Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, А. Э. Рууге, О некоторых тождествах для интегродифференциальных уравнений, описывающих квазичастицы на изоэнергетической поверхности, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 692–707

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1882>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:40:35

О НЕКОТОРЫХ ТОЖДЕСТВАХ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ КВАЗИЧАСТИЦЫ НА ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. П. Маслов, А. Э. Рууге

1. Уравнения для квазичастиц, отвечающих интегральному уравнению вида [1], [2]

$$w(x) = u(x) + \frac{\int V(x - \xi) (\lambda - w(\xi))_+^{(n-2)/2} d\xi}{\int (\lambda - w(\xi))_+^{(n-2)/2} d\xi}, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = \text{const} \in \mathbb{R}$, $u(x)$ и $V(x - \xi)$ — гладкие вещественнозначные функции (внешний потенциал и потенциал взаимодействия), описывающие поведение самосогласованного потенциала для бозонов [3] в случае, когда уравнениям Ньютона с потенциалом $w(x)$ отвечает эргодическая динамическая система, были приведены в [4], [5]. Напомним полученный результат.

На поверхности постоянной энергии, отвечающей функции Гамильтона

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + w(x), \quad (2)$$

рассматриваются локальные координаты $(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, \check{p}_l, \dots, p_n)$ или $(x_1, \dots, \check{x}_k, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$, где галочка означает пропуск соответствующей переменной. Поскольку в этих картах импульсы и координаты равнозначны, то удобнее вместо гамильтониана (2) рассматривать более общий $H(z)$, $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \equiv (x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$. Тогда уравнение (1) заменится на более общее и существенно более сложное:

$$H(z) = H_0(z) + \frac{\int H_{\text{int}}(z, \zeta) \delta(\lambda - H(\zeta)) d\zeta}{\int \delta(\lambda - H(\zeta)) d\zeta},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01544.

где $H_0(z)$ и $H_{\text{int}}(z, \zeta)$ – гладкие вещественнозначные функции (одночастичный гамильтониан и гамильтониан взаимодействия между частицами).

Рассмотрим поверхность уровня гамильтониана $H(z)$, отвечающую энергии λ ,

$$M = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : H(z) = \lambda\}.$$

Предположим, что M – компактное многообразие, $|\nabla H|^2|_M \neq 0$, и гамильтонов поток g_H^t , соответствующий гамильтониану $H(z)$, эргодичен на M . Напишем для данного случая систему уравнений, определяющую спектр классических квазичастиц.

Покроем многообразие M конечным числом карт $\{\Omega_j\}$ с локальными координатами $(z_1, z_2, \dots, \tilde{z}_{l_j}, \dots, z_{2n})$, где l_j – номер пропущенной координаты в карте Ω_j , $1 \leq l_j \leq 2n$, и зададим разбиение единицы $\{e_j(z)\}$ в малой окрестности M , подчиненное данному покрытию.

Для каждой карты Ω_j определим оператор замены переменных U_j :

$$U_j f = f|_M(\alpha(z_1, \dots, \tilde{z}_{l_j}, \dots, z_{2n})), \quad (3)$$

где $\alpha(z_1, \dots, \tilde{z}_{l_j}, \dots, z_{2n}) \in \Omega_j$ – точка на M , имеющая в карте Ω_j локальные координаты $z_1, \dots, \tilde{z}_{l_j}, \dots, z_{2n}$.

Рассмотрим набор гладких функций $b_j(z_1, \dots, \tilde{z}_{l_j}, \dots, z_{2n})$ и $a_j(z_1, \dots, \tilde{z}_{l_j}, \dots, z_{2n})$, определенных в окрестности Ω_j и удовлетворяющих в точках, соответствующих пересечению карт, соотношениям

$$b_j = U_j b_k, \quad (4)$$

$$a_j = U_j \left[a_k - i \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial z_{l_j}} \right)^{-1} \frac{\partial b_k}{\partial z_{l_j}}, H \right\} \right]. \quad (5)$$

Спектр классических квазичастиц $\{\omega\}$ находится из системы уравнений на собственные значения

$$\omega b_j = U_j [i\{b_j, H\} + iI], \quad (6)$$

$$\omega a_j = U_j \left[i\{a_j, H\} + \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial z_{l_j}} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{l_j}} (\{b_j, H\} + I), H \right\} \right], \quad (7)$$

где

$$I(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_k \int d\zeta_1 \cdots d\tilde{\zeta}_{l_k} \cdots d\zeta_{2n} \times U_k \left[\left(\frac{\partial H(\zeta)}{\partial \zeta_{l_k}} \right)^{-1} (i a_k e_k(\zeta) H_{\text{int}}(z, \zeta) + \{b_k, e_k(\zeta) H_{\text{int}}(z, \zeta)\}) \right], \quad (8)$$

где

$$\Gamma(\lambda) = \int \delta(\lambda - H(z)) dz; \quad (9)$$

у функций a_k и b_k в подынтегральном выражении опущены аргументы $(\zeta_1, \dots, \tilde{\zeta}_{l_k}, \dots, \zeta_{2n})$; скобки Пуассона и оператор U_k берутся по переменным ζ .

