Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Васильев, Об алгебраической независимости периодов абелевых интегралов, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 681–691

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1881>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:58:33

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ПЕРИОДОВ АБЕЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

К. Г. Васильев

1. Введение. Рассмотрим неприводимую алгебраическую кривую $F(x, y) = 0$ рода $g \geq 1$, заданную над полем алгебраических чисел $\mathbb{A}$. На соответствующей римановой поверхности существуют $2g$ определенных над $\mathbb{A}$ дифференциалов второго рода $\varphi_1, \dots, \varphi_{2g}$ и $2g$ замкнутых путей интегрирования $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ таких, что матрица Ω , составленная из периодов

$$\omega_{ij} = \int_{\gamma_j} \varphi_i, \quad i, j = 1, \dots, 2g,$$

является невырожденной (см. [1, гл. 2, § 2, 3], [2, гл. 9, § 50]).

Для любого замкнутого пути γ и для любого дифференциала φ второго рода интеграл $\int_{\gamma} \varphi$ называется *периодом* φ .

Т. Шнейдер доказал, что все периоды дифференциала φ второго рода, определенного над $\mathbb{A}$, не могут быть алгебраическими числами (см. [3, § 1, Satz 2]). В частности, любая строка матрицы Ω содержит трансцендентное число.

Из этого результата он вывел утверждение о трансцендентности значений бета-функции Эйлера $B(a, b)$ при $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

В работе Г. В. Чудновского [4] анонсировано утверждение о том, что если $\wp$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами g_2, g_3 ; ω_1, ω_2 – фундаментальные периоды $\wp$ и $\eta_i = 2\zeta(\omega_i/2)$ ($i = 1, 2$) – квазипериоды дзета-функции, связанной с $\wp$, то среди чисел $g_2, g_3, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ два алгебраически независимы. Доказательство см. в [5].

С помощью соотношения Лежандра $\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 2\pi i$ в [4] выведено следствие: если g_2, g_3 алгебраические, а $\wp$ допускает комплексное умножение, то ω_1 и π алгебраически независимы.

Отсюда следует алгебраическая независимость от числа π некоторых значений гамма-функции Эйлера. Действительно, применяя это утверждение к кривым $y^2 = 4x^3 - 4$, $y^2 = 4x^3 - 4x$, получаем следствие об алгебраической независимости от числа π каждого из значений $\Gamma(1/3)$, $\Gamma(1/4)$.

М. Лоран в работе [6] доказывает общую теорему, из которой, в частности, следует трансцендентность отношений B -функции Эйлера, например, трансцендентность числа

$$\frac{B(7/15, 7/15)}{B(2/15, 2/15)}.$$

В настоящей работе доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Любые $g + 1$ различных строк матрицы Ω в совокупности содержат два алгебраически независимых числа.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие утверждения, доказательства которых можно найти в работах [1]–[3].

В g -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^g$ существуют $2g$ векторов $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$, линейно независимых над полем действительных чисел, и существуют $3g$ алгебраически независимых над $\mathbb{C}$ мероморфных функций $A_1, \dots, A_g, H_1, \dots, H_{2g}: \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$, которые равны нулю в начале координат и имеют следующие свойства:

1) функции $A_1(z), \dots, A_g(z)$ такие, что

$$A_i(z + \lambda_j) = A_i(z), \quad i = 1, \dots, g, \quad j = 1, \dots, 2g \quad (2)$$

(абелевы функции);

2) функции $H_1(z), \dots, H_{2g}(z)$ такие, что

$$H_i(z + \lambda_j) = H_i(z) + \omega_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2g \quad (3)$$

(квазипериодические функции).

Разложения функций $A_i(z), H_i(z)$ в ряд Тейлора в начале координат имеют коэффициенты, принадлежащие некоторому алгебраическому полю конечной степени.

Существует целая функция $\theta(z): \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\theta A_1, \dots, \theta A_g, \theta H_1, \dots, \theta H_{2g}$ – целые функции, $\theta(0) \neq 0$, и выполняются равенства

$$\theta(z + \lambda_j) = \theta(z) \exp(2\pi i(u_{1j}z_1 + \dots + u_{gj}z_g + v_j)), \quad j = 1, \dots, 2g, \quad (4)$$

где $u_{1j}, \dots, u_{gj}, v_j$ – некоторые комплексные константы.

