Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, Аналитическое продолжение
и сверхсходимости рядов однородных полиномов,
Матем. заметки, 1996, том 60, выпуск 5, 708–714

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:50:55

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И СВЕРХСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ

А. В. Покровский

Пусть $A = \{a_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность комплекснозначных функций, определенных при $0 < t < \infty$, и пусть $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ – некоторый (не обязательно сходящийся) ряд комплексных чисел. Будем говорить, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируется регулярным полунепрерывным методом A (по поводу терминологии см. [1, с. 27, 28, 365]) к числу $u(t) \in \mathbb{C}$, если при каждом фиксированном t , $0 < t < \infty$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)u_k$ сходится к некоторому числу $u(t) \in \mathbb{C}$ и существует $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = u$, при этом, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится к числу $s \in \mathbb{C}$, то $u = s$.

В дальнейшем запись $u^A = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ означает, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируется регулярным полунепрерывным методом A к числу u .

Всюду ниже мы рассматриваем полунепрерывные регулярные методы суммирования A , как правило не оговаривая это обстоятельство.

Предположим теперь, что кроме метода A нам заданы комплекснозначные функции $u(x), u_0(x), u_1(x), \dots$, непрерывные в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Если $u(x)^A = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ при всех $x \in D$ и, дополнительно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)u_k(x)$ сходится к (непрерывной) функции $u(t, x)$ равномерно по x на каждом компакте K из D , а $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = u(x)$ достигается равномерно по x на каждом таком компакте, то мы будем говорить, что метод A суммирует ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ к функции $u(x)$ *равномерно внутри области D* .

Функция $f(x)$, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^n$, называется *вещественно аналитической в D* , если для каждой точки $x^0 \in D$ существует такая ее окрестность $U(x^0) \subset D$, что в этой окрестности $f(x)$ представляется кратным степенным рядом

$$f(x) = \sum_l a_l(x^0)(x - x^0)^l, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–00236, и Международного научного фонда, грант NCF000.

абсолютно сходящимся в $U(x^0)$, где $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ – набор из n целых неотрицательных чисел,

$$a_l(x^0)(x - x^0)^l := a_{l_1 \dots l_n}(x_1^0, \dots, x_n^0)(x_1 - x_1^0)^{l_1} \dots (x_n - x_n^0)^{l_n};$$

суммирование в (1) ведется по всем таким наборам $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$.

Пусть, в предыдущих обозначениях,

$$P_k(x - x^0) = \sum_{|l|=k} a_l(x^0)(x - x^0)^l, \quad |l| := l_1 + l_2 + \dots + l_n \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Тогда в $U(x^0)$ имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x - x^0), \quad (2)$$

где ряд абсолютно сходится в $U(x^0)$. Это представление мы будем называть *разложением функции $f(x)$ в ряд по однородным полиномам в точке x^0* .

Область $D \subset \mathbb{R}^n$, содержащая точку x^0 , называется *прямолинейно звездной* относительно этой точки, если вместе с каждой своей точкой x^1 она содержит отрезок $[x^0, x^1]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $x^0 \in D$. Для того, чтобы существовал такой полунепрерывный регулярный метод A , что ряд по однородным полиномам в точке x^0 любой вещественно аналитической в D функции f суммируется этим методом к $f(x)$ равномерно внутри D , необходимо и достаточно, чтобы область D была прямолинейно звездной относительно точки x^0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не меняя общности, будем считать, что $x^0 = 0$.

Необходимость. Предположим противное, т.е. то, что существует метод A с указанным свойством, и область D не является прямолинейно звездной относительно точки $x = 0$. Последнее означает, что существуют такие точки p и s , отличные от точки $x = 0$, что $p \in D$, $s \notin D$, $s \in [0, p]$. Определим функцию $f(x)$ равенством $f(x) = |x - s|^{2-n}$ ($n \geq 3$), $f(x) = \ln |x - s|$ ($n = 2$). Эта функция определена всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \{s\}$, гармонична (а, следовательно, и вещественно аналитична) там. Если метод $A = \{a_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ суммирует ряд по однородным полиномам функции $f(x)$ в точке $x = 0$ равномерно внутри D , то из того, что $f(x)$ принимает только действительные значения, следует, что метод, заданный последовательностью функций $\{\operatorname{Re}(a_k(t))\}_{k=0}^{\infty}$, $0 < t < \infty$, также обладает этим свойством. Следовательно, мы можем считать, что все функции $a_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, принимают только действительные значения. Если L – ломаная, состоящая из конечного числа звеньев, такая, что $L \subset D$ и L соединяет точку p с началом координат O , то, пользуясь тем, что слагаемые ряда (2) для выбранной функции $f(x)$ – гармонические полиномы, а также принципом максимума для гармонических функций и соображениями симметрии, легко заключить, что функция $f(x)$ должна быть гармонической внутри области,

ограниченной поверхностью, полученной вращением L вокруг оси Op . Но последняя область содержит внутри себя точку s , в которой функция $f(x)$ имеет неустранимую особенность, следовательно, мы получили противоречие с предположением, что область D не является прямолинейно звездной относительно точки $x = 0$, тем самым устанавливая необходимость условия теоремы 1.