2. Сформулируем теперь задачу для определения спектра классических квазичастиц в другом виде.

Обозначим через $\partial/\partial E$ произвольное векторное поле в окрестности M , удовлетворяющее условию $\frac{\partial}{\partial E}(H) = 1$.

Определим оператор $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \frac{1}{2} \left(\{ \cdot, H \} \frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}^* \{ \cdot, H \} \right), \quad (10)$$

где значок '*' обозначает сопряжение.

Определим оператор на многообразии $\hat{\mathcal{L}}: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$,

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{B} \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right] \tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E}^* \right] \tilde{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad (11)$$

где $\partial/\partial \tau$ – производная вдоль гамильтоновой траектории на M , $\mathcal{B}$ – оператор ограничения на M , $\tilde{\mathcal{B}}$ – произвольный оператор, продолжающий функции на M на окрестность M . Покажем, что данное определение корректно, т.е. оператор $\hat{\mathcal{L}}$ не зависит от способа выбора оператора $\tilde{\mathcal{B}}$. Действительно, векторное поле $[\{ \cdot, H \}, \partial/\partial E]$ касается многообразия M , так как удовлетворяет условию $[\{ \cdot, H \}, \partial/\partial E](H) = 0$. Следовательно, оператор $\mathcal{B}[\{ \cdot, H \}, \partial/\partial E] \tilde{\mathcal{B}}$ не зависит от $\tilde{\mathcal{B}}$. Далее, оператор $\mathcal{B}[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E}^*] \tilde{\mathcal{B}}$ тоже не зависит от выбора $\tilde{\mathcal{B}}$, так как $\frac{\partial}{\partial E}^* = (\frac{\partial}{\partial E}^* 1) - \frac{\partial}{\partial E}$, и, следовательно,

$$\mathcal{B} \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E}^* \right] \tilde{\mathcal{B}} = \left\{ H, \left(\frac{\partial}{\partial E}^* 1 \right) \right\} \Big|_M - \mathcal{B} \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right] \tilde{\mathcal{B}}.$$

Таким образом, $\hat{\mathcal{L}}$ не зависит от $\tilde{\mathcal{B}}$.

Обозначим через $d\nu(\alpha)$ инвариантную меру на M такую, что

$$\frac{\int \varphi(z) \delta(\lambda - H(z)) dz}{\int \delta(\lambda - H(z)) dz} = \int_M \varphi|_M(\alpha) d\nu(\alpha),$$

для любой $\varphi(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Рассмотрим систему уравнений на собственные значения для пары функций $b(\alpha), c(\alpha) \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} \omega b(\alpha) - i \frac{\partial b(\alpha)}{\partial \tau} + \int_M d\nu(\beta) \{ ib(\beta) \hat{R}_\zeta H_{\text{int}}(z(\alpha), \zeta(\beta)) \\ + c(\beta) H_{\text{int}}(z(\alpha), \zeta(\beta)) \} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \omega c(\alpha) - i \frac{\partial c(\alpha)}{\partial \tau} + \hat{\mathcal{L}} b(\alpha) + \int_M d\nu(\beta) \{ b(\beta) \hat{R}_\zeta \hat{R}_z H_{\text{int}}(z(\alpha), \zeta(\beta)) \\ - ic(\beta) \hat{R}_z H_{\text{int}}(z(\alpha), \zeta(\beta)) \} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где индексы у операторов $\hat{R}$ в подынтегральных выражениях обозначают переменные, по которым они действуют на функцию $H_{\text{int}}(z, \zeta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Спектр системы уравнений (12), (13) и спектр системы (4)–(8) совпадают.*

Запишем систему (12), (13) в матричном виде

$$\omega \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где операторы $\hat{G}_{ij}: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $i, j = 1, 2$, действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{11}\Phi(\alpha) &= i \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \tau} - i \int_M d\nu(\beta) \Phi(\beta) \hat{R}_\zeta H_{\text{int}}(z(\alpha), \zeta(\beta)), \\ \hat{G}_{12}\Phi(\alpha) &= - \int_M d\nu(\beta) \Phi(\beta) H_{\text{int}}(z(\alpha), \zeta(\beta)), \\ \hat{G}_{21}\Phi(\alpha) &= -\hat{\mathcal{L}}\Phi(\alpha) - \int_M d\nu(\beta) \Phi(\beta) \hat{R}_\zeta \hat{R}_z H_{\text{int}}(z(\alpha), \zeta(\beta)), \\ \hat{G}_{22}\Phi(\alpha) &= i \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \tau} + i \int_M d\nu(\beta) \Phi(\beta) \hat{R}_z H_{\text{int}}(z(\alpha), \zeta(\beta)). \end{aligned}$$

