) \cap \Sigma(S) \subset Y^\perp$.

ЛЕММА 5. Пусть X – банахово пространство, $Y \subset X$ – замкнутое подпространство, $M \subset X$ замкнуто, выпукло и ограничено, $0 \in \text{int } M$, $N = M \cap Y$. Тогда для любого $f \in \Sigma(N) \setminus Y^\perp$ существует $g \in \Sigma(M)$ с $g|_Y = f|_Y$ (т.е. $g - f \in Y^\perp$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается из теоремы Хана–Банаха: g отделяет M от множества $\{x \in Y : f(x) = \sup\{f(y) : y \in N\}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Носителем $S(A)$ множества $A \subset C(Q)^*$ называется множество $\overline{\cup S(\mu)}$, где объединение берется по всем мерам $\mu \in A$. Через $U(A)$ будем обозначать объединение атомов мер из A (атомами в случае бикомпакта считаются отдельные точки).

ТЕОРЕМА 3. Пусть Q – бесконечный бикомпакт, $Y \subset C(Q)$ – бесконечномерное замкнутое подпространство. Тогда если выполняется одно из условий:

- а) существует бесконечное замкнутое множество $B \subset Q \setminus U(Y^\perp)$;
- б) существует бесконечное замкнутое множество $B \subset Q \setminus S(Y^\perp)$;
- в) для Q' – множества предельных точек бикомпакта Q – справедливо $Q' \setminus S(Y^\perp) \neq \emptyset$;
- г) аннулятор $Y^\perp$ состоит только из безатомных мер;
- д) Q – несчетный метризуемый бикомпакт и аннулятор $Y^\perp$ сепарабелен,

то в Y существует множество M , которое является выпуклым замкнутым ограниченным антипроксимальным телом относительно Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие а). По замечанию 1 найдутся точка $\tau_0 \in B$ и выпуклое замкнутое ограниченное множество $M \subset C(Q)$, $0 \in \text{int } M$, такие, что для любой меры $\zeta \in \Sigma(M) \setminus \{0\}$ справедливо $\tau_0 \in S^+(\zeta) \cap S^-(\zeta)$, при этом мера ζ атомическая в некоторой окрестности точки τ_0 и атомы принадлежат B . Пусть $N = M \cap Y$.

Докажем, что N антипроксимально в Y . Если это не так, то по лемме 4 найдется мера $\lambda \in (\Sigma(N) \cap \Sigma(S)) \setminus Y^\perp$.

По лемме 5 для некоторой меры $\zeta \in \Sigma(M) \setminus \{0\}$ мера $\zeta - \lambda \in Y^\perp$ и, следовательно, не имеет атомов в B . Но тогда $\lambda = \zeta$ на упомянутых выше атомах меры ζ , значит, $\tau_0 \in S(\lambda^+) \cap S(\lambda^-)$, и $\lambda \notin \Sigma(S)$, противоречие. Таким образом, теорема верна при условии а). Чтобы доказать теорему при других условиях, достаточно установить, что в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а), г) $\Rightarrow$ а), д) $\Rightarrow$ а). Импликации б) $\Rightarrow$ а), г) $\Rightarrow$ а) очевидны. в) $\Rightarrow$ б) следует из того, что точка $\tau \in Q' \setminus S(Y^\perp)$ имеет замкнутую окрестность B , причем $B \cap S(Y^\perp) = \emptyset$ и $\text{card } B = \infty$.

д) $\Rightarrow$ а). Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ – плотная в $Y^\perp$ последовательность. Ясно, что для любой меры $\mu \in Y^\perp$ из условия $\mu\{\tau\} \neq 0$ следует, что найдется номер i такой, что $\mu_i\{\tau\} \neq 0$. Для каждого номера i множество точек $\tau \in \mu_i\{\tau\} \neq 0$ не более чем счетно, следовательно, множество $U(Y^\perp)$ не более чем счетно. Q – метризуемый и поэтому сепарабельный бикомпакт. Тогда множество $Q \setminus U(Y^\perp)$ – несчетное сепарабельное метризуемое пространство и его множество предельных точек, как известно, тоже несчетно, следовательно, найдется некоторая последовательность $B \subset Q \setminus U(Y^\perp)$, сходящаяся к точке из B .

