Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Васильев, Топологическая сложность и вещественность, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 670–680

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1880>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:04:21

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ И ВЕЩЕСТВЕННОСТЬ

В. А. Васильев

Введение

Согласно [1], *топологическая сложность алгоритма* – это число его ветвлений (операторов IF). *Топологическая сложность вычислительной задачи* – это минимальная топологическая сложность решающих ее алгоритмов.

В работах [1]–[4] исследовался этот показатель для задачи приближенного решения комплексных полиномиальных уравнений и систем, в частности, в [2] было доказано, что топологическая сложность задачи приближенного нахождения всех корней комплексного полинома вида

$$x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d \quad (1)$$

асимптотически равна $d-1$ (и равна в точности $d-1$, если d – степень простого числа). Настоящая работа посвящена вещественному аналогу этой проблемы: мы исследуем топологическую сложность приближенного нахождения одного вещественного корня вещественного полинома вида (1).

Мы используем следующее определение алгоритма (см. [1]). *Алгоритм* – это ориентированный граф с узлами следующих четырех типов: *единственный вход* (в нашем случае входные данные – это d чисел a_i); *вычислительные узлы*, в которых выполняются арифметические операции над исходными данными и числами, полученными в алгоритме ранее; *узлы ветвления*, в которых одно из чисел, найденных выше, сравнивается с нулем, и управление передается в зависимости от результата сравнения; *выходы*, в которых какие-то из полученных ранее чисел объявляются решениями задачи. Поскольку алгоритм – дерево, его топологическая сложность на 1 меньше числа выходов. Алгоритм

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95–01–00846а, и фонда INTAS, грант № 4373.

полиномиален, если его вычислительные узлы содержат лишь операции сложения, умножения и взятия постоянной функции.

Обозначим через B^d множество вещественных полиномов вида (1), все комплексные корни которых лежат в круге $|z| \leq 1$. Соответствующая задача $\Pi(\varepsilon, d)$ состоит в том, чтобы любому полиному $f \in B^d$ сопоставить вещественное число, находящееся в ε -окрестности некоторого вещественного корня f . Топологическая сложность этой задачи обозначается через $t.c.(\varepsilon, d)$, а ее предельное значение $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} t.c.(\varepsilon, d)$ — через $t.c.(d)$.

Конечно, эта задача корректна, лишь если d нечетно; аналогичная задача, имеющая смысл для любых d , состоит не в приближенном поиске некоторого корня всякого полинома $f \in B^d$, а в поиске его ε -корня, т.е. такой точки $x \in \mathbb{R}^1$, что $|f(x)| \leq \varepsilon$ (см. [3]). Именно, для любых $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ алгоритм *решает задачу* $\Pi_{\approx}(\varepsilon, \varepsilon', d)$, если для любого $f \in B^d$ он выдает на выходе либо ε -корень f , либо верное утверждение о том, что f не имеет ε' -корней.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция $t.c.(\cdot)$ монотонна: если $d' > d$ — два нечетных числа, то для любого ε $t.c.(d', \varepsilon) \geq t.c.(d, \varepsilon)$.*

Действительно, алгоритм, решающий задачу $\Pi(\varepsilon, d')$, в частности, находит вещественный корень любого полинома вида $(x^2 + 1)^{(d'-d)/2} f$, $f \in B^d$.

ТЕОРЕМА 1. 1. *Для любых $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ и любого четного $d = 2t$ топологическая сложность задачи $\Pi_{\approx}(\varepsilon, \varepsilon', d)$ не превосходит t .*

2. *При достаточно малых ε эта топологическая сложность не меньше t .*

ТЕОРЕМА 2. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $t.c.(\varepsilon, 3) \geq 1$.*

ТЕОРЕМА 3. *Для любого нечетного d и любого $\varepsilon > 0$ существует полиномиальный алгоритм топологической сложности $[d/2]$, решающий задачу $\Pi(\varepsilon, d)$.*

СЛЕДСТВИЕ. $t.c.(3) = 1$.

