Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Бердышев, Аппроксимация обобщенными полиномами, обеспечивающая наилучшую привязку, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 658–669

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:46:38

АППРОКСИМАЦИЯ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ НАИЛУЧШУЮ ПРИВЯЗКУ

В. И. Бердышев

Введение. Далее f – непрерывная на компакте $Q \subset \mathbb{R}^N$ функция, Δ – компакт из $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Delta$. Пусть $t \in \mathbb{R}^N$, $\Delta_t := \Delta + t \subset Q$. Функцию

$$\varphi(x) = \varphi_t(x) = f(x + t) \quad (x \in \Delta) \quad (1)$$

будем называть *фрагментом функции* f (соответствующим точке t). В приложениях встречается такая задача, когда известны функции $f(x)$ ($x \in Q$), $\varphi(x)$ ($x \in \Delta$), известно, что φ является фрагментом функции f , и требуется найти местоположение фрагмента, т.е. найти t , для которого выполняется условие (1). Приведем пример (см. [1], [2]): автономно управляемый аппарат движется над регионом Q ; $f(x)$ – значение некоторой геофизической характеристики (высоты, оптической яркости и т.д.) в точках $x \in Q$; в бортовом компьютере аппарата хранятся значения $f(x)$ для всех $x \in Q$; находясь над точкой $t \in Q$, координаты которой неизвестны или известны с погрешностью, аппарат снимает фрагмент (1) $\varphi = \varphi(x)$ ($x \in \Delta$) функции f ; требуется определить местоположение t , используя информацию о f и φ . Случай, когда по техническим условиям имеется возможность замерять значения поля f лишь в конечном числе точек, также охватывается приведенной постановкой, он соответствует частному случаю, когда Δ – сетка из $\mathbb{R}^N$.

Задачу определения t по известным $f = f(x)$ ($\forall x \in Q$) и $\varphi = \varphi(x)$ ($\forall x \in \Delta$) будем называть *задачей привязки (навигации)*. В [3], [4] рассмотрен случай функций одной переменной.

Задача привязки не корректна по Адамару, как задача обращения отображения $t \mapsto \varphi = \varphi_t$, не являющегося, вообще говоря, взаимно однозначным. В п. 1 данной работы изучается свойство информативности функ-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–011–196.

ции f , т.е. свойство, обеспечивающее возможность привязки по любому ее фрагменту.

Часто при решении практических задач налагается жесткое ограничение на объем памяти бортового компьютера, выделяемой для хранения информации о функции f . В таких случаях приходится вместо f хранить аппроксимирующую функцию p , которая задается небольшим числом параметров, и осуществлять привязку посредством p и фрагмента φ . Это может привести к увеличению ошибки привязки. В п. 2 рассматривается задача определения в заданном классе $\mathcal{P}$ аппроксимирующей функции p , привязка по которой с помощью фрагмента φ функции f осуществляется с наименьшей ошибкой. Приводятся необходимые условия на такую функцию.

1. Модуль информативности функции. В качестве решения задачи привязки по функции f и фрагменту φ естественно взять [1], [2] одно из значений $T = T(t)$, реализующих нижнюю грань

$$\inf\{\|f(x+T) - \varphi_t(x)\|_{\Delta} : \Delta_T \subset Q\}, \quad (2)$$

где $\|\cdot\|_{\Delta}$ – некоторая норма, например, $\|f\|_{\Delta} = \max\{|f(x)| : x \in \Delta\}$. Евклидово расстояние $|t - T(t)|$ между точками $t, T(t) \in \mathbb{R}^N$ естественно назвать ошибкой привязки. В идеальном случае нижняя грань (2) равняется нулю. Однако на практике, даже если функция f задана с приемлемой погрешностью и фрагмент φ снимается достаточно точно, применение конкретного алгоритма минимизации по $T \in \mathbb{R}^N$ позволяет получить малую, но не нулевую величину $\|f(x+T) - \varphi(x)\|_{\Delta}$. Важным с точки зрения привязки является свойство информативности функции f , гарантирующее малость величины $|t - T|$ при малой $\|f(T+x) - \varphi_t(x)\|_{\Delta}$. Это свойство характеризуется посредством функции [3]:

$$J_{\Delta}(\tau, f) = \sup_{Y, T} \{ |Y| : \Delta_T \subset Q, \|f(x) - f(x+Y)\|_{\Delta_T} \leq \tau \},$$