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть Q – несчетный метризуемый бикомпакт, $Y \subset C(Q)$ – бесконечномерное замкнутое подпространство, $\text{codim } Y < \infty$. Тогда в Y существует множество M , которое является выпуклым замкнутым ограниченным антипроксимальным телом относительно Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 3, так как выполняется условие д).

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $X = C_1^{(n)}[0, 1]$, $0 \leq m \leq n - 1$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ – некоторый набор чисел, $Y = \{x \in X : x^{(i_k)}(0) = \alpha_{i_k} x^{(0)}(0), k = 1, 2, \dots, m\}$. Тогда в Y существует множество M , которое является выпуклым замкнутым ограниченным антипроксиминальным телом относительно Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из следствия 6, так как $C_1^{(n)}[0, 1]$ изометрически изоморфно $C(Q)$ и выполняется условие д).

Пространство $C_0(T)$ определено для хаусдорфова локально бикompактного пространства T и состоит из непрерывных функций, “стремящихся к нулю на бесконечности” (в том смысле, что множество $\{t \in T : |x(t)| \geq \varepsilon\}$ бикompактно в T для каждого $\varepsilon > 0$). Нормой служит $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$.

В дальнейшем будем использовать обозначение [14]: $C_0(Q \parallel F) = \{x \in C(Q) : x|_F = 0\}$, где F – замкнутое подмножество бикompакта Q .

В силу теоремы П. С. Александрова об одноточенной бикompактификации локально бикompактного хаусдорфова пространства, если $Q \setminus F$ незамкнуто, то можно считать, что $C_0(Q \setminus F) = C_0(Q \parallel F) = C_0(Q_1 \parallel t_0) = C_0(Q_1 \setminus t_0)$, где $Q_1 = (Q \setminus F) \cup \{t_0\}$ – бикompактификация $Q \setminus F$.

В [14, с. 317] описано сопряженное пространство к $C_0(Q \parallel F)$: функционалы $f \in C_0(Q \parallel F)^*$ имеют вид $f(x) = \int x d\mu$, где $\mu \in C(Q)^* : \mu|_F = 0$.

c_0 изометрически изоморфно $C_0(Q \parallel F)$, где $Q = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$, $t_1, \dots, t_n, \dots$ – изолированные точки, $t_n \rightarrow t_0$, $F = \{t_0\}$.

ЛЕММА 6. Пусть Q – бикompакт, $F \subset Q$ – замкнутое множество, тогда для $X = C_0(Q \parallel F)$ справедливо $X^\# = \{\mu \in X^* : S(\mu) \subset Q \setminus F, S^+(\mu) \cap S^-(\mu) = \emptyset\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получить, незначительно меняя доказательство теоремы А, данное в [7].

ТЕОРЕМА 4. Пусть Q_1 – бесконечное хаусдорфова локально бикompактное пространство, $Y = C_0(Q_1)$. В пространстве Y существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Q_1 – бикompакт, то $C_0(Q_1) = C(Q_1)$ и утверждение получается по теореме 1. Считаем, что $Q_1 \cup F = Q$, Q – бикompакт, $Q_1 \cap F = \emptyset$, F однотоечно в Q . Сначала отметим, что для $X = C(Q)$ $Y^\perp = \{\mu \in C^*(Q) : S(\mu) \subset F, U(Y^\perp) \subset F\}$. Возьмем счетное (бесконечное) подмножество $D = \bigcup_{n=1}^\infty \{\tau_n\}$ множества $Q \setminus F$. Если $\overline{D} \cap F = \emptyset$, то справедливость утверждения теоремы следует из теоремы 3, так как выполняется условие а).

Считаем, что существует точка $\tau_0 \in \overline{D} \cap F$. Рассмотрим в Y^* множество $A = V^*(0, 1) + \nu$, где $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^{n+1} \delta_{\tau_n}$. Ясно, что $0 \in \text{int } A$, множество A выпукло, w^* -замкнуто и ограничено, тогда множество A_π есть выпуклое замкнутое ограниченное тело, а по теореме о биполяре $A_\pi^\pi = A$.