Оценка из теоремы 3 нереалистична уже при $d = 5$.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует полиномиальный алгоритм топологической сложности 1, решающий задачу $\Pi(\varepsilon, 5)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Все перечисленные результаты о сложности задач $\Pi(\varepsilon, d)$, $\Pi_{\approx}(\varepsilon, \varepsilon', d)$ останутся справедливы, если мы заменим множество B^d любой ограниченной областью в $\mathbb{R}^d$, содержащей окрестность полинома x^d .

§ 1. Доказательство теорем 2 и 3

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ полиномов $x^3 + ax + b$; пусть Θ – маленькая окружность с центром в точке 0 этого пространства, так что $\Theta \subset B^3$. Рассмотрим множество $M_3 \subset \Theta \times \mathbb{R}^1$, состоящее из всех пар вида {полином $f \in \Theta$; вещественный корень f }. M_3 диффеоморфно S^1 ; ограничение на M_3 очевидной проекции $\Theta \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \Theta$ имеет две точки складки над полиномами f , имеющими кратные корни (см. рис. 1).

Рис. 1. Проекция $M_3 \rightarrow \Theta$ не имеет приближенных сечений

Допустим, что $\text{t.c.}(\varepsilon, 3) = 0$, т.е. существует алгоритм без ветвлений, решающий нашу задачу. Для любых начальных данных $f = (a, b) \in \Theta$ этот алгоритм дает на выходе некоторое число $\alpha(f)$; функция $\{f \rightarrow \alpha(f)\}$ непрерывна на Θ . Для любого f значение $\alpha(f)$ должно лежать в ε -окрестности некоторой точки прообраза f при проекции $M_3 \rightarrow \Theta$. При малых ε это невозможно и теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несложный анализ этого доказательства дает точное условие на ε : утверждение теоремы 2 справедливо для любого положительного $\varepsilon < 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для любого $i = 1, 3, 5, \dots, d$ обозначим через V_i множество всех полиномов $f \in B^d$, имеющих ровно i вещественных корней (с учетом их кратностей), и через W_i – множество $V_i \cap V_{i+2} \cap \dots \cap V_d$.

На всяком V_i определена непрерывная функция $\{f \rightarrow \text{наибольший вещественный корень } f\}$; она продолжается до непрерывной функции на замыкании V_i , а следовательно, также и на некоторой открытой окрестности $\tilde{V}_i$ этого замыкания в W_i . Эта окрестность может быть выбрана настолько близкой к V_i , что для любой ее точки f значение этой продолженной функции лежит в $\varepsilon/2$ -окрестности некоторого вещественного корня f . По теореме Вейерштрасса найдется полином $\varphi_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon/2$ -аппроксимирующий эту функцию всюду в $\tilde{V}_i$, и при $i < d$ полином χ_i такой, что $V_i \subset \{\chi_i < 0\}$ и $W_{i+2} \setminus \tilde{V}_i \subset \{\chi_i > 0\}$. Искомый алгоритм выглядит так.

Вводим f . Вычисляем $\chi_1(f)$. $\chi_1(f) > 0$? Если нет, вычисляем $\varphi_1(f)$ и выдаем результат на выход. Если да, вычисляем $\chi_2(f)$. $\chi_2(f) > 0$? Если нет, вычисляем $\varphi_2(f)$ и идем на выход. Если да, вычисляем $\chi_3(f)$ и т.д.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство части 1 этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3, доказательство части 2 основано на следующем утверждении (ср. [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть существует алгоритм топологической сложности k , решающий задачу $\Pi_{\approx}(\varepsilon, \varepsilon', d)$. Тогда для любых положительных чисел $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\varepsilon}'$ таких, что $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$, $\varepsilon' > \tilde{\varepsilon}'$, найдется покрытие B^d $k+1$ открытым множеством $U_0, U_1, \dots, U_k$ и непрерывные функции $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, такие, что

- а) U_0 принадлежит множеству полиномов, не имеющих $\tilde{\varepsilon}'$ -корней;
- б) для любого $i = 1, \dots, k$ и любого $f \in U_i$ $|f(\varphi_i(x))| \leq \tilde{\varepsilon}$.

Доказательство, по существу, повторяет доказательство теоремы А из [1]. В частности, U_0 – это малая окрестность множества тех начальных данных, подав которые на вход, мы выйдем через выход, на котором написано “нет ε' -корней”; для любого из оставшихся выходов (число которых не превосходит k) соответствующее множество U_i – это малая окрестность множества тех f , подав которые на вход, мы выйдем именно через этот выход.