которую будем называть *модулем информативности*. Обозначим через I_{Δ} класс функций f , для которых $J_{\Delta}(\tau, f) \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$). Непосредственно из определения J_{Δ} следует оценка погрешности привязки

$$|t - T| \leq J_{\Delta}(\|f(x+T) - \varphi_t(x)\|_{\Delta}, f); \quad (3)$$

если при практическом вычислении (2) найдено T , для которого величина $\|f(x+t) - \varphi_t(x)\|_{\Delta}$ достаточно мала, то при $f \in I_{\Delta}$ неравенство (3) влечет малость ошибки $|t - T|$. Через модуль информативности можно оценить

погрешность привязки и в том случае, когда привязка осуществляется по фрагменту (1) функции $f \in I_\Delta$ и по функции p , аппроксимирующей функцию f , т.е. когда вместо (2) решается задача

$$d(p, t) := \inf_T \{ \|p(x+T) - \varphi_t(x)\|_\Delta : \Delta_T \subset Q \}. \quad (4)$$

Эта оценка имеет вид [3], [4]

$$|t - T| \leq J_\Delta(2\|f - p\|_Q, f). \quad (5)$$

Ввиду (3), (5) представляет интерес вопрос о поведении модуля $J_\Delta(\tau, f)$ в нуле. Отметим, что если f — строго монотонная на $[a, b]$ функция, а $\Delta = \{0\}$, то $J(\tau, f) = \omega(\tau, f^{-1})$ — модуль непрерывности [5] обратной функции. Приведем несколько случаев, когда $J_\Delta(\tau, f)$ можно оценить сверху. Далее $\|f\|_D = \max\{|f(x)| : x \in D\}$, $D = Q, \Delta$.

1) Пусть $Q = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\Delta = [0, \delta]$, $0 < \delta < b - a$, $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_n \neq 0$, тогда [3], [4]

$$J_\Delta(\tau, f) \leq \frac{\tau}{|a_n|nE_{n-1}},$$

где

$$E_k = \inf \{ \|x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \dots + \alpha_0\| : \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{R} \},$$

и по теореме П. Л. Чебышева $E_k = (\delta/2)^k / 2^{k-1}$. Здесь отрезок Q может быть неограниченным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (А. В. Нятин). Если $f_{nm} = p_n(x)/q_m(x) \neq \text{const}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_n \neq 0$, $q_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k > 0$ на $[a, b]$ ($b_m = 1$), то

$$J_\Delta(\tau, f_{nm}) \leq \begin{cases} \frac{\|q_m\|_{[a,b]}^2 \tau}{|a_n| \cdot |n-m| E_{n+m-1}} & (n \neq m), \\ \frac{\|q_n\|_{[a,b]}^2 \tau}{|a_{n-1} - a_n b_{n-1}| E_{2n-2}} & (n = m). \end{cases}$$

В самом деле, при $n \neq m$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{p_n(x+Y)}{q_m(x+Y)} - \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \right\|_{\Delta_T} &= \left\| \frac{a_n(n-m)x^{n+m-1} + \dots}{q_m(x)q_m(x+Y)} \right\|_{\Delta_T} \\ &\geq \frac{|a_n| \cdot |n-m| E_{n+m-1}}{\|q_m\|_{[a,b]}^2}, \end{aligned}$$

а случай $n = m$ сводится к случаю $n \neq m$ следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} \\ &= a_n + \frac{(a_{n-1} - a_n b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 - a_n b_0)}{x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}. \end{aligned}$$