Пусть $\mu \in \Sigma(A_\pi) \cap \partial A$ – произвольный элемент, тогда найдется $x \in \partial A_\pi$ такой, что $1 = \mu(x) = \sup\{\mu(z) : z \in A_\pi\}$. Из определений поляры и биполяры имеем $1 = \mu(x) = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in A\}$, тогда $\sup\{\varphi(x) : \varphi \in V^*(0, 1)\} = 1 - \nu(x) = \mu(x) - \nu(x) = (\mu - \nu)(x)$, а так как $\mu - \nu \in V^*(0, 1)$, то $\mu - \nu \in \Sigma(S) \cap S^*$, $\mu \in \Sigma(S) \cap S^* + \nu$. Таким образом, $\mu = \xi_1 + \nu$, где $\xi_1 \in \Sigma(S) \cap S^*$. По лемме 6 найдется замкнутая окрестность W точки τ_0 такая, что $S(\xi_1) \cap W = \emptyset$. Так как $\tau_0 \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n\}}$, то можно считать, что для бесконечного множества номеров n $\tau_n \in W$. Для таких n $\xi_1\{\tau_n\} = 0$, $\mu\{\tau_n\} = (1/2)^{n+1}$, тогда $\tau_0 \in S(\mu) \cap F$. По лемме 6 $\mu \notin \Sigma(S)$. По лемме 1 A_π антипроксимinally.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [1], [2] при построении антипроксиминальных тел в пространстве c_0 используются некоторые сложные преобразования единичного шара сопряженного пространства. Вторая часть доказательства теоремы 4 дает очень простой пример антипроксиминального тела – это поляра сдвинутого единичного шара из сопряженного пространства – в $C_0(T)$, если “бесконечно удаленная точка” является предельной точкой для счетного подмножества T (в частности, в пространстве c_0).

ТЕОРЕМА 5. Пусть Q – метризуемый бикомпакт, $F \subset Q$ замкнуто, $\text{card } Q \setminus F > \aleph_0$, $Y \subset X = C_0(Q \setminus F)$ – замкнутое подпространство, чей аннулятор L в $C_0(Q \setminus F)^*$ сепарабелен. Тогда в Y существует множество M , которое является выпуклым замкнутым ограниченным антипроксиминальным телом относительно Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y^\perp \subset C(Q)^*$ – аннулятор подпространства Y относительно $C(Q)^*$. Повторив доказательство импликации $d) \Rightarrow a)$ из теоремы 3 для $Q \setminus F$ вместо Q и для L вместо $Y^\perp$, найдем последовательность $B \subset Q \setminus F \setminus U(L)$, сходящуюся к точке из B (легко видеть, что доказательство проходит и в случае, когда Q – несчетное сепарабельное метризуемое пространство). Имеем $\overline{B} \cap (F \cup U(L)) = \emptyset$, $Y^\perp = \{\mu \in C^*(Q) : \mu|_{Q \setminus F} \in L\}$, $U(Y^\perp) \subset F \cup U(L)$. Утверждение теоремы следует из теоремы 3, так как выполняется условие а).

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть Q – метризуемый бикомпакт, $F \subset Q$ замкнуто, $\text{card } Q \setminus F > \aleph_0$, $Y \subset C_0(Q \setminus F)$ – замкнутое подпространство, $\text{codim } Y < \infty$. Тогда в Y существует множество M , которое является выпуклым замкнутым ограниченным антипроксиминальным телом относительно Y .