Рассмотрим пространство, элементами которого являются столбцы двух гладких функций на M , и определим в нем индефинитную метрику (псевдоскалярное произведение):

$$\left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_M d\nu(\alpha) (b_1^*(\alpha) c_2(\alpha) + c_1^*(\alpha) b_2(\alpha)). \quad (15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если функция $H_{\text{int}}(z, \zeta)$ удовлетворяет условию $H_{\text{int}}(z, \zeta) = H_{\text{int}}(\zeta, z)$, то оператор $\begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{bmatrix}$ симметричен относительно индефинитной метрики (15).*

Заметим теперь, что векторное поле $\partial/\partial E$, удовлетворяющее условию $\frac{\partial}{\partial E}(H) = 1$, не единственно. Пусть $\frac{\partial}{\partial E}'$ – другое векторное поле в окрестности M , удовлетворяющее условию $\frac{\partial}{\partial E}'(H) = 1$. В этом случае можно написать систему уравнений, аналогичную (14), для другой пары функций $b'(\alpha)$ и $c'(\alpha)$. Ниже мы получим преобразование, переводящее систему уравнений (14) для $b(\alpha)$ и $c(\alpha)$ в систему для $b'(\alpha)$ и $c'(\alpha)$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Невырожденное преобразование*

$$\begin{pmatrix} b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\hat{S} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}' \right) \tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial E}^* - \frac{\partial}{\partial E}'^* \right) \tilde{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right],$$

переводит систему уравнений (14) для $b(\alpha)$ и $c(\alpha)$ в систему уравнений для $b'(\alpha)$ и $c'(\alpha)$ и является “унитарным” относительно индефинитной метрики (15).

3. Перейдем теперь к доказательству предложения 1. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Если векторное поле*

$$Y = \sum_{s=1}^{2n} Y_s(z) \frac{\partial}{\partial z_s},$$

где $Y_s(z)$ — гладкие вещественные функции, удовлетворяет в некоторой окрестности многообразия M условию $Y(H) = 0$, то для любых гладких функций $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ справедлива формула

$$\int dz \delta(\lambda - H(z)) \varphi(z) Y \Phi(z) = \int dz \delta(\lambda - H(z)) \Phi(z) Y^* \varphi(z). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\int dz \delta(\lambda - H(z)) \varphi(z) Y \Phi(z) = \int dz \Phi(z) Y^* \delta(\lambda - H(z)) \varphi(z).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} Y^* \delta(\lambda - H(z)) &= - \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial z_s} Y_s(z) \delta(\lambda - H(z)) \\ &= \sum_{s=1}^{2n} Y_s H_{z_s} \frac{\partial \delta(\lambda - H)}{\partial \lambda} - \delta(\lambda - H) \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial z_s} Y_s \\ &= \delta(\lambda - H(z)) Y^*, \end{aligned}$$

получим (17). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для любых гладких функций $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ имеют место формулы

$$\begin{aligned} \int dz \delta(\lambda - H(z)) \varphi \{H, \Phi\} &= - \int dz \delta(\lambda - H(z)) \Phi \{H, \varphi\}, \quad (18) \\ \int dz \delta(\lambda - H(z)) \varphi \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right] \Phi &= \int dz \delta(\lambda - H(z)) \Phi \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right]^* \varphi. \quad (19) \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $Y = \sum_s Y_s(z) \frac{\partial}{\partial z_s}$ — произвольное векторное поле в окрестности M . Имеет место формула

$$U_j Y (1 - U_j) = U_j Y(H) H_{z_{l_j}}^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{l_j}},$$

где оператор U_j имеет вид (3), l_j — номер пропущенной координаты в карте Ω_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} U_j Y(1 - U_j) &= U_j \sum_s Y_s \frac{\partial}{\partial z_s} (1 - U_j) \\ &= U_j \sum_s Y_s \left(\frac{\partial}{\partial z_s} - U_j \left(\frac{\partial}{\partial z_s} - \frac{H_{z_s}}{H_{z_{l_j}}} \frac{\partial}{\partial z_{l_j}} \right) \right) \\ &= U_j \sum_s Y_s H_{z_s} H_{z_{l_j}}^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{l_j}} = U_j Y(H) H_{z_{l_j}}^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{l_j}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Независимо от выбора векторного поля $\partial/\partial E$, для оператора $\hat{R}$, определяемого формулой (10), имеет место равенство

$$U_j \hat{R}(1 - U_j) = U_j \{ \cdot, H \} H_{z_{l_j}}^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{l_j}}, \quad (20)$$

где U_j — оператор замены переменных в карте Ω_j (3), l_j — номер пропущенной координаты в карте Ω_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению,

$$U_j \hat{R}(1 - U_j) = \frac{1}{2} U_j \left(\{ \cdot, H \} \frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}^* \{ \cdot, H \} \right) (1 - U_j).$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial E}^* = \left(\frac{\partial}{\partial E}^* 1 \right) - \frac{\partial}{\partial E}$, оператор $U_j \hat{R}(1 - U_j)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_j \hat{R}(1 - U_j) &= \frac{1}{2} U_j \left(2 \{ \cdot, H \} \frac{\partial}{\partial E} + \left[\frac{\partial}{\partial E}, \{ \cdot, H \} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial E}^* 1 \right) \{ \cdot, H \} \right) (1 - U_j). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\{ \cdot, H \}(H) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial E}, \{ \cdot, H \} \right](H) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial E}(H) = 1,$$