2) Рассмотрим случай многочленов двух переменных степени n

$$p = p_n(x, y) = \sum_{k+l \leq n} a_{kl} x^k y^l,$$

заданных на квадрате $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $\Delta = [0, \delta] \times [0, \delta]$ ($0 < \delta < 2$). Для $T = (X, Y) \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$p(x + X, y + Y) - p(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{n-k-1} y^k - p_{n-2}, \quad (6)$$

где

$$c_k = c_k(T) = (n-k)a_{n-k,k}X + (k+1)a_{n-k-1,k+1}Y \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (7)$$

а $p_{n-2} = p_{n-2}(x, y)$ — многочлен степени не более $n-2$. Обозначим

$$\begin{aligned} E(p, T)_D &= \min_{p_{n-2}} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{n-k-1} y^k - p_{n-2} \right\|_D \quad (D \subset Q), \\ E(p) &= \min_{|T|=1} E(p, T)_Q. \end{aligned}$$

Замена переменных дает

$$E(p, T)_Q = \left(\frac{2}{\delta} \right)^{n-1} E(p, T)_\Delta.$$

Поскольку коэффициенты c_k из формулы (7) зависят от X, Y линейно, то $\min\{E(p, T)_Q : |T| = \lambda\} = \lambda E(p)$ ($\lambda > 0$), далее,

$$\min_{\|T\|=\lambda} E(p, T)_\Delta = \left(\frac{\delta}{2} \right)^{n-1} \lambda E(p),$$

и значит (см. (6)), для $|T| = \lambda$

$$\|p(x + X, y + Y) - p(x, y)\|_\Delta \geq \left(\frac{\delta}{2} \right)^{n-1} \lambda E(p). \quad (8)$$

Из (8) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если многочлен $p = p_n(x, y)$ таков, что ни при каком T , $|T| = 1$, коэффициенты c_k (7) не обращаются в нуль одновременно, то $E(p) > 0$ и

$$J_{\Delta}(\tau, p) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n-1} \frac{\tau}{E(p)}.$$

Для оценки величины $E(p)$ можно воспользоваться неравенством А. А. Маркова (см., например, [6])

$$\left\| \sum_{k=0}^n b_k x^k \right\|_{[-1,1]} \geq A_{nk} |b_k| \quad (k = 0, \dots, n),$$

$$A_{nk} = \begin{cases} \frac{k!}{2^{k-1}n} \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left[\left(\frac{n+k}{2} - 1\right)!\right]^{-1}, & n-k \text{ четно,} \\ \frac{k!}{2^{k-1}(n-1)} \left(\frac{n-k-1}{2}\right)! \left[\left(\frac{n+k-3}{2}\right)!\right]^{-1}, & n-k \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (9)$$

Полагая в $p(x, y)$ $y = \alpha x + \beta$ ($|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_{k-j,j} x^{k-j} y^j \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^j a_{k-j,j} c_j^l \alpha^{j-l} \beta^l x^{k-l} \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{n-m} \sum_{j=l}^{m+l} a_{m+l-j,j} c_j^l \alpha^{j-l} \beta^l x^m \\ &= \sum_{m=0}^n x^m \sum_{l=0}^{n-m} \beta^l \sum_{j=l}^{m+l} a_{m+l-j,j} c_j^l \alpha^{j-l}, \end{aligned}$$

где $c_k^l = k! / ((k-l)l!)$. Трижды применим неравенство Маркова по переменным x, β и α последовательно, тогда

$$\left\| \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j \right\|_{C[-1,1]} \geq A_{n,m} A_{n-m,l} A_{m,j-l} c_j^l |a_{m+l-j,j}|$$

для любых $m = 0, \dots, n, l = 0, \dots, n-m, j = l, \dots, m+l$. Полагая $x = \gamma y + \delta$ ($|\gamma| \leq 1, |\delta| \leq 1$) и рассуждая аналогично, будем иметь

$$\left\| \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j \right\|_{C[-1,1]} \geq A_{n,m} A_{n-m,l} A_{m,i-l} c_i^l |a_{i,m+l-i}|$$