Пусть $d = 2m$ и $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ – некоторые m точек интервала $(-1, 1)$. Определим $\Omega \subset B^d$ как множество полиномов f , имеющих m локальных минимумов в точках α_i и таких, что $|f(\alpha_i)| \leq 2\tilde{\varepsilon}$.

ЛЕММА 1. Если $\tilde{\varepsilon}$ достаточно мало по сравнению с минимальным расстоянием между $m+2$ точками $\alpha_1, \dots, \alpha_m, 1, -1$, то

- а) для любого $f \in \Omega$ множество $\{x \mid |f(x)| \leq 2\tilde{\varepsilon}\}$ состоит из m непересекающихся отрезков (быть может, вырожденных), содержащих точки α_i ;
- б) m функций на Ω , значения которых в точке f равны $f(\alpha_i)/\tilde{\varepsilon}$, $i = 1, \dots, m$, задают гомеоморфизм многообразия Ω на куб

$$\square^m = [-2, 2]^m. \quad (2)$$

Доказательство элементарно.

Пусть $t_1, \dots, t_m$ – стандартные координаты в $\mathbb{R}^m$.

ЛЕММА 2. Допустим, что имеется покрытие B^d областями U_i и функции φ_i , удовлетворяющие условиям из предложения 2 с достаточно малыми $\tilde{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}'$. Тогда существует покрытие куба (2) $k + 1$ открытым множеством, связные компоненты которых помечены числами $0, 1, \dots, t$ таким образом, что

- а) для любого $i = 1, \dots, t$ слой $\{t \mid t_i > 1\} \subset \square^m$ не пересекается с областями, помеченными индексом i ;
- б) все области, помеченные нулем, лежат в кубе $\{t \mid t_i \in [\tilde{\varepsilon}'/\tilde{\varepsilon}, 2] \forall i\}$ (см. рис. 2а).

Действительно, эти открытые множества суть пересечения Ω с областями U_i из предложения 2; связная компонента такого множества помечена числом 0, если это компонента множества $\Omega \cap U_0$, и числом $i > 0$, если значения функции φ_i в ее точках принадлежат отрезку, содержащему точку α_i .

Вершина $(2, \dots, 2)$ (соответственно $(-2, 2, \dots, 2)$, соответственно $(2, -2, 2, \dots, 2)$ и т.д.) нашего куба может быть покрыта только компонентами, помеченными числом 0 (соответственно 1, соответственно 2 и т.д.), поэтому мы обозначим эти $t + 1$ вершин через $[0], [1], [2]$ и т.д.

Рис. 2. Куб $\square^2$ и отображение F

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если имеется нумерованное покрытие множества Ω , удовлетворяющее условиям леммы 2, то найдется точка куба (2), покрытая областями, помеченными всеми $t + 1$ возможными числами (и, следовательно, принадлежащими различным множествам U_i). В частности, в этом случае $k \geq t$.

Теорема 1 немедленно вытекает из этого предложения, доказательство которого основано на следующей лемме.

ЛЕММА 3. Если непрерывное отображение m -мерного симплекса Δ^m в себя переводит каждую грань в себя, то его образ совпадает с Δ^m (и, более того, степень индуцированного отображения сферы $\Delta^m/\partial\Delta^m$ в себя равна 1).

Это немедленно доказывается индукцией по размерности граней.

Теперь мы построим два отображения F, G куба $\square^m$ на симплекс Δ^m , первое из которых является гомеоморфизмом.

1. Сначала выполним аффинное преобразование $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, отображающее вершины $[0], [1], \dots, [m]$ куба $\square^m$ соответственно в центр 0 и концы $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ базисного репера. Затем отображим образ куба $\square^m$ (т.е. куб $\{0 \leq x_i \leq 1\}$) на симплекс $\Delta^m = \{x_1 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, \sum x_i \leq 1\}$ кусочно-линейным гомеоморфизмом главного октанта $\mathbb{R}_+^m$ на себя, сохраняющим каждую прямую, проходящую через начало координат, и линейным в ограничении на всякую такую прямую (см. рис. 2b). Искомый гомеоморфизм $F: \square^m \rightarrow \Delta^m$ является композицией этих двух.