и применяя лемму 2, получим

$$\begin{aligned} U_j \hat{R}(1 - U_j) &= U_j \{ \cdot, H \} U_j \frac{\partial}{\partial E} (1 - U_j) \\ &= U_j \{ \cdot, H \} U_j H_{z_{l_j}}^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{l_j}} = U_j \{ \cdot, H \} H_{z_{l_j}}^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{l_j}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для любых $f(z), g(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ справедлива формула

$$\begin{aligned} & \int dz \delta(\lambda - H(z)) [g(z) \hat{R}f(z) - f(z) \hat{R}g(z)] \\ &= \int dz \delta(\lambda - H(z)) \{f(z), g(z)\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где оператор $\hat{R}$ имеет вид (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем интеграл в правой части формулы (21)

$$\begin{aligned} & \int dz \delta(\lambda - H(z)) \{f(z), g(z)\} \\ &= \int dz \delta(\lambda - H(z)) \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_s} \frac{\partial g}{\partial z_{n+s}} - \frac{\partial f}{\partial z_{n+s}} \frac{\partial g}{\partial z_s} \right) \\ &= \int dz g(z) \sum_{s=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial z_{n+s}} \delta(\lambda - H) \frac{\partial f}{\partial z_s} + \frac{\partial}{\partial z_s} \delta(\lambda - H) \frac{\partial f}{\partial z_{n+s}} \right) \\ &= \int dz g(z) \frac{\partial \delta(\lambda - H)}{\partial \lambda} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial z_{n+s}} \frac{\partial f}{\partial z_s} - \frac{\partial H}{\partial z_s} \frac{\partial f}{\partial z_{n+s}} \right) \\ &= - \int dz g(z) \left(\frac{\partial}{\partial E} \delta(\lambda - H) \right) \{f, H\} \\ &= - \int dz \delta(\lambda - H) \frac{\partial}{\partial E}^* g \{f, H\} \\ &= \int dz \delta(\lambda - H) \left[\frac{\partial g}{\partial E} \{f, H\} - g \frac{\partial}{\partial E}^* \{f, H\} \right]. \end{aligned}$$

Применяя формулу (18), получаем

$$\int dz \delta(\lambda - H) \{f, g\} = - \int dz \delta(\lambda - H) \left[f \{ \cdot, H \} \frac{\partial}{\partial E} g + g \frac{\partial}{\partial E}^* \{f, H\} \right].$$

Аналогично,

$$\int dz \delta(\lambda - H) \{g, f\} = - \int dz \delta(\lambda - H) \left[g \{ \cdot, H \} \frac{\partial}{\partial E} f + f \frac{\partial}{\partial E}^* \{g, H\} \right].$$

Вычитая эти два равенства, получим

$$\begin{aligned} 2 \int dz \delta(\lambda - H) \{f, g\} &= \int dz \delta(\lambda - H) \left[g \left(\{ \cdot, H \} \frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}^* \{ \cdot, H \} \right) f \right. \\ &\quad \left. - f \left(\{ \cdot, H \} \frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}^* \{ \cdot, H \} \right) g \right]. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом определения (10) оператора $\hat{R}$ следует (21). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. В силу формулы (20) уравнения (4)–(7) можно записать в виде

$$b_j = U_j b_k, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} a_j &= U_j a_k - i U_j \widehat{R}(1 - U_j) b_k, \\ \omega b_j &= i U_j (\{b_j, H\} + I), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\omega a_j = i U_j \{a_j, H\} + U_j \widehat{R}(1 - U_j) (\{b_j, H\} + I), \quad (24)$$

где I имеет вид (8). Сделаем в этих уравнениях замену

$$c_j = a_j - i U_j \widehat{R} b_j. \quad (25)$$

Несложно убедиться, что в точках, соответствующих пересечению карт, выполняются соотношения

$$c_j = U_j c_k. \quad (26)$$

Уравнение (24) при замене (25), с учетом тождества $U_j \{\cdot, H\} U_j = U_j \{\cdot, H\}$, принимает вид

$$\omega(c_j + i U_j \widehat{R} b_j) = i U_j \{\cdot, H\} (c_j + i U_j \widehat{R} b_j) + U_j \widehat{R}(1 - U_j) (\{b_j, H\} + I).$$

С другой стороны, из (23) следует, что

$$-i \omega U_j \widehat{R} b_j = U_j \widehat{R} U_j (\{b_j, H\} + I).$$

Складывая последние два равенства, получаем уравнение

$$\omega c_j = i U_j \{c_j, H\} + U_j [\widehat{R}, \{\cdot, H\}] b_j + U_j \widehat{R} I. \quad (27)$$