для любых $m = 0, \dots, n, l = 0, \dots, n-m, i = l, \dots, m+l$. Таким образом, установлено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо неравенство*

$$\left\| \sum_{k+l \leq n} a_{kl} x^k y^l \right\|_{[-1,1]} \geq A_{n,m} A_{n-m,l} A_{m,j-l} c_j^l \max\{|a_{m+l-j,j}|, |a_{j,m+l-j}|\}$$

(см. (9)) для любых $m = 0, \dots, n$, $l = 0, \dots, n - m$, $j = l, \dots, m + l$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $n = 2$ величина $E(p)$ может быть найдена в явном виде:

$$\begin{aligned} E(p_2) &= \min_{|X|, |Y|=1} \min_c \max_{|x|, |y| \leq 1} |(2a_{20}X + a_{11}Y)x + (a_{11}X + 2a_{02}Y)y + c| \\ &= \min_{|X|, |Y|=1} (|2a_{20}X + a_{11}Y| + |a_{11}X + 2a_{02}Y|) = \frac{|a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}|}{\max\{|a_{20}|, |a_{02}|\}}, \end{aligned}$$

и, значит, при $a_{11}^2 \neq 4a_{20}a_{02}$

$$J_{\Delta}(\tau, p_2) \leq \frac{2 \max\{|a_{20}|, |a_{02}|\}}{|a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}|\delta} \tau.$$

2. Аппроксимация, наилучшая с точки зрения привязки.

Пусть компакт $Q \subset \mathbb{R}^N$ выпуклый, f непрерывна на Q , $\varphi = \varphi_t(x)$ – фрагмент функции f , соответствующий точке $t \in \mathbb{R}^N$; пусть также задан класс $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} \subset C(Q)$) аппроксимирующих функций (например, класс многочленов степени не более n). В дальнейшем требуется лишь, чтоб $\mathcal{P}$ был линейным, а функции $p \in \mathcal{P}$ были бы непрерывно дифференцируемы на Q .

Дадим определение функции $p \in \mathcal{P}$ наилучшей привязки [3]. Для $p \in \mathcal{P}$ ($p \neq \text{const}$) найдем расстояние

$$D(p, t) = \inf\{|t - T| : T \in \arg d(p, t)\}$$

от точки t до множества точек T , реализующих минимум (4). Очевидно, что $D(p, t)$ – наилучшая точность привязки (методом (4)) по фрагменту φ_t и функции p . Определим

$$D(p) = \sup_t \{D(p, t) : \Delta_t \subset Q\}.$$

В случае $p_0 \equiv \text{const}$ ($p_0 \in \mathcal{P}$) положим

$$D(p_0) = \lim_{p \rightarrow p_0, p \neq \text{const}} D(p).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $p^* \in \mathcal{P}$, для которой достигается нижняя грань

$$D := D(p^*) = \inf \{ D(p) : p \in \mathcal{P} \}, \quad (10)$$

назовем *функцией наилучшей привязки*.

Следующий пример показывает, что функция $p^{**} \in \mathcal{P}$ наилучшего приближения в метрике $C(Q)$ для f (т.е. такая, что $\|f - p^{**}\|_Q = \inf \{ \|f - p\|_Q : p \in \mathcal{P} \}$) не обязана быть функцией наилучшей привязки.