2. Вспомогательные утверждения. Введем обозначения.

Для целого вектора $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$ положим

$$|k| = \sum_{j=1}^m |k_j|, \quad \|k\| = \max_{1 \leq j \leq m} |k_j|, \quad k \cdot \lambda = \sum_{j=1}^m k_j \lambda_j, \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}.$$

Для многочлена $P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ положим $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $\deg_x P$ – степень по совокупности переменных x , $\deg_y P$ –

степень по совокупности переменных y , $\deg P$ – степень по совокупности всех переменных, $L(P)$ – длина многочлена (сумма модулей коэффициентов), $H(P)$ – высота многочлена (максимум модулей коэффициентов).

Для оператора дифференцирования

$$\partial = \frac{\partial^m}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_g^{m_g}}$$

положим $|\partial| = m = m_1 + \dots + m_g$ – порядок. При $|\partial| = 0$ имеется ввиду тождественный оператор $\partial F \equiv F$.

Для целой функции $\Psi: \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$ пусть $|\Psi|_R$ – максимум модуля $\Psi(z)$ в шаре радиуса $R \geq 0$ с центром в начале координат.

В дальнейшем, через $c_1, c_2, \dots$ будем обозначать положительные константы, зависящие только от функций $H_1, \dots, H_{2g}, A_1, \dots, A_g, \theta$.

ЛЕММА 1 [3, § 2, Hilf. 5, 6]. *Функции $H_1, \dots, H_{2g}, A_1, \dots, A_g$ в окрестности начала координат разлагаются в степенные ряды вида*

$$\sum_{|\mu| \geq 1} b_\mu z^\mu,$$

где $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_g) \in \mathbb{Z}^g$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, g$.

Коэффициенты b_μ лежат в некотором конечном расширении $\mathbb{K}$ поля рациональных чисел и удовлетворяют условиям:

- 1) максимум модулей сопряженных $\overline{b_\mu} \leq e^{c_1 |\mu|}$;
- 2) существует натуральное число c_2 такое, что

$$(3|\mu|)! c_2^{|\mu|} b_\mu \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad |\mu| \geq 1,$$

где $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbb{K}$.

ЛЕММА 2. Пусть в условиях леммы 1 $\delta = [\mathbb{K}: \mathbb{Q}]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_\delta$ – фундаментальный базис кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $T \geq 1$, $D \geq 1$, $R \geq 2$, $n \in \{1, \dots, 2g\}$, $k = (k_1, \dots, k_{2g}) \in \mathbb{Z}^{2g}$, $\|k\| \leq R$,

$$l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad 0 \leq l_i \leq D, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_g) \in \mathbb{Z}^g, \quad 0 \leq \nu_s, \quad s = 1, \dots, g,$$

$$F_{kl\nu}(z) = (3T)! c_2^T \prod_{i=1}^n H_i^{l_i}(z + k \cdot \lambda) \prod_{s=1}^g A_s^{\nu_s}(z),$$

∂ – оператор дифференцирования порядка $|\partial| \leq T$.

Тогда

$$\partial F_{kl\nu}(0) = \sum_{\kappa} q_{\kappa} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{2g} \omega_{ij}^{\kappa_{ij}}, \quad (5)$$

где $\varkappa = (\varkappa_{ij})$, $\varkappa_{ij} \in \{0, \dots, D\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, 2g$,

$$q_{\varkappa} = \sum_{m=1}^{\delta} q_{m\varkappa} \alpha_m, \quad (6)$$

$$q_{m\varkappa} \in \mathbb{Z}, \quad |q_{m\varkappa}| \leq e^{c_3(T \ln T + D \ln R)}, \quad m = 1, \dots, \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2), (3) и леммы 1 следует, что функция $F_{kl\nu}(z)$ разлагается в ряд по степеням $z_1, \dots, z_g$ с коэффициентами из $\mathbb{K}[\omega_{ij}]_{j=1, \dots, 2g}^{i=1, \dots, n}$. Если

$$\partial = \frac{\partial^t}{\partial z_1^{t_1} \dots \partial z_g^{t_g}},$$

то по формуле Тейлора $\partial F_{kl\nu}(0)$ – коэффициент этого ряда при

$$\frac{z_1^{t_1} \dots z_g^{t_g}}{t_1! \dots t_g!}.$$

Отсюда

$$\partial F_{kl\nu}(0) = \sum_{\varkappa} q_{\varkappa} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{2g} \omega_{ij}^{\varkappa_{ij}}, \quad \text{где } q_{\varkappa} \in \mathbb{K}.$$