Выразим теперь интегральный член $I(z)$ через b_j и c_j

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_k \int d\zeta_1 \cdots d\check{\zeta}_{l_k} \cdots d\zeta_{2n} \\ &\quad \times U_k \left[\left(\frac{\partial H(\zeta)}{\partial \zeta_{l_k}} \right)^{-1} (i a_k e_k(\zeta) H_{\text{int}}(z, \zeta) + \{b_k, e_k(\zeta) H_{\text{int}}(z, \zeta)\}) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_k \int d\zeta \delta(\lambda - H(\zeta)) \\ &\quad \times [e_k(\zeta) H_{\text{int}}(z, \zeta) (i c_k - \widehat{R} b_k) + \{b_k, e_k(\zeta) H_{\text{int}}(z, \zeta)\}]. \end{aligned}$$

Применяя формулу (21), получаем

$$I(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_k \int d\zeta \delta(\lambda - H(\zeta)) [i c_k e_k(\zeta) H_{\text{int}}(z, \zeta) - b_k \widehat{R} e_k(\zeta) H_{\text{int}}(z, \zeta)].$$

В полученном выражении у функций b_k и c_k опущены аргументы $\zeta_1, \dots, \zeta_k, \dots, \zeta_{2n}$, оператор $\widehat{R}$ действует по переменным ζ , $\Gamma(\lambda)$ имеет вид (9).

Поскольку в соответствии с формулами (22) и (26) функции b_j и c_j преобразуются при переходе из карты в карту при помощи обычной замены переменных, то возможно определить следующую пару функций $b(\alpha)$ и $c(\alpha)$ на многообразии M

$$\alpha \in \Omega_j \Rightarrow b(\alpha) = b_j|_{\Omega_j}, \quad (28)$$

$$c(\alpha) = c_j|_{\Omega_j} = (a_j - i\widehat{R}b_j)|_{\Omega_j}. \quad (29)$$

Из (23) и (27) вытекают следующие уравнения для $b(\alpha)$ и $c(\alpha)$:

$$\omega b(\alpha) = i \frac{\partial b(\alpha)}{\partial \tau} + iI|_M, \quad (30)$$

$$\omega c(\alpha) = i \frac{\partial c(\alpha)}{\partial \tau} + \mathcal{B}[\widehat{R}, \{\cdot, H\}] \widetilde{\mathcal{B}}b(\alpha) + (\widehat{R}I)|_M. \quad (31)$$

Заметим, что коммутатор $[\widehat{R}, \{\cdot, H\}]$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} [\widehat{R}, \{\cdot, H\}] &= \frac{1}{2} \left[\{\cdot, H\} \frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}^* \{\cdot, H\}, \{\cdot, H\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \{\cdot, H\} \left[\frac{\partial}{\partial E}, \{\cdot, H\} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial E}^*, \{\cdot, H\} \right] \{\cdot, H\}. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание определение (11) оператора $\widehat{\mathcal{L}}$, получим

$$\mathcal{B}[\widehat{R}, \{\cdot, H\}] \widetilde{\mathcal{B}} = -\widehat{\mathcal{L}}.$$

С учетом последнего равенства уравнение (31) принимает вид

$$\omega c(\alpha) = i \frac{\partial c(\alpha)}{\partial \tau} - \widehat{\mathcal{L}}b(\alpha) + (\widehat{R}I)|_M. \quad (32)$$

Интегральный член $I(z)$ выражается через функции $b(\alpha)$ и $c(\alpha)$ следующим образом:

$$I(z) = \int_M d\nu(\beta) [ic(\beta)H_{\text{int}}(z, \zeta(\beta)) - b(\beta)\widehat{R}_\zeta H_{\text{int}}(z, \zeta(\beta))],$$

где индекс ζ у оператора $\widehat{R}$ в подынтегральном выражении означает, что он действует по переменным ζ .

Подставляя последнее выражение в уравнения (30) и (32), получим (12), (13). Предложение 1 доказано.

4. Перейдем теперь к доказательству предложения 2. Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 5. Оператор $\widehat{\mathcal{L}}$, имеющий вид (11), самосопряжен относительно скалярного произведения

$$(\varphi, \Phi) = \int_M d\nu(\alpha) \varphi^*(\alpha) \Phi(\alpha), \quad (33)$$

где $\varphi(\alpha), \Phi(\alpha) \in C^\infty(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi, \Phi \in C^\infty(M)$. По определению,

$$\begin{aligned} (\varphi, \widehat{\mathcal{L}}\Phi) &= \frac{1}{2} \int_M d\nu(\alpha) \varphi^*(\alpha) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{B} \left[\{ \cdot, H \} \frac{\partial}{\partial E} \right] \widetilde{\mathcal{B}} \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{B} \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right]^* \widetilde{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Phi(\alpha) \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\lambda)} \int dz \delta(\lambda - H(z)) (\widetilde{\mathcal{B}}\varphi^*) \left(\{ \cdot, H \} \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right]^* \{ \cdot, H \} \right) (\widetilde{\mathcal{B}}\Phi), \end{aligned}$$

где $\Gamma(\lambda)$ имеет вид (9).