Пусть $Q = [0, 1]$, $\Delta = \{0\}$, $\mathcal{P} = \{a_2x^2 + a_1x + a_0\}$ – множество многочленов 2-й степени, $0 < \varepsilon < 1/4$, f – четырехзвенная кусочно-линейная функция, принимающая в точках $0, \sqrt{\varepsilon}, 1-2\varepsilon, 1-\varepsilon, 1$ значения $\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}, (1-2\varepsilon)^2 - \varepsilon, (1-\varepsilon)^2 + \varepsilon, 1-\varepsilon$ соответственно. Точки $\varepsilon, 1-2\varepsilon, 1-\varepsilon, 1$ образуют для f и $p = x^2$ чебышевский альтернанс (см. [6]) и по теореме П. Л. Чебышева p – многочлен наилучшего приближения для f . Ошибка привязки с помощью p равна $D(p) = D(p, 0) = \sqrt{\varepsilon}$ (при $\delta = 0$), а многочленом *наилучшей привязки* является $p^* = (x + \alpha)^2$, где $2\alpha = \sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon + \xi - 1$, $\xi = \sqrt{(1-2\varepsilon)^2 - \varepsilon}$, и при этом $D(p^*) = D(p^*, 0) = D(p^*, 1-2\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} - \alpha < D(p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Т. В. Демченко проведен вычислительный эксперимент для функций одной и двух переменных. В качестве $\mathcal{P}$ взят класс многочленов 2-й степени, в качестве f – многочлены большей степени. Расчеты показали, что даже для столь гладких f многочлен наилучшей привязки дает точность привязки в среднем на 7–10% выше в сравнении с многочленом наилучшего приближения.

Перечислим некоторые свойства введенных понятий [4]: отображение $(p, t) \mapsto \arg d(p, t)$ полунепрерывно сверху; функционалы $D(p, t), D(p)$ полунепрерывны снизу; функция наилучшей привязки может быть не единственной; нижняя грань (10) может не достигаться, даже если $\mathcal{P}$ – конечномерное подпространство из $C(Q)$; функционал $D(p)$ может иметь точки локального (не глобального) экстремума.

Далее устанавливаются условия на функцию $p \in \mathcal{P}$, доставляющую функционалу $D(p)$ минимум, вообще говоря, локальный. Функция f предполагается зафиксированной.

Для $p \in \mathcal{P}, t \in Q, T \in \mathbb{R}^N$ обозначим

$$\begin{aligned} r_T(x) &= p(x+T) - f(x+t) \quad (x \in \Delta), \\ R &= R(t, T) = R_p(t, T) = \arg \max \{ |r_T(x)| : x \in \Delta \}, \end{aligned}$$

$p'(x)l = (p'(x), l)$ – скалярное произведение векторов $p'(x)$ и l , где $p'(x)$ – градиент функции p , $O_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^N : \inf_{a \in A} |x - a| < \varepsilon\}$ – ε -окрестность ($\varepsilon > 0$) множества $A \subset \mathbb{R}^N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если вектор $l \in \mathbb{R}^N$ удовлетворяет условию

$$r_T(x)p'(x+T)l < 0 \quad \forall x \in R_p(t, T), \quad (11)$$

то найдется $\alpha_0 > 0$, для которого

$$\|r_{T+\alpha l}\|_\Delta < \|r_T\|_\Delta < \|r_{T-\alpha l}\|_\Delta \quad (0 < \alpha < \alpha_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $s = \text{sign } r_T(x)$. Множество $R(t, T)$ компактно, а отображение $T \mapsto R(t, T)$ полунепрерывно сверху, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что

$$R(t, T+l) \subset O_\varepsilon(R(t, T)) \quad \forall l: |l| < \delta. \quad (12)$$

В силу компактности множества $R = R(t, T)$ и непрерывности функций f и p найдется $\gamma > 0$ такое, что для любых $x \in R$, $\xi \in O_\gamma(x) \cap \Delta$ и любого l , $|l| < \gamma$, выполняется условие

$$\text{sign } r_{T+l}(\xi) = \text{sign } r_T(x), \quad (13)$$

и поэтому ввиду дифференцируемости функции p

$$\begin{aligned} |r_{T+l}(\xi)| - |r_T(\xi)| &= s[r_{T+l}(\xi) - r_T(\xi)] = s[p(\xi + T + l) - p(\xi + T)] \\ &= sp'(\xi + T)l + o(|l|). \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть существует l , удовлетворяющий условию (11). В силу компактности R для некоторого $\eta = \eta_l < 0$