Прежде чем устанавливать достаточность, докажем следующую лемму. Всюду ниже через S обозначается множество, полученное из плоскости $\mathbb{C}$ выбрасыванием луча $[1, +\infty)$ действительной оси.

ЛЕММА. Пусть $s, r > 0$, и пусть $E(s, r)$ – множество точек плоскости $\mathbb{C}$, представимых в виде tw^{-1} , где t принадлежит отрезку $[0, r]$, w – граница s -окрестности этого отрезка. Тогда $E(s, r)$ есть компактное подмножество области S , и если $r_2 > r_1 > 0$, то $E(s, r_1) \subset E(s, r_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Первая часть заключения леммы почти очевидна, ибо множество $E(s, r)$ есть замыкание области, ограниченной кривой, состоящей из всех точек вида rw^{-1} , где w пробегает границу s -окрестности отрезка $[0, r]$. Для доказательства второй – подвергнем отрезок $[0, r_1]$ и его s -окрестность растяжению с центром в начале координат и коэффициентом растяжения $k = r_2 r_1^{-1} > 1$. Поскольку s -окрестность отрезка $[0, r_1]$ представляет собой множество точек плоскости $\mathbb{C}$ вида $z + r_1 \zeta$, где $z \in [0, r_1]$, $|\zeta| < 1$, то образ этой окрестности при таком растяжении есть множество точек вида $kz + ks\zeta$ ($z \in [0, r_1]$, $|\zeta| < 1$), или $-z + ks\zeta$ ($z \in [0, r_2]$, $|\zeta| < 1$), следовательно, этот образ содержит внутри себя s -окрестность отрезка $[0, r_2]$. Если $tw^{-1} = (kt)(kw)^{-1}$ – некоторая точка из $E(s, r_1)$, где $t \in [0, r_1]$, w принадлежит границе s -окрестности $[0, r_1]$, то точка kw принадлежит границе ks -окрестности отрезка $[0, r_2]$. Пусть $l < 1$ таково, что точка lkw есть пересечение отрезка $[0, kw]$ с границей s -окрестности отрезка $[0, r_2]$. Тогда $tw^{-1} = (lkt)(lkw)^{-1} \in D$.

Лемма доказана.

Напомним, что если D – область в $\mathbb{R}^n$, K – подмножество D , то запись $K \in D$ означает, что K компактно в D .

Достаточность. Рассмотрим комплексное расширение $\mathbb{C}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$: $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$. Если ряд $\sum_l a_l(0)x^l$, задающий функцию $f(x)$ вблизи точки $x = 0$, абсолютно сходится в некоторой точке $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, все координаты которой отличны от нуля, то, согласно многомерной лемме Абеля (см. [2, с. 31, 32]), ряд $\sum_l a_l(0)z^l$ сходится равномерно на компактных подмножествах внутри полукруга $|z_j| < |x_j^1|$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и задает там голоморфную функцию $F(z)$. Продолжим эту функцию вдоль всех лучей в $\mathbb{C}^n$, выходящих из точки $z = 0$. В результате получим однозначную голоморфную функцию, обозначаемую по-прежнему через $F(z)$, которая определена в некоторой области $W \subset \mathbb{C}^n$, прямолинейно звездной относительно точки $z = 0$. Очевидно, что $D \subset W \cap \mathbb{R}^n$ и $F(z) = f(x)$ при $z = x \in D$.

Пусть $W_1, W_2, \dots$ – последовательность областей в $\mathbb{C}^n$, прямолинейно звездных относительно точки $z = 0$, такая, что $W_1 \Subset W_2 \Subset \dots \Subset W$, и если $D_j := W_j \cap \mathbb{R}^n$ ($j = 1, 2, \dots$), то $D_1 \Subset D_2 \Subset \dots \Subset D$ и $\bigcup_j D_j = D$. Зафиксируем произвольным образом $j \in \mathbb{N}$ и положим: $d > 0$ – евклидово расстояние (в $\mathbb{C}^n$) между W_j и границей области W_{j+1} ; M – максимум $|F(z)|$ по $z \in W_{j+1}$; L – максимум $|z|$ по $z \in D_j$.

Если $a_0(t) = 1$, $a_k(t) = \exp(-kt \cdot \ln