Применяя формулы (18) и (19), получим

$$\begin{aligned} (\varphi, \widehat{\mathcal{L}}\Phi) &= \frac{1}{2\Gamma(\lambda)} \int dz \delta(\lambda - H(z)) (\widetilde{\mathcal{B}}\Phi) \left(- \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right]^* \{ \cdot, H \} \right. \\ &\quad \left. + \{ \cdot, H \} \left[\{ \cdot, H \}, \frac{\partial}{\partial E} \right] \right) (\widetilde{\mathcal{B}}\varphi^*) = (\widehat{\mathcal{L}}\varphi, \Phi). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Пусть $b_1(\alpha), c_1(\alpha), b_2(\alpha), c_2(\alpha) \in C^\infty(M)$. По определению

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \widehat{G}_{11} & \widehat{G}_{12} \\ \widehat{G}_{21} & \widehat{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (b_1, \widehat{G}_{21}b_2) + (b_1, \widehat{G}_{22}c_2) + (c_1, \widehat{G}_{11}b_2) + (c_1, \widehat{G}_{12}c_2), \end{aligned}$$

где скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ имеет вид (33).

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{bmatrix} \widehat{G}_{11} & \widehat{G}_{12} \\ \widehat{G}_{21} & \widehat{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (\widehat{G}_{11}b_1, c_2) + (\widehat{G}_{12}c_1, c_2) + (\widehat{G}_{21}b_1, b_2) + (\widehat{G}_{22}c_1, b_2). \end{aligned}$$

Из написанных равенств следует, что если мы покажем, что для любых $\varphi, \Phi \in C^\infty(M)$ имеют место соотношения

$$(\varphi, \widehat{G}_{12}\Phi) = (\widehat{G}_{12}\varphi, \Phi), \quad (34)$$

$$(\varphi, \widehat{G}_{21}\Phi) = (\widehat{G}_{21}\varphi, \Phi), \quad (35)$$

$$(\varphi, \widehat{G}_{11}\Phi) = (\widehat{G}_{22}\varphi, \Phi), \quad (36)$$

то предложение 2 будет доказано.

В самом деле, равенство (34) непосредственно вытекает из условия $H_{\text{int}}(z, \zeta) = H_{\text{int}}(\zeta, z)$. Равенство (35) следует из условия $H_{\text{int}}(z, \zeta) = H_{\text{int}}(\zeta, z)$ и самосопряженности оператора $\widehat{\mathcal{L}}$ относительно инвариантной меры $d\nu(\alpha)$. Равенство (36) следует из условия $H_{\text{int}}(z, \zeta) = H_{\text{int}}(\zeta, z)$ и самосопряженности оператора $i\frac{\partial}{\partial\tau}$ относительно инвариантной меры $d\nu(\alpha)$.

Предложение 2 доказано.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Прежде всего заметим, что преобразование (16) является невырожденным, так как обратное преобразование существует и имеет вид

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i\widehat{S} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

Из доказательства предложения 1 следует, что $b(\alpha)$ и $c(\alpha)$ связаны с функциями b_j и a_j исходной системы уравнений (4)–(8) следующими соотношениями (см. (28), (29)):

$$\alpha \in \Omega_j \Rightarrow b(\alpha) = b_j|_{\Omega_j}, \quad c(\alpha) = (a_j - i\widehat{R}b_j)|_{\Omega_j}.$$

Аналогично,

$$\alpha \in \Omega_j \Rightarrow b'(\alpha) = b_j|_{\Omega_j}, \quad c'(\alpha) = (a_j - i\widehat{R}b_j)|_{\Omega_j}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} b'(\alpha) - b(\alpha) &= 0, \\ c'(\alpha) - c(\alpha) &= -i(\widehat{R}' - \widehat{R})b_j|_{\Omega_j} \\ &= -\frac{i}{2} \left(\{ \cdot, H \} \left(\frac{\partial}{\partial E}{}' - \frac{\partial}{\partial E} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial E}{}'^* - \frac{\partial}{\partial E}{}^* \right) \{ \cdot, H \} \right) b_j \Big|_{\Omega_j} \end{aligned} \quad (37)$$

для любых $\alpha \in \Omega_j$.

Поскольку векторное поле $\frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}'$ касается многообразия M , так как $(\frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}')(H) = 0$, то

$$\begin{aligned} c'(\alpha) - c(\alpha) &= \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}' \right) \tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial E}^* - \frac{\partial}{\partial E}'^* \right) \tilde{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) b(\alpha) \\ &= i \hat{S} b(\alpha), \quad \alpha \in \Omega_j. \end{aligned} \quad (38)$$

Соотношения (37) и (38) справедливы в каждой карте Ω_j . Поэтому

$$b'(\alpha) = b(\alpha), \quad c'(\alpha) = c(\alpha) + i \hat{S} b(\alpha)$$

для любых $\alpha \in M$.