$$sp'(x+T)l < 3\eta \quad \forall x \in R.$$

По непрерывности $r_T(x)$ и $p'(x+T)$ найдется $\varepsilon = \varepsilon_{\eta, \gamma}$ ($0 < \varepsilon < \gamma$, см. (13)) такое, что

$$sp'(\xi + T)l < 2\eta < 0 \quad \forall \xi \in O_\varepsilon(R).$$

По ε найдем $\delta = \delta_{\varepsilon, \gamma} > 0$ ($0 < \delta < \gamma$) так, чтоб выполнялось (12). Теперь выберем число $\alpha_0 > 0$ из следующих условий: $|o(|\alpha_0 l|)| < \alpha_0 |\eta|$ (см. (14)), $|\alpha_0 l| < \delta_\varepsilon$. Для α , $0 < \alpha < \alpha_0$, учитывая (14), получим

$$sr_{T+\alpha l}(\xi) - \alpha\eta < sr_T(\xi) < sr_{T-\alpha l}(\xi) + \alpha\eta \quad \forall \xi \in O_\varepsilon(R(t, T)),$$

и ввиду (12) выполняются неравенства

$$\|r_{T+\alpha l}\|_\Delta - \alpha\eta < \|r_T\|_\Delta < \|r_{T-\alpha l}\|_\Delta + \alpha\eta \quad (0 < \alpha < \alpha_0, \quad \eta < 0).$$

Предложение доказано. Из него следует теорема о необходимых условиях экстремума по T .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p \in \mathcal{P}$, $t \in Q$, $T^* \in \mathbb{R}^N$, $\Delta + T^* \subset Q$ и $p(x + T^*) \neq f(x + t)$ на Δ . Если

$$\|f(x + t) - p(x + T^*)\|_{\Delta} = \min_T \{\|f(x + t) - p(x + T)\|_{\Delta} : \Delta + T \subset Q\},$$

то

$$\bigcap_{\xi \in R(t, T^*)} \{l \in \mathbb{R}^N : r_T(\xi)p'(\xi)l < 0\} = \emptyset.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} R^0 &= \{\xi \in R_p(t, T) : p'(\xi) = 0\}, \\ \overline{R} &= \{\xi \in R_p(t, T) : r_T(\xi) = \|r_T\|_{\Delta}\}, \\ \underline{R} &= \{\xi \in R_p(t, T) : r_T(\xi) = -\|r_T\|_{\Delta}\}, \\ R_l^{\pm} &= \{\xi : \pm(p'(\xi + T)l) \operatorname{sign} r_T(\xi) < 0\} \quad (l \in \mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

и для $q \in \mathcal{P}$

$$R(q) = \arg \max \{q(\xi + T) \operatorname{sign} r_T(\xi) : \xi \in R_p(t, T)\},$$

а если $r_T(\xi) \equiv 0$ на Δ , то

$$R(q) = \arg \max \{|q(\xi)| : \xi \in \Delta\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $p \in \mathcal{P}$, $t \in Q$, $T = T_p \in \arg d(p, T)$, $l \in \mathbb{R}^N$ и $q \in \mathcal{P}$ таковы, что

- 1) если $r_T(\xi) \neq 0$ на Δ , то для любого $\xi \in R(q)$ либо $(\operatorname{sign} r_T(\xi)) \times p'(\xi + T)l < 0$, либо $(\operatorname{sign} r_T(\xi))p'(\xi + T)l = 0$ и $(\operatorname{sign} r_T(\xi)) \times q'(\xi + T)l < 0$,
- 2) если $r_T(\xi) \equiv 0$ на Δ , то $(\operatorname{sign} q(\xi + T))p'(\xi + T)l < 0$ для любого $\xi \in R(q)$.