ЗАМЕЧАНИЕ. В теоремах 3, 4 и 5 нельзя просто отбросить условия $\text{card } Q > \aleph_0$ и $\text{card } Q \setminus F > \aleph_0$: так, в пространствах c и c_0 конечномерные подпространства имеют сепарабельные аннуляторы. В теоремах 3

и 4 можно при дополнительном предположении антипроксиминальности Y , используя лемму 4б), получить антипроксиминальность M относительно X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $Y \subset X = c_0$ – замкнутое подпространство, $\text{codim } Y < \infty$. Тогда в Y существует множество M , которое является выпуклым замкнутым ограниченным антипроксиминальным телом относительно Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $Y^\perp = L$, $V_L = \{x \in L : \|x\| \leq 1\}$. Сначала докажем, что существует элемент $f = (f^1, f^2, \dots) \in \ell_1$ такой, что для любого $g = (g^1, g^2, \dots) \in L$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g^n}{f^n} = 0.$$

Докажем существование элемента $z \in \ell_1$ такого, что для любого номера k и для любого элемента $g \in V_L$ выполняется неравенство $|g^k| \leq z^k$. Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ – базис пространства L . Так как L конечномерно, то существует число N такое, что $V_L \subset \text{conv} \bigcup_{i=1}^n \{Nf_i\} \cup \{-Nf_i\}$. Считаем, без потери общности, что $V_L \subset \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^n (\{f_i\} \cup \{-f_i\}) \right)$. Пусть $f^j = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i^j|$. Возьмем элемент z , у которого $z^j = f^j + 1/2^j$. Ясно, что $\|z\| \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\| + 1$, $z \in \ell_1$. Для любого номера k и любого элемента $x \in V_L$ имеем $|g^k| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |f_i^k| = f^k \leq z^k$, $z^k > 0$.

Итак, имеем сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ с положительными членами, тогда (см. [15, с. 906]) существует положительная монотонно возрастающая к ∞ последовательность α_k , что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k < \infty$. Тогда $f = (\alpha_1 z^1, \alpha_2 z^2, \dots, \alpha_k z^k, \dots) \in \ell_1$ удовлетворяет требуемому условию.

Считаем, без потери общности, что $0 < \|f\| < 1$. Рассмотрим множество $A = V^*(0, 1) + f$. Ясно, что $0 \in \text{int } A$, множество A выпукло, w^* -замкнуто и ограничено, тогда поляр $M = A_\pi$ есть выпуклое замкнутое ограниченное тело, $0 \in \text{int } M$. По теореме о биполяре $A_\pi^\pi = A$.

Так же, как в теореме 4, доказываем, что $\Sigma(A_\pi) \cap \partial A \subset \Sigma(S) \cap S^* + f$.

Пусть $N = M \cap Y$.

Докажем, что $\Sigma(N) \cap \Sigma(S) \subset Y^\perp$. Допустим противное: пусть $\lambda \in (\Sigma(N) \cap \Sigma(S)) \setminus Y^\perp$. По лемме 5 $\lambda = \zeta + \alpha\gamma$, где $\alpha > 0$, $\gamma \in \Sigma(M) \cap \partial A$, $\zeta \in Y^\perp$. По доказанному $\gamma = \mu + f$, где $\mu = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k, \dots)$ и начиная с некоторого номера k будет $\mu^k = 0$, $\gamma^k = f^k$. Тогда $\lambda^n/f^n = \zeta^n/f^n + \alpha \rightarrow \alpha > 0$, следовательно, $\lambda \notin \Sigma(S)$.

По лемме 4а) множество N антипроксиминально относительно Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathcal{F}(X)$, множество A называется *острым*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in A$ такая, что $x_\varepsilon \notin \overset{\circ}{\text{conv}}(A \setminus \overset{\circ}{V}(x_\varepsilon, \varepsilon))$. Функционал $f \in X^*$ называется *сильно достигающим в точке* $x \in A$, если $f(y) < f(x)$ для всех $y \in A$, $y \neq x$, и при этом из $y_n \in A$, $f(y_n) \rightarrow f(x)$ следует $\|x - y_n\| \rightarrow 0$.

Множество всех сильно достигающих для множества A функционалов будем обозначать через $A^\wedge$.