Убедимся теперь, что это преобразование “унитарно” относительно индефинитной метрики (15). Пусть $b_1, c_1, b_2, c_2 \in C^\infty(M)$ – произвольные функции. Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\hat{S} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\hat{S} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (b_1, c_2) + (c_1, b_2) + i[(b_1, \hat{S}b_2) - (\hat{S}b_1, b_2)] \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle + i[(b_1, \hat{S}b_2) - (\hat{S}b_1, b_2)]. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства следует показать, что оператор $\hat{S}$ самосопряжен относительно скалярного произведения (33). Действительно,

$$\begin{aligned} (b_1, \hat{S}b_2) &= \frac{1}{2} \int d\nu(\alpha) b_1^*(\alpha) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}' \right) \tilde{\mathcal{B}} \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial E}^* - \frac{\partial}{\partial E}'^* \right) \tilde{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] b_2(\alpha) \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\lambda)} \int dz \delta(\lambda - H(z)) (\tilde{\mathcal{B}}b_1^*) \left[\{ \cdot, H \} \left(\frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}' \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial E}^* - \frac{\partial}{\partial E}'^* \right) \{ \cdot, H \} \right] \tilde{\mathcal{B}}b_2, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\lambda)$ имеет вид (9).

Применяя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} (b_1, \hat{S}b_2) &= \frac{1}{2\Gamma(\lambda)} \int dz \delta(\lambda - H(z)) (\tilde{\mathcal{B}}b_2) \left[- \left(\frac{\partial}{\partial E}^* - \frac{\partial}{\partial E}'^* \right) \{ \cdot, H \} \right. \\ &\quad \left. + \{ \cdot, H \} \left(\frac{\partial}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E}' \right) \right] \tilde{\mathcal{B}}b_1^* = (\hat{S}b_1, b_2). \end{aligned}$$

Предложение 3 доказано.

6. Результаты пункта 2 естественным образом переносятся на случай, когда фазовым пространством является кокасательное расслоение $T^*\mathcal{N}$ к гладкому n -мерному многообразию $\mathcal{N}$ (конфигурационному пространству).

Рассмотрим пример. Пусть конфигурационным пространством является окружность S^1 . Выберем в качестве обобщенной координаты x угловую переменную на S^1 , $0 \leq x < 2\pi$. Обозначим через p соответствующий обобщенный импульс.

Уравнение (1) для самосогласованного потенциала $w(x)$ в этом случае заменяется на уравнение вида

$$w(x) = u(x) + \frac{\int_0^{2\pi} V(x - \xi) (\lambda - w(\xi))_+^{-1/2} d\xi}{\int_0^{2\pi} (\lambda - w(\xi))_+^{-1/2} d\xi}, \quad (39)$$

где $\lambda = \text{const} \in \mathbb{R}$, $u(\cdot)$ и $V(\cdot)$ — гладкие вещественнозначные 2π -периодические функции (внешний потенциал и потенциал взаимодействия), $V(x - \xi) = V(\xi - x)$.

Обозначим через $H(x, p)$ гамильтониан

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + w(x).$$

Предположим, что $\lambda > \max_{0 \leq x < 2\pi} w(x)$. Рассмотрим многообразие

$$M_+ = \left\{ (x, p) : p = \sqrt{2(\lambda - w(x))} \right\}.$$

Выберем векторное поле $\frac{\partial}{\partial E} = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p}$. Очевидно, что $\frac{\partial}{\partial E}(H) = 1$.

Система уравнений для классических квазичастиц на многообразии M_+ в x -карте имеет вид

$$\omega b(x) - i\sqrt{2(\lambda - w(x))} \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{\int_0^{2\pi} V(x - \xi) c(\xi) (\lambda - w(\xi))_+^{-1/2} d\xi}{\int_0^{2\pi} (\lambda - w(\xi))_+^{-1/2} d\xi} = 0, \quad (40)$$

$$\omega c(x) - i\sqrt{2(\lambda - w(x))} \frac{\partial c(x)}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{w'(x)}{2(\lambda - w(x))} \frac{\partial}{\partial x} \right) b(x) = 0. \quad (41)$$

Предположим, что внешнее поле $u(x)$ мало. Положим $u(x) = \varepsilon U(x)$, где ε — малый параметр. Найдём собственные значения ω системы (40), (41) с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Решение $w(x)$ уравнения (39) можно записать в виде

$$w(x) = w_0 + \varepsilon w_1(x) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$w_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\xi) d\xi,$$

а $w_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_1(x) = U(x) + \frac{1}{4\pi(\lambda - w_0)} \int_0^{2\pi} d\xi V(x - \xi) \left(w_1(\xi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_1(\eta) d\eta \right). \quad (42)$$