2. Пусть $\{\chi_i\}, i = 0, 1, \dots, m$, – произвольное разбиение единицы, подчиненное нашему покрытию $\square^m$, такое, что $\chi_i \equiv 0$ вне областей, помеченных числом i . Для любого $i = 1, \dots, m$ определим $\lambda_i: \square^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ как (разрывное) отображение, переводящее объединение таких областей в базисный вектор e_i , а дополнение к таким областям – в начало координат; определим λ_0 как тождественное отображение, переводящее $\square^m$ в начало координат пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда искомое отображение $G: \square^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ определяется как $\sum_{i=0}^m \chi_i \lambda_i$.

По построению нашего нумерованного покрытия $\square^m$, отображение $G \circ F^{-1}: \Delta^m \rightarrow \Delta^m$ удовлетворяет условиям леммы 3. По определению разбиения единицы, любая точка прообраза внутренней Δ^m при этом отображении принадлежит областям, помеченным всеми $m + 1$ индексами, и предложение 3 доказано.

§ 3. Доказательство теоремы 4

3.1. Первые упрощения. Для того чтобы найти число $t.c.(d)$, достаточно решить аналогичную проблему лишь для множества полиномов (1) с $a_1 = 0$: действительно, все полиномы сводятся к таким сдвигом аргумента x (этот сдвиг не использует ветвлений и увеличивает максимальное абсолютное значение комплексных корней f менее чем вдвое).

На оставшемся пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$ полиномов вида

$$x^d + a_2 x^{d-2} + \dots + a_d \quad (3)$$

действует однопараметрическая группа $G \simeq \mathbb{R}_+$ растяжений переменной x :

$$G_t(f) = t^d f(x/t), \quad G_t(a_2, a_3, \dots, a_d) = (t^2 a_2, t^3 a_3, \dots, t^d a_d), \quad (4)$$

$t \in (0, \infty)$. Пусть Θ – произвольная гиперповерхность в $\mathbb{R}^{d-1}$, диффеоморфная S^{d-2} , отделенная от 0 и такая, что любая орбита группы (4) пересекает ее трансверсально в единственной точке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие поверхности Θ k открытыми подмножествами $U_1, \dots, U_k$ и система непрерывных функций $\varphi_i: \overline{U_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, такая, что для любого $f \in U_i$ значение $\varphi_i(f)$ лежит в ε -окрестности некоторого корня полинома f . Тогда для всякого $\varepsilon' > 0$ найдется полиномиальный алгоритм топологической сложности $k - 1$, решающий задачу $\Pi(\varepsilon', d)$; в частности, $\text{t.c.}(d) \leq k - 1$.

Это следует немедленно из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса.

В дальнейшем мы рассматриваем случай $d = 5$ и строим такое покрытие с $k = 2$. При этом мы отождествляем Θ с фактором пространства $\mathbb{R}^4 \setminus 0$ по действию группы (4) и обозначаем через $\{g\}$ точку поверхности Θ , в которой она протыкается орбитой, содержащей точку $g \in \mathbb{R}^4$.

3.2. Симплекс Δ . Обозначим через Δ пересечение топологической сферы $\Theta \subset \mathbb{R}^4$ с замыканием множества полиномов (3), имеющих 5 вещественных корней (с учетом кратностей). Это пересечение гомеоморфно трехмерному симплексу. Именно, если $x_1 \leq \dots \leq x_5$ – все корни полинома $f \in \Delta$, то координатами точки f в Δ являются три числа $(x_2 - x_1)/(x_5 - x_1)$, $(x_3 - x_1)/(x_5 - x_1)$ и $(x_4 - x_1)/(x_5 - x_1)$. Мы обозначаем эти числа через $b(f)$, $c(f)$ и $d(f)$ соответственно; очевидно, они лежат в симплексе $0 \leq b \leq c \leq d \leq 1$ в $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество Δ необъемлемо диффеоморфно симплексу. Действительно, его граница имеет ребра возврата в отрезках ($b = c = 0$), ($b = c = d$) и ($c = d = 1$) и ласточкины хвосты – в вершинах ($b = c = d = 0$) и ($b = c = d = 1$). В окрестности этих ребер (соответственно вершин) три (соответственно четыре) корня соответствующих полиномов очень близки друг к другу, именно, это корни (x_1, x_2, x_3) , (x_2, x_3, x_4) и (x_3, x_4, x_5) для ребер и (x_1, x_2, x_3, x_4) и (x_2, x_3, x_4, x_5) – для вершин.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Допустим, что $\{U_i, \varphi_i\}$ – система открытых множеств и функций, удовлетворяющих условиям предложения 4 с некоторым $\varepsilon > 0$. Тогда для любой точки ребра $\{b = 0, c = d\}$ (соответственно $\{b = 0, d = 1\}$, соответственно $\{b = c, d = 1\}$) симплекса Δ и любой области U_i этого покрытия значение соответствующей