Нам потребуется условие (свойство) Радона–Никодима (см. [16] или [17]), приведем его в удобной для нас форме. Банахово пространство X удовлетворяет условию Радона–Никодима, если каждое ограниченное его подмножество острое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *В банаховом пространстве X , удовлетворяющем условию Радона–Никодима, не существует ограниченного замкнутого множества, которое является антипроксиминальным множеством для X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \mathcal{F}(X)$ – произвольное ограниченное множество (не обязательно выпуклое), $M = \overline{\text{co}} A$. По теореме 8 [16] в банаховом пространстве для каждого ограниченного замкнутого выпуклого множества K , каждое непустое замкнутое подмножество которого острое, множество сильно достигающих функционалов $K^\wedge$ есть всюду плотное в X^* C_δ -множество. По условию на пространство X каждое ограниченное его подмножество острое. Тогда множества $M^\wedge$ и $V^\wedge$ – всюду плотные в X^* C_δ -множества. Имеем $M^\wedge \subset \Sigma(M)$, $V^\wedge \subset \Sigma(V)$, $M^\wedge \cap V^\wedge \neq \emptyset$, следовательно, $(\Sigma(M) \setminus \{0\}) \cap (\Sigma(V) \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. Пусть $f \in ((M^\wedge \cap V^\wedge) \setminus \{0\})$, $x \in M$, $f(x) = \sup\{f(z) : z \in M\}$. Из определения сильно достигающего функционала следует, что $x \in A$. А так как $f \in \Sigma(V)$, то A не является антипроксиминальным множеством.

ЗАМЕЧАНИЕ. Р.Р. Фелпс [12] фактически доказал утверждение предложения 3 для случая выпуклых множеств. В предложении 3 содержится результат М. Эдельштейна [18] для сепарабельного сопряженного пространства X .

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие Радона–Никодима не является необходимым для того, чтобы в банаховом пространстве X не существовало антипроксиминальных ограниченных замкнутых выпуклых множеств. Об этом говорит упомянутый после следствия 5 результат С. Кобзаша относительно $L_1(S, \Sigma, \mu)$ (в случае, когда мера μ не является атомарной, $L_1(S, \Sigma, \mu)$ не удовлетворяет условию Радона–Никодима [17, с. 177]).

Из универсальности пространств $C(Q)$ следует, что в теореме 3 условия а)–д) нельзя просто отбросить. Более того, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 9. *При любом изометрическом вложении бесконечномерного пространства $L_p(S, \Sigma, \mu)$ ($1 < p < \infty$), $L_1(S, \Sigma, \mu)$ (мера μ имеет атом), $C_2^{(n)}[0, 1]$, $V_{[0, 1]}$, $C_\alpha[0, 1]$, рефлексивного банахова пространства или банахова пространства со свойством Радона–Никодима в качестве подпространства $Y \subset C(Q)$, где Q – бикомпакт, для аннулятора $Y^\perp \subset C^*(Q)$ не выполняется ни одно из условий а)–д) теоремы 3.*

Следует отметить, что все антипроксиминальные множества в [1]–[6] центрально-симметричны, чего, к сожалению, нельзя сказать о множествах, построенных выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $0 \in M \subset X$ называется *радиально ограниченным*, если для любого $x \in X$, $\|x\| = 1$, найдется число $r > 0$ такое, что $rx, -rx \notin M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. В пространстве $L_1(-1, 1)$ существует антипроксиминальное центрально-симметричное радиально ограниченное замкнутое выпуклое тело.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность φ_n :

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= |\sin(\pi t)|, \quad \varphi_1(t) = \sin(\pi t), \quad \varphi_2(t) = \cos(\pi t), \quad \dots, \\ \varphi_{2n-1}(t) &= \sin(n\pi t), \quad \varphi_{2n}(t) = \cos(n\pi t), \quad \dots\end{aligned}$$

Пусть

$$A = w^* - \text{cl conv} \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{\varphi_n\} \cup \{-\varphi_n\}) \subset L_{\infty}(-1, 1),$$

$$M = A_{\pi} = \{x \in X : \sup\{g(x) : g \in A\} \leq 1\}.$$

Так как A ограничено, то $0 \in \text{int } A_{\pi}$, A_{π} – замкнутое выпуклое тело.