Так как по лемме 1 $(3|\mu|)! c_2^{|\mu|} b_{\mu} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, то $q_{\varkappa} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. По следствию 2 из [7, дополнение Д, § 3, Т. 4]

$$q_{\varkappa} = \sum_{m=1}^{\delta} q_{m\varkappa} \alpha_m, \quad \text{где } q_{1\varkappa}, \dots, q_{\delta\varkappa} \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$\sum_{\varkappa, \mu} \xi_{\varkappa\mu} \omega^{\varkappa} z^{\mu}, \quad \sum_{\varkappa, \mu} \zeta_{\varkappa\mu} \omega^{\varkappa} z^{\mu}$$

– два степенных ряда такие, что $\xi_{\varkappa\mu} \in \mathbb{K}$, $\zeta_{\varkappa\mu} \geq 0$ при всех $\varkappa, \mu$. Тогда для совокупности неравенств $|\xi_{\varkappa\mu}| \leq \zeta_{\varkappa\mu}$ введем обозначение

$$\sum_{\varkappa, \mu} \xi_{\varkappa\mu} \omega^{\varkappa} z^{\mu} \ll \sum_{\varkappa, \mu} \zeta_{\varkappa\mu} \omega^{\varkappa} z^{\mu}.$$

По лемме 1

$$\begin{aligned} F_{kl\nu}(z) &\ll (3T)! c_2^T \prod_{i=1}^n \left(R \sum_{j=1}^{2g} \omega_{ij} + \sum_{|\mu| \geq 1} e^{c_3|\mu|} z^{\mu} \right)^D \left(\sum_{|\mu| \geq 1} e^{c_3|\mu|} z^{\mu} \right)^{|\nu|} \\ &\ll (3T)! c_2^T R^{nD} \prod_{i=1}^n (\omega_{i1} + \dots + \omega_{i,2g})^D \left(1 + \sum_{|\mu| \geq 1} e^{c_4|\mu|} z^{\mu} \right). \end{aligned}$$

Отсюда $\varkappa_{ij} \in \{0, \dots, D\}$,

$$|q_{m\varkappa}| \leq c_5 \sqrt{q_{\varkappa}} \leq t_1! \dots t_g! (3T)! c_2^T R^{nD} e^{c_6 T} \leq e^{c_3(T \ln T + D \ln R)}$$

(см. [8, гл. 3, § 8, лемма 12]). Лемма доказана.

ЛЕММА 3 [9, лемма 2]. Если $P(x_1, \dots, x_g)$ – многочлен, не равный тождественно нулю, то порядок нуля функции $P(A_1(z), \dots, A_g(z))$ в начале координат не превосходит степени многочлена P .

ЛЕММА 4. Пусть

$$P(x, y) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{2g}, y_1, \dots, y_g], \quad d_1 = \deg_x P, \quad d_2 = \deg_y P, \\ \Phi(z) = P(H_1(z), \dots, H_{2g}(z), A_1(z), \dots, A_g(z)).$$

Предположим, что

$$\partial \Phi(k \cdot \lambda) = 0 \text{ при всех } k, \partial \text{ таких, что } \|k\| \leq \frac{d_1 + 1}{2}, |\partial| \leq d_2. \quad (7)$$

Тогда многочлен P – тождественный нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\Phi_l(z) = P_l(A_1(z), \dots, A_g(z)), \quad \text{где } P(x, y) = \sum_{|l| \leq d_1} P_l(y) x^l, \\ l = (l_1, \dots, l_{2g}) \in \mathbb{Z}^{2g}, \quad 0 \leq l_i, \quad i = 1, \dots, 2g.$$

Достаточно доказать, что $\partial \Phi_l(0) = 0$ при $|\partial| \leq d_2$ и всех l . Действительно, тогда порядок нуля функции $\Phi_l(z)$ в начале координат будет больше d_2 , по лемме 3 $P_l(y) \equiv 0$ при всех l , следовательно, $P(x, y) \equiv 0$, что и требовалось.