РИС. 3. Полиномы пятой степени с пятью вещественными корнями

функции φ_i в этой точке принадлежит ε -окрестности корня x_5 (соответственно x_3 , соответственно x_1).

Действительно, любые окрестности этих точек в Θ пересекаются с множеством V_1 (см. доказательство теоремы 3), и (единственные) корни полиномов из этого множества стремятся к значению корня x_5 (соответственно x_3 , соответственно x_1), когда эти полиномы стремятся в V_1 к точкам этих ребер.

Аналогично, если точка f грани Δ покрыта областью U_i нашего покрытия, то соответствующее число $\varphi_i(f)$ лежит в ε -окрестности объединения некоторых трех корней f , номера которых зависят только от грани: например, для грани $\{b = 0\}$ эти три корня суть x_3 , x_4 и x_5 . А именно, это три корня, которые не исчезают при переходе через эту грань.

3.3. Покрытие U_i симплекса Δ . Мы рассечем симплекс Δ на три куска $\{1\}$, $\{3\}$ и $\{5\}$ поверхностями (2) и (4), как указано на рис. 3; опишем

эти поверхности.

Сначала проведем два отрезка, соединяющих точку $(1/2, 1/2, 1/2)$ с точками $(0, 0, \delta)$ и $(1 - \delta, 1, 1)$; здесь δ настолько мало, что оба эти отрезка лежат в области, где корни x_2 и x_4 не более чем $\varepsilon/4$ -разделены. Объединение T_3 этих отрезков гомеоморфно отрезку $[0, 1]$: этот гомеоморфизм реализуется координатой c .

Затем проведем два отрезка T_4 и T_2 в гранях $\{b = 0\}$ и $\{d = 1\}$ соответственно, которые соединяют точки $(0, 1, 1)$ и $(0, 0, 1)$ с концами этого отрезка T_3 ; функция c является координатой также и на обоих этих отрезках. Для любого значения $\gamma \in [0, 1]$ проведем два отрезка в плоскости $\{c = \gamma\}$, соединяющие соответствующую точку отрезка T_3 с точками T_4 и T_2 . Поверхности, замеченные такими отрезками, обозначим через (4) и (2) соответственно.

Далее, покроем Δ двумя областями $U_1(5)$, $U_2(5)$. $U_1(5)$ включает всё дополнение к поверхностям (4) и (2) плюс маленькие окрестности точек $(0, 1, 1)$ и $(0, 0, 1)$, в которых корни x_5 и x_3 (соответственно x_3 и x_1) не более чем $\varepsilon/3$ -разделены. Пусть U'_2 — очень узкая окрестность объединения поверхностей (4) и (2), так что любой путь, соединяющий вершины $(0, 1, 1)$ и $(0, 0, 1)$ внутри этой окрестности, пересекает окрестность ребра $\{b = c = d\}$, в которой x_2 и x_4 не более чем $\varepsilon/3$ -разделены. Выбросим из U'_2 очень маленькие окрестности этих двух вершин, так что остаток не пересекает ребер $\{b = 0, c = d\}$, $\{b = 0, d = 1\}$ и $\{b = c, d = 1\}$, но, тем не менее, покрывает множество $\Delta \setminus \overline{U_1(5)}$. Этот остаток обозначим через $U_2(5)$.