Докажем, что множество M радиально ограничено. Для любого элемента $x \in L_1(-1, 1) \setminus \{0\}$ при $n \geq 1$ $\alpha_n = \int_0^1 \varphi_n(t)x(t) dt$ является соответствующим коэффициентом Фурье по тригонометрической системе. По [15, § 11, с. 65] если $\forall n \geq 1 \alpha_n = 0$, то $x(t) \equiv c$. Тогда из соотношения

$$0 = \int_{-1}^1 \varphi_0(t)x(t) dt = c \int_{-1}^1 \varphi_0(t) dt$$

следует, что $c \equiv 0$, $x(t) \equiv 0$. В итоге получаем, что для любого элемента $x \in L_1(-1, 1) \setminus \{0\}$ $\sup\{\int_{-1}^1 \varphi(t)x(t) dt : \varphi \in A\} > 0$, следовательно, M радиально ограничено.

В [15, с. 77] доказано, что для любого элемента $x \in L_1(-1, 1) \setminus \{0\}$ справедливо равенство

$$\lim \int_{-1}^1 \varphi_n(t)x(t) dt = 0.$$

А так как по доказанному $\sup_{n \geq 0} |\int_{-1}^1 \varphi_n(t)x(t) dt| > 0$, то для любого элемента $x \in L_1(-1, 1) \setminus \{0\}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}C &:= \left\{ f \in A : \int_{-1}^1 f(t)x(t) dt = \sup \left\{ \int_{-1}^1 \varphi(t)x(t) dt : \varphi \in A \right\} \right\} \\ &\subset \text{conv} \bigcup_{n=0}^k (\{\varphi_n\} \cup \{-\varphi_n\}),\end{aligned}$$

где число k зависит от элемента x . Нетрудно заметить, что для любого элемента $f \in C$

$$\text{mes}\{t \in [-1, 1] : |f(t)| = \sup\{|f(\tau)| : \tau \in [-1, 1]\}\} = 0.$$

Тогда $f \notin X^\#$. По лемме 1 M антипроксимinally.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН

Поступило
20.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Edelstein M., Thompson A. C. Some results on nearest points and support properties of convex sets in c_0 // Pacific J. Math. 1972. V. 40. № 3. P. 553–560.
- [2] Кобзаш С. Выпуклые антипроксиминальные множества в пространствах c_0 и c // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 3. С. 449–457.
- [3] Cobzaş S. Antiproximinal sets in some Banach spaces // Math. Balkanica. 1974. V. 4. P. 79–82.
- [4] Cobzaş S. Antiproximinal sets in Banach spaces of continuous function // Revue d'Analyse Numérique et de la Théorie de l'Approximation. 1976. V. 5. № 2. P. 127–143.
- [5] Cobzaş S. Antiproximinal sets in Banach spaces of c_0 -type // Revue d'Analyse Numérique et de la Théorie de l'Approximation. 1978. V. 7. № 2. P. 141–145.
- [6] Фонф В. П. Об антипроксиминальных множествах в пространствах непрерывных функций на бикомпактах // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 3. С. 549–558.
- [7] Singer I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Berlin–N. Y.: Springer Verlag, 1970.
- [8] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [9] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [10] Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operator. Dis. Grundlehren Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 215. Berlin–N. Y.: Springer Verlag, 1974.
- [11] Кудрявцев Л. Д. Об эквивалентных нормах в весовых пространствах // Тр. МИАН. 1984. Т. 170. С. 161–190.
- [12] Phelps R. R. Counterexamples concerning support theorems for convex sets in Hilbert space // Canad. Math. Bull. 1988. V. 31. № 1. P. 121–128.
- [13] Фонф В. П. О сильно антипроксиминальных множествах в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 2. С. 130–136.
- [14] Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. Warszawa: Polish scientific publishers, 1971.
- [15] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [16] Bourgain J. On dentability and the Bishop–Phelps property // Israel J. Math. 1977. V. 28. № 4. P. 265–271.
- [17] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища школа, 1980.
- [18] Edelstien M. A note on nearest points // Quart. J. Math. 1970. V. 21. № 84. P. 403–406.