Индукция по r от 0 до d_2 . Предположение индукции:

$$\partial_1 \Phi_l(0) = 0 \text{ при } |\partial_1| < r \text{ и всех } l. \quad (8)$$

Из (2), (3), (7), (8) при $\|k\| \leq (d_1 + 1)/2$, $|\partial| = r$ получим

$$0 = \partial \Phi(k \cdot \lambda) \\ = \partial \left(\sum_l \Phi_l(z) \prod_{i=1}^{2g} H_i^{l_i}(z) \right) \Big|_{z=(k \cdot \lambda)} = \partial \left(\sum_l \Phi_l(0) \prod_{i=1}^{2g} H_i^{l_i}(k \cdot \lambda) \right) \\ = \sum_l (\partial \Phi_l(0)) \prod_{i=1}^{2g} H_i^{l_i}(k \cdot \lambda) = \sum_l (\partial \Phi_l(0)) \prod_{i=1}^{2g} (k_1 \omega_{i1} + \dots + k_{2g} \omega_{i,2g})^{l_i}.$$

Следовательно, многочлен

$$R(s_1, \dots, s_{2g}) = \sum_l (\partial \Phi_l(0)) s^l$$

имеет нули в точках вида $s = k \cdot \tau$, где $\|k\| \leq (d_1 + 1)/2$, $\tau_j = (\omega_{1j}, \dots, \omega_{2g,j}) \in \mathbb{C}^{2g}$, $j = 1, \dots, 2g$.

Так как матрица Ω невырождена, то векторы $\tau_1, \dots, \tau_{2g}$ образуют базис пространства $\mathbb{C}^{2g}$. Поэтому из [10, гл. 6, § 8, лемма 8А] следует, что $R(s) \equiv 0$, т.е. $\partial \Phi_l(0) = 0$ при всех l . Лемма доказана.

ЛЕММА 5 [11, лемма 2.1]. Пусть $G(z)$ – одна из функций $1, A_1, \dots, A_g, H_1, \dots, H_{2g}$. Тогда θG – целая функция и

$$|\theta(z)G(z)|_R \leq e^{c_7 R^2}.$$

ЛЕММА 6 [12, лемма 7]. Существуют положительные константы c_8, c_9, c_{10} , зависящие только от $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$, такие, что для любых $T \geq 1, R \geq 1, R_1 \geq c_8 R$ для любой целой функции $\Psi: \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $\partial \Psi(k \cdot \lambda) = 0$ при $|\partial| < T, \|k\| \leq R$, выполняется неравенство

$$|\Psi|_{R_1} \leq |\Psi|_{c_9 R_1} \exp(-c_{10} T R^2).$$

3. Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, можно считать, что выбраны первые $g + 1$ строк матрицы Ω .

По теореме Т. Шнейдера среди чисел

$$\omega_{ij}, \quad i = 1, \dots, g + 1, \quad j = 1, \dots, 2g, \quad (9)$$

найдется трансцендентное ω . Предположим, что среди них нет двух алгебраически независимых. Тогда по теореме о примитивном элементе существует χ – целое алгебраическое над кольцом $\mathbb{Z}[\omega]$ такое, что числа (9) и алгебраические числа $\alpha_1, \dots, \alpha_\delta$ из леммы 2 лежат в поле $\mathbb{Q}(\omega, \chi)$.

ЛЕММА 7. В условиях леммы 2 при $n = g + 1$ существует константа $C(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$, зависящая только от чисел (9), $\alpha_1, \dots, \alpha_\delta, \omega, \chi$, такая что

$$C(\omega)^D \partial F_{kl\nu}(0) = P_{\partial kl\nu}(\omega, \chi) \in \mathbb{Z}[\omega, \chi],$$

$$\deg_\chi P_{\partial kl\nu} \leq c_{11}, \quad \deg_\omega P_{\partial kl\nu} \leq c_{12} D, \quad L(P_{\partial kl\nu}) \leq e^{c_{13}(T \ln T + D \ln R)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C(\omega) = C_0(\omega)^{2g^2 + 2g + 1}$, где $C_0(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$ такое, что $C_0(\omega)\alpha_1, \dots, C_0(\omega)\alpha_\delta, C_0(\omega)\omega_{11}, \dots, C_0(\omega)\omega_{g+1, 2g}$ являются многочленами из $\mathbb{Z}[\omega, \chi]$. Подставляя эти многочлены в (5), (6) и понижая степень по χ (см. [7, гл. 9, § 2.9, лемма 6.9]), получим требуемое. Лемма доказана.