Тогда найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для $0 < \lambda < \lambda_0$, $p_{\lambda} = p + \lambda q$ локальный минимум по α

$$\min \|p_{\lambda}(x + T + \alpha l) - f(x + t)\|_{\Delta} \tag{15}$$

достигается при $\alpha^* > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $T_\lambda^l = T + \alpha^* l$, где α^* – точка минимума в задаче (15). Функция

$$\max\{|p(x+T) - f(x+T)| : x \in \Delta\}$$

непрерывна по p, T и отображения

$$p \mapsto \arg d(p, t), \quad p \mapsto R_p(t, T)$$

полунепрерывны сверху, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda = \lambda_\varepsilon > 0$ такое, что при $|\lambda| < \lambda_\varepsilon$

$$|T_p - T_\lambda^l| < \varepsilon, \quad R_{p_\lambda}(t, T) \subset O_\varepsilon(R_p(t, T)). \quad (16)$$

Существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\text{sign } r_T(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in O_{\varepsilon_1}(\overline{R}), \\ -1, & \xi \in O_{\varepsilon_1}(\underline{R}), \end{cases}$$

и, кроме того, в силу непрерывности p' и q' (см. 1))

$$\begin{aligned} p'(\xi + T)l \text{ sign } r_T(\xi) &< 0, & \xi \in O_{2\varepsilon_1}(R_l^+ \cap R(q)), \\ q'(\xi + T)l \text{ sign } r_T(\xi) &< 0, & \xi \in O_{2\varepsilon_1}(R^0 \cap R(q)). \end{aligned}$$

Поэтому найдется $\lambda_1 > 0$ такое, что при $|\lambda| < \lambda_1$

$$(p'_\lambda(\xi + T)l) \text{ sign } r_T(\xi) < 0, \quad \xi \in O_{\varepsilon_1}((R_l^+ \cup R^0) \cap R(q)). \quad (17)$$

В силу условия 1) существует $\varepsilon_2 > 0$, при котором

$$\begin{aligned} \min\{q(\xi + T) \text{ sign } r_T(\xi) : \xi \in O_{\varepsilon_2}((R_l^+ \cup R^0) \cap R(q))\} \\ > \max\{q(\xi + T) \text{ sign } r_T(\xi) : \xi \in O_{\varepsilon_2}(R_l^- \cap R)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $|\lambda| < \min\{\lambda_\varepsilon, \lambda_1\}$ ввиду (16) $R_{p_\lambda}(t, T) \subset O_\varepsilon(R_p(t, T))$, а по (18) $R_{p_\lambda}(t, T) \subset O_\varepsilon((R_l^+ \cup R^0) \cap R(q))$. Отсюда, учитывая (17) и предложение 4, получаем требуемое утверждение в случае 1). В случае 2)

$$\text{sign}[p_\lambda(x + T) - f(x + t)] = \text{sign } q(x + T) \quad (\lambda > 0),$$

поэтому при достаточно малых $\lambda > 0$

$$(\text{sign}[p_\lambda(x + T) - f(x + t)])p'_\lambda(x + T)l < 0 \quad (x \in R(q)).$$

Для завершения доказательства осталось применить предложение 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $R^0 \cap R(q) = \emptyset$, то при $r_T(\xi) \equiv 0$ на Δ условие 2) можно записать в виде

$$\max_{\xi \in \Delta} [-q(\xi + T) \operatorname{sign} p'(\xi + T)l] > \max_{\xi \in \Delta} q(\xi + T) \operatorname{sign} p'(\xi + T)l.$$

Нетрудно привести примеры функций $p \in \mathcal{P}$ и f , для которых существуют $t_k \rightarrow t$, $T_k \rightarrow T$ такие, что $T_k \in \arg d(p, t_k)$, но $T \notin \arg d(p, t)$. Кроме того, множество $\arg D(p)$ может быть не замкнутым. В связи с этим целесообразно ввести обозначения

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_p = \{t \in Q : \exists t_k \rightarrow t, D(p, t_k) \rightarrow D(p)\}$$

и для $t \in Q$ $\mathcal{T}(t) = \mathcal{T}_p(t)_\Delta$ – множество предельных точек всевозможных последовательностей $T_k \in \arg D(p, t_k)$, где $t_k \rightarrow t$. Множество $\mathbf{t}$ замкнуто.