Теперь мы можем определить непрерывную функцию $\varphi_1(5): U_1(5) \rightarrow \mathbb{R}$ таким образом, что всюду в области множества $\Delta \setminus ((4) \cup (2))$, содержащей вершину $(0, 0, 0)$ (соответственно $(1, 1, 1)$, соответственно точку $(0, 1/2, 1)$), она не более чем $\varepsilon/3$ -удалена от значения корня x_5 (соответственно x_1 , соответственно x_3) соответствующих полиномов. Действительно, эта функция получается с помощью разбиения единицы из пяти функций, три из которых определены в этих областях и равны значениям этих корней, а оставшиеся две определены в малой окрестности точки $(0, 1, 1)$ (соответственно $(0, 0, 1)$) и равны среднему арифметическому корней x_5 и x_3 (соответственно x_3 и x_1).

Аналогично мы определяем непрерывную функцию $\varphi_2(5): U_2(5) \rightarrow \mathbb{R}$, которая всюду $\leq \varepsilon/3$ -отделена либо от x_4 (вблизи поверхности (4)), либо от x_2 (вблизи (2)). С помощью группы (4) продолжаем наше покрытие множества $\Delta \equiv V_5 \cap \Theta$ областями $U_1(5), U_2(5)$ до открытого покрытия $V_5 \cap (\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$. Наша следующая цель — продолжить это покрытие и функции $\varphi_1(5), \varphi_2(5)$ на все Θ .

Множество $V_3 \cap \mathbb{R}^4$ всех полиномов вида (3), $d = 5$, равно с тремя корнями является расслоением в смысле Серра, база которого — это простран-

ство Ω_2 всех полиномов степени 4 ровно с двумя вещественными корнями x_1, x_3 , а слой над таким полиномом g состоит из всех полиномов вида $(x - x_2)g$, где $x_2 \in [x_1, x_3]$. (Над вырожденными g , корни x_1, x_3 которых совпадают, эти слои стягиваются в точки.)

Обозначим через $\delta\Omega_2$ множество троек $\{X, x_1, x_3\} \in \mathbb{R}^3$ таких, что $x_1 \leq x_3$. Любой гладкий путь, стремящийся внутри Ω_2 к полиному с четырьмя вещественными корнями, определяет точку множества $\delta\Omega_2$: X — это новорожденный двукратный корень предельного полинома, а x_1, x_3 — два других корня, полученных по непрерывности из вещественных корней полиномов этого пути. (Отметим, что полином вида $(x - \alpha)^2(x - \beta)^2 \in \Omega_2$, $\alpha \neq \beta$, соответствует двум разным точкам $\delta\Omega_2$.) Наше расслоение над Ω_2 продолжается до расслоения над $\Omega_2 \cup \delta\Omega_2$: слой над тройкой (X, x_1, x_3) естественно отождествляется с отрезком $[x_1, x_3]$ или, эквивалентно, с множеством полиномов вида $(x - X)^2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, $x_2 \in [x_1, x_3]$.

ЛЕММА 4. *Существует непрерывное сечение нашего расслоения $\{x_2\}$ над Ω_2 , удовлетворяющее следующим граничным условиям над множеством $\delta\Omega_2$:*

1) *если для некоторой точки $g = (X, x_1, x_3) \in \delta\Omega_2$ число X лежит между x_1 и x_3 , то очевидное отображение факторизации $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \rightarrow \Theta$ переводит слой $\{x_2 \in [x_1, x_3]\}$ нашего расслоения над g в ломаную линию в $\partial\Delta$, высекаемую из объединения граней $(b = c)$ и $(c = d)$ некоторой плоскостью вида $\{c = \text{const}\}$ (а именно, $\text{const} = (X - x_1)/(x_3 - x_1)$), см. рис. 3. В частности, его образ пересекает кривую T_3 в единственной точке. В этом случае значение нашего сечения над g должно совпадать с прообразом этой точки из T_3 при этом отображении факторизации;*

2) *если точка X меньше чем x_1 (соответственно больше чем x_3), то это же отображение переводит наш слой в отрезок, высекаемый на грани $(b = 0)$ (соответственно $(d = 1)$) плоскостью вида $\{c = \text{const}\}$ где $\text{const} = (x_1 - X)/(x_3 - X)$ (соответственно $(x_3 - x_1)/(X - x_1)$). В этом случае значение нашего сечения над g должно совпадать с прообразом точки пересечения этого отрезка с отрезком T_4 (соответственно T_2).*

Действительно, нет никаких препятствий к построению такого сечения.