Пусть N – натуральное число, достаточно большое по отношению к $C(\omega)$ и положительным константам $c_1, c_2, \dots$, зависящим только от функций $H_1, \dots, H_{2g}, A_1, \dots, A_g, \theta$. Определим параметры

$$D = N^{6g}, \quad R = N^{3g+1}, \quad T = N^{6g+1}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = C(\omega)^D (3T)! c_2^T \sum_{l_1, \dots, l_{g+1}=0}^D \sum_{\nu_1, \dots, \nu_g=0}^D E_{l\nu}(\omega) \times H_1^{l_1}(z) \cdots H_{g+1}^{l_{g+1}}(z) A_1^{\nu_1}(z) \cdots A_g^{\nu_g}(z).$$

Коэффициенты $E_{l\nu}(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$ можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства

$$\partial\Phi(k \cdot \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad |\partial| \leq T, \quad \|k\| \leq R, \quad (10)$$

Действительно, по леммам 2, 7 условия (10) равносильны системе однородных линейных уравнений относительно $E_{l\nu}(\omega)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[\omega]$, в которой число неизвестных $S \geq D^{2g+1} = N^{12g^2+6g}$, число уравнений $B \leq c_{14}T^g R^{2g} = c_{14}N^{12g^2+3g} \leq c_{14}N^{-3g}S$. Отсюда по лемме 7 (см. [13, лемма 5.2]) при достаточно большом N имеем нетривиальное решение $E_{l\nu}(\omega)$ такое, что

$$\deg E_{l\nu} \leq c_{15}D, \quad L(E_{l\nu}) \leq e^{c_{16}(T \ln T + D \ln R)}. \quad (11)$$

Если бы выполнялись равенства $\partial\Phi(k \cdot \lambda) = 0$ при $|\partial| \leq T, \|k\| \leq R^2$, то, поскольку $D < T, D < R^2$, из леммы 4 следовало бы, что все $E_{l\nu}(\omega)$ равны нулю, а это не так. Поэтому существуют $R_0 \in \mathbb{Z}, k_0, \partial_0$ такие, что

$$R < \|k_0\| = R_0 + 1 \leq R^2, \quad |\partial_0| \leq T,$$

$$\partial\Phi(k \cdot \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad |\partial| \leq T, \quad \|k\| \leq R_0, \quad (12)$$

$$\partial\Phi(k_0 \cdot \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad |\partial| < |\partial_0|, \quad (13)$$

$$\partial_0\Phi(k_0 \cdot \lambda) \neq 0. \quad (14)$$

Из (11) и леммы 7 получим

$$\partial_0\Phi(k_0 \cdot \lambda) = P(\omega, \chi) \in \mathbb{Z}[\omega, \chi],$$

$$\deg_\chi P \leq c_{11}, \quad \deg_\omega P \leq c_{17}D, \quad L(P) \leq e^{c_{18}(T \ln T + D \ln R)}. \quad (15)$$

Пусть

$$\Theta(z) = \theta^{(2g+1)D}(z). \quad (16)$$

Так как $\theta, \theta A_i, \theta H_i$ – целые функции, то $\Psi(z) = \Theta(z)\Phi(z)$ – целая функция.

Поскольку $\|k_0\| = R_0 + 1$, то полукруг радиуса 1 с центром в точке $k_0 \cdot \lambda$ лежит в некотором шаре радиуса $c_{19}R_0$ с центром в начале координат. При $c_{19} \geq c_8$ из (12) по лемме 6 имеем

$$|\Psi|_{c_{19}R_0} \leq |\Psi|_{c_{20}R_0} \exp(-c_{10}TR_0^2),$$

где $c_{20} = c_9 c_{19}$. По лемме 5

$$|\Psi|_{c_{20}R_0} \leq e^{c_{21}DR_0^2},$$

откуда с помощью леммы 6 находим

$$|\Psi|_{c_{19}R_0} \leq e^{c_{21}DR_0^2 - c_{10}TR_0^2} < e^{-c_{22}TR_0^2}.$$

По формуле Коши

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^t \Psi(z)}{\partial z_1^{t_1} \dots \partial z_g^{t_g}} \\ &= \frac{t_1! \dots t_g!}{(2\pi i)^g} \int_{|\zeta_1 - z_1|} \dots \int_{|\zeta_g - z_g|=1} \frac{\Psi(\zeta) d\zeta}{(\zeta_1 - z_1)^{t_1+1} \dots (\zeta_1 - z_1)^{t_1+1}} \end{aligned}$$