Следующая теорема дает необходимые условия для функции $p \in \mathcal{P}$ наилучшей привязки.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \in \mathcal{P}$, $D(p) > 0$ и отображение $t \mapsto \mathcal{T}_p(t) = T(t)$ однозначно. Если p доставляет локальный минимум функционалу $D(p)$ на классе $\mathcal{P}$, то не существует функции $q \in \mathcal{P}$ такой, что при некотором $\delta > 0$ для любых $t \in \mathbf{t}$ выполняются условия:

1) для любого $l \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющего неравенству $(l, t - T) \leq \delta$ ($T = T(t)$) существует $\xi \in R(q)$ такой, что

- а) $r_T(\xi)(p'(\xi + T)l) > 0$ при $r_T(\xi) \neq 0$ на Δ ,
- б) $q(\xi + T)(p'(\xi + T)l) > 0$ при $r_T(\xi) \equiv 0$ на Δ ;

2) существует $l \in \mathbb{R}^N$, $|l| = 1$, такой, что $(l, t - T) > \delta$ и для любого $\xi \in R(q)$

- а) $r_T(\xi)(p'(\xi + T)l) < 0$ при $r_T(\xi) \neq 0$ на Δ ,
- б) $q(\xi + T)(p'(\xi + T)l) < 0$ при $r_T(\xi) \equiv 0$ на Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует $q \in \mathcal{P}$, удовлетворяющая указанным свойствам. Ввиду полунепрерывности сверху отображения $(p, t) \mapsto \arg d(p, t)$ и компактности множества $\mathbf{t}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda_\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $t \in \mathbf{t}$ любая точка $T_\lambda = T_\lambda(t)$ минимума функционала

$$\|p_\lambda(x + T) - f(x + t)\|_\Delta \quad (0 \leq \lambda < \lambda_\varepsilon)$$

удовлетворяет неравенству $|T_\lambda(t) - T(t)| < \varepsilon$. Выберем ε настолько малым, что неравенства 1а), 1б) выполняются в ε -окрестностях точек ξ , а

неравенства 2а), 2б) – в ε -окрестности множества $R(q)$ и, кроме того, множество

$$K_{\varepsilon, \delta}(t) = \{T + \alpha \cdot l : |l| = 1, 0 < \alpha \leq \varepsilon, (l, t - T) \geq \delta\}$$

содержится внутри шара радиуса $D(p)$ с центром в точке t . Из условий 1), 2) теоремы и предложения 5 следует, что $T_\lambda \in K_{\varepsilon, \delta}(t)$ и, значит, $|t - T_\lambda| < |t - T|$. Ввиду непрерывности $p'(\xi)$ ограничен на $\mathbf{t}$, поэтому

$$\inf\{|t - T| - |t - T_\lambda| : t \in \mathbf{t}\} > 0.$$

Отсюда следует, что p не является “точкой” минимума функционала $D(p)$.

Приведенная теорема является основой численных алгоритмов построения функции $p \in \mathcal{P}$ наилучшей привязки. “Полином” $q \in \mathcal{P}$, удовлетворяющий условиям 1), 2) теоремы, задает направление спуска для функционала D , т.е. $D(p + \lambda q) < D(p)$ для достаточно малых $\lambda > 0$.

Автор благодарит Ю.Н. Субботина за полезные обсуждения.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН
E-mail: bvi@apprekat.imm.intec.ru

Поступило
26.08.94
Исправленный вариант
23.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белоглазов И. Н., Джанжгава Г. И., Чигин Г. П. Основы навигации по геофизическим полям. М.: Наука, 1985.
- [2] Красовский А. А., Белоглазов И. Н., Чигин Г. П. Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. М.: Наука, 1979.
- [3] Бердышев В. И. Полиномиальная аппроксимация, связанная с навигацией по геофизическим полям // Докл. РАН. 1992. Т. 6. С. 1099–1102.
- [4] Berdyshev V. I. Polynomial approximation and geophysical-field navigation problem // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. № 2. P. 83–100.
- [5] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [6] Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.