Определим множество $U'_1(3) \subset V_3 \cap (\mathbb{R}^4 \setminus 0)$ как дополнение к образу этого сечения и определим множество $U_1(3) \subset V_3 \cap \Theta$ как объединение множества $U'_1(3) \cap \Theta$ и окрестности ребра возврата, состоящего из всех полиномов $f \in \overline{V_3} \cap \Theta$, имеющих корни кратности 3, настолько малой, что в ней все эти три корня не более чем $\varepsilon/3$ -разделены. Тогда мы можем определить непрерывную функцию $\varphi_1(3): U_1(3) \rightarrow \mathbb{R}$, значение которой в любой точке $f \in U_1(3)$ не более чем $\varepsilon/3$ -отделено от наибольшего (x_3) или

наименьшего (x_1) корня f , а именно, в точках нашего расслоения, которые лежат “ниже” сечения (т.е. в точках слоя $\{x_2\}$ с x_2 близкими к x_1), эта функция близка к x_3 , а “выше” сечения она близка к x_1 .

Область $U_2(3) \subset V_3 \cap \Theta$ определяется как узкая окрестность образа нашего сечения, из которого выброшена очень узкая окрестность ребра возврата, так что $U_2(3) \cap \overline{V_1} = \emptyset$. Определим $\varphi_2(3): U_2(3) \rightarrow \mathbb{R}$ как функцию, сопоставляющую любому полиному его средний корень x_2 .

Наконец, положим $U_1(1) \equiv V_1 \cap \Theta$ и определим $\varphi_1(1): U_1(1) \rightarrow \mathbb{R}$ как функцию, значение которой в каждой точке f равно единственному корню полинома f .

Мы построили покрытие топологической сферы Θ пятью множествами $U_1(5)$, $U_2(5)$, $U_1(3)$, $U_2(3)$ и $U_1(1)$ и вещественную непрерывную функцию $\varphi_i(j)$ на каждом из этих множеств $U_i(j)$. По построению любая точка f открытого множества $U_1 \equiv U_1(5) \cup U_1(3) \cup U_1(1)$ обладает окрестностью Λ такой, что все значения всех трех функций $\varphi_1(5)$, $\varphi_1(3)$ и $\varphi_1(1)$ в $U_1(5) \cap \Lambda$, $U_1(3) \cap \Lambda$ и $U_1(1) \cap \Lambda$ соответственно не более чем $2\varepsilon/3$ -удалены друг от друга. Поэтому с помощью разбиения единицы мы можем построить единую непрерывную функцию φ_1 , определенную на множестве U_1 , значение которой в каждой точке f не более чем $2\varepsilon/3$ -удалено от значения соответствующей функции $\varphi_1(\cdot)$ в этой точке, а следовательно, не более чем ε -удалено от некоторого корня f : конкретнее, это всегда будет нечетный корень x_1 , x_3 или x_5 . Аналогичным образом мы склеиваем вместе функции $\varphi_2(5)$ и $\varphi_2(3)$ и получаем единую функцию φ_2 на открытом множестве $U_2 \equiv U_2(5) \cup U_2(3)$, которая всюду не более чем ε -удалена от некоторого (четного) корня.

Поскольку $U_1 \cup U_2 = \Theta$, теорема 4 полностью доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Независимый московский университет

Поступило
13.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Smale S. On the topology of algorithms. I // J. Complex. 1987. V. 3. P. 81–89.
- [2] Васильев В. А. Когомологии групп кос и сложность алгоритмов // Функцион. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 3.
- [3] Васильев В. А. Топологическая сложность алгоритмов приближенного решения систем полиномиальных уравнений // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 6. С. 98–113.
- [4] Vassiliev V. A. Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications. Revised edition. Translations of Math. Monographs. V. 98. Providence: AMS, 1994.