получим

$$|\partial_0 \Psi(k_0 \cdot \lambda)| \leq T! \exp(-c_{22}TR_0^2) < \exp(-c_{23}TR_0^2).$$

С другой стороны, вследствие (13) $\partial_0 \Psi(k_0 \cdot \lambda) = \Theta(k_0 \cdot \lambda) \partial_0 \varphi(k_0 \cdot \lambda)$. Так как $\theta(0) \neq 0$, то из равенств (4), (16) получим

$$|\Theta(k_0 \cdot \lambda)|^{-1} \leq e^{c_{24}DR_0^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |P(\omega, \chi)| &= \frac{|\partial_0 \Psi(k_0 \cdot \lambda)|}{|\Theta(k_0 \cdot \lambda)|} < e^{c_{24}DR_0^2 - c_{23}TR_0^2} \\ &< e^{-c_{25}TR_0^2} \leq e^{-c_{25}TR^2} = e^{-c_{25}N^{12g+3}}. \end{aligned}$$

Из (14), (15) имеем

$$P(\omega, \chi) \neq 0, \quad \deg_\omega P \leq c_{17}N^{6g}, \quad L(P) \leq e^{c_{18}N^{6g+1} \ln N}.$$

Отсюда по лемме 5.9 [7, гл. 9, § 2.9] получим многочлен $Q(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$ такой, что

$$\deg Q \leq c_{26}N^{6g}, \quad L(Q) \leq e^{c_{27}N^{6g+1} \ln N}, \quad 0 < |Q(\omega)| < e^{-c_{28}N^{12g+3}}.$$

Так как $Q(\omega)$ зависит от N , то получим последовательность многочленов из $\mathbb{Z}[\omega]$, удовлетворяющую при достаточно больших N условиям леммы 3.9 [7, гл. 9, § 2.9]. Из этой леммы следует, что ω – алгебраическое число, а это не так.

Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Гиперэллиптическая кривая и значения гамма-функции Эйлера. Применим теорему к кривой $y^2 = 1 - x^n$ при $n \geq 3$. В этом случае род кривой $g = [(n-1)/2]$, и невырожденную матрицу Ω можно выбрать в виде

$$\omega_{ij} = \alpha_j B\left(\frac{k}{n}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{где } i, j = 1, \dots, 2g, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad k \neq \frac{n}{2},$$

α_j – некоторые алгебраические числа, отличные от нуля (см. [14, § 5.2g), р. 91]. Из доказанной теоремы получаем следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любое подмножество из $[(n+1)/2]$ элементов множества чисел*

$$B\left(\frac{k}{n}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{где } k = 1, \dots, n-1, \quad k \neq \frac{n}{2}, \quad (17)$$

содержит два алгебраически независимых числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно в матрице Ω выбрать строки, соответствующие значениям бета-функции из выбранного в следствии 1 подмножества (17).

Справедливы соотношения

$$B\left(a, \frac{1}{2}\right) = 2^{2a-1} \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)}, \quad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad (18)$$

где

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$$

– гамма-функция Эйлера. Поэтому (17) выражаются в виде рациональных функций с алгебраическими коэффициентами от чисел

$$\sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \dots, \Gamma\left(\frac{g}{n}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $n \geq 3$ – целое число, $g = [(n-1)/2]$. Тогда среди чисел*

$$\pi, \Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \dots, \Gamma\left(\frac{g}{n}\right).$$

найдутся два алгебраически независимых.

Отсюда при $n = 3, n = 4$ с учетом равенства

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{-2/3} \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2^{1/3} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

выводится утверждение Г. В. Чудновского об алгебраической независимости каждого из значений

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \Gamma\left(\frac{3}{4}\right), \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$$

от числа π (см. [5, § 1]).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $n \geq 3$ — целое число, $m = [(n+3)/4]$, $l_1, \dots, l_m$ — различные числа из множества $\{1, 2, \dots, n-1\}$ такие, что

- 1) $l_j \neq n - l_k$ при всех $j, k \in \{1, \dots, m\}$;
- 2) для любого $s \in \{1, \dots, m-1\}$ существует k такое, что

$$\langle 2l_s \rangle \in \left\{ \frac{n}{2}, l_k, n - l_k \right\},$$

где $\langle l \rangle$ — наименьший неотрицательный вычет $l \bmod n$.