Из (40), (41) вытекает система соотношений

$$\begin{aligned} & \omega b(x) - ip_0 \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi V(x - \xi) c(\xi) \\ & + \varepsilon \left\{ \frac{iw_1(x)}{p_0} \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{1}{2\pi p_0^2} \int_0^{2\pi} d\xi V(x - \xi) c(\xi) (w_1(\xi) - \bar{w}_1) \right\} = O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \omega c(x) - ip_0 \frac{\partial c(x)}{\partial x} - \frac{\partial^2 b(x)}{\partial x^2} \\ & + \varepsilon \left\{ \frac{iw_1(x)}{p_0} \frac{\partial c(x)}{\partial x} - \frac{w_1'(x)}{p_0^2} \frac{\partial b(x)}{\partial x} \right\} = O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$p_0 \equiv \sqrt{2(\lambda - w_0)}, \quad \bar{w}_1 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_1(\eta) d\eta.$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2), \\ b(x) &= b_0(x) + \varepsilon b_1(x) + O(\varepsilon^2), \\ c(x) &= c_0(x) + \varepsilon c_1(x) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

В нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) имеем

$$\omega_0 b_0(x) - ip_0 \frac{\partial b_0(x)}{\partial x} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x - \xi) c_0(\xi) d\xi = 0, \quad (45)$$

$$\omega_0 c_0(x) - ip_0 \frac{\partial c_0(x)}{\partial x} - \frac{\partial^2 b_0(x)}{\partial x^2} = 0. \quad (46)$$

Решение (45), (46) имеет вид

$$b_0(x) = B_0 e^{ikx}, \quad c_0(x) = C_0 e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (45), (46), получим

$$(\omega_0 + kp_0) B_0 + \tilde{V}(k) C_0 = 0, \quad (48)$$

$$k^2 B_0 + (\omega_0 + kp_0) C_0 = 0, \quad (49)$$

где

$$\tilde{V}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Отсюда

$$\omega_0 = -kp_0 + |k|\sqrt{\tilde{V}(k)}.$$

Выбор знака квадратного корня следует из теории комплексного роста [6]. Подставляя это выражение в (48), (49), найдем

$$B_0 = -\gamma\sqrt{\tilde{V}(k)}, \quad C_0 = \gamma|k|, \quad \gamma = \text{const} \neq 0.$$

Вычислим теперь поправку ω_1 по теории возмущений. Запишем систему (43), (44) в матричном виде:

$$\omega \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ip_0 \frac{\partial}{\partial x} & -\hat{Q} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & ip_0 \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{-iw_1(x)}{p_0} \frac{\partial}{\partial x} & p_0^{-2} \hat{Q} \cdot (\bar{w}_1 - w_1(x)) \\ \frac{iw_1'(x)}{p_0^2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{-iw_1(x)}{p_0} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\hat{Q}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x - \xi)\varphi(\xi) d\xi.$$

Несложно убедиться, что оператор

$$\begin{bmatrix} ip_0 \frac{\partial}{\partial x} & -\hat{Q} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & ip_0 \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

симметричен относительно индефинитной метрики

$$\left\langle \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_1^*(x)\Phi_2(x) + \varphi_2^*(x)\Phi_1(x)) dx.$$

Поправка ω_1 имеет вид

$$\omega_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-iw_1(x)}{p_0} \frac{\partial}{\partial x} & p_0^{-2} \hat{Q} \cdot (\bar{w}_1 - w_1(x)) \\ \frac{iw_1'(x)}{p_0^2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{-iw_1(x)}{p_0} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{k\bar{w}_1}{p_0}.$$

Из (42) следует, что

$$\begin{aligned}\overline{w}_1 &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_1(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2 p_0^2} \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} d\xi V(x - \xi) \left(w_1(\xi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_1(\eta) d\eta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x) dx.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_1 = \frac{k}{2\pi p_0} \int_0^{2\pi} U(x) dx.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12.07.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маслов В. П. Об интегральном уравнении вида $u(x) = F(x) + \int G(x, \xi) \times u_+^{k/2}(\xi) d\xi / \int u_+^{k/2}(\xi) d\xi$ // Функцион. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 1. С. 41–50.
- [2] Маслов В. П. Об интегральном уравнении вида $u(x) = F(x) + \int G(x, \xi) \times u_+^{(n-2)/2}(\xi) d\xi / \int u_+^{(n-2)/2}(\xi) d\xi$ в случаях $n = 2$ и 3 // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 96–108.
- [3] Похожаев С. И. Об уравнениях Маслова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 338–349.
- [4] Maslov V. P. Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to classical self-consistent fields. II // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 1. P. 123–132.
- [5] Maslov V. P. Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds and (in the ergodic case) with constant energy manifolds corresponding to semiclassical self-consistent fields // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 4. P. 529–534.
- [6] Маслов В. П., Шведов О. Ю. Квантование в окрестности классических решений в задаче N частиц и сверхтекучесть // ТМФ. 1994. Т. 98. № 2. С. 266–288.