Тогда среди чисел

$$\pi, \Gamma\left(\frac{2l_m}{n}\right), \Gamma\left(\frac{l_1}{n}\right), \dots, \Gamma\left(\frac{l_m}{n}\right) \quad (19)$$

найдутся два алгебраически независимых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем по индукции существование $l_1, \dots, l_m$, удовлетворяющих условию. В качестве l_1 можно выбрать любое из чисел $1, \dots, n-1$, не равное $n/2$. Пусть при некотором $r \in \{1, \dots, m-1\}$ различные числа $l_1, \dots, l_r \in \{1, \dots, n-1\}$ удовлетворяют условиям 1), 2) при $j \leq r, k \leq r, s \leq r-1$. Тогда мощность множества

$$M_r = \left\{ \frac{n}{2}, l_1, \dots, l_r, n - l_1, \dots, n - l_r \right\}$$

не превосходит $2r+1 \leq 2m-1 < n-1$. Поэтому множество $M_r^c = \{1, \dots, n-1\} \setminus M_r$ не пусто. Если $\langle 2l_r \rangle \in M_r$, то в качестве l_{r+1} выберем произвольное число из M_r^c . Если же $\langle 2l_r \rangle \in M_r^c$, то положим $l_{r+1} = \langle 2l_r \rangle$ или $l_{r+1} = n - \langle 2l_r \rangle$. Тогда $l_1, \dots, l_{r+1}$ будут различными числами, удовлетворяющими условиям 1), 2) при $j \leq r+1, k \leq r+1, s \leq r$. Существование $l_1, \dots, l_m$ доказано.

По условию числа $n/2, l_1, \dots, l_m, n - l_1, \dots, n - l_m$ различны.

При $g = [(n-1)/2]$ имеем $2m > g \geq 1$, и следствие 1 доказывает существование двух алгебраически независимых среди значений

$$B\left(\frac{l_1}{n}, \frac{1}{2}\right), \dots, B\left(\frac{l_m}{n}, \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{n-l_1}{n}, \frac{1}{2}\right), \dots, B\left(\frac{n-l_m}{n}, \frac{1}{2}\right). \quad (20)$$

Условие 2), формулы (18), тождество $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ позволяют выразить числа (20) в виде алгебраических функций от (19), что и завершает доказательство.

Например, среди чисел

$$\pi, \Gamma\left(\frac{1}{15}\right), \Gamma\left(\frac{2}{15}\right), \Gamma\left(\frac{4}{15}\right), \Gamma\left(\frac{8}{15}\right)$$

по следствию 3 найдутся два алгебраически независимых. Здесь $n = 15$, $m = 4$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 4$, $l_4 = 8$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мамфорд Д. Лекции о η -функциях. М.: Мир, 1988.
- [2] Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
- [3] Schneider Т. Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale // J. Reine Angew. Math. 1941. V. 183. № 2. P. 110–128.
- [4] Чудновский Г.В. Алгебраическая независимость постоянных, связанных с экспоненциальной и эллиптической функциями // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. № 8. С. 697–700.
- [5] Waldschmidt М. Les travaux de G. V. Chudnovskii sur les nombres transcendants // Lecture Notes in Math. V. 567. Berlin: Springer, 1977. P. 274–292.
- [6] Laurent М. Sur la transcendance du rapport de deux integrales euleriennes // Progress in Math. 1983. V. 31.
- [7] Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [8] Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [9] Masser D. W. On the periods of abelian functions in two variables // Mathematika. 1975. V. 22. № 2. P. 97–107.
- [10] Шмидт В. Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983.
- [11] Masser D. W. The transcendence of certain quasi-periods associated with abelian functions in two variables // Compositio Math. 1977. V. 35. № 3. P. 239–258.
- [12] Masser D. W. Diophantine approximation and lattices with complex multiplication // Invent. Math. 1978. V. 45. P. 61–82.
- [13] Brownawell W. D. Gelfond's method for algebraic independence // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 210. P. 1–26.
- [14] Waldschmidt М. Nombres transcendants et groupes algebriques. V. 69–70: Asterisque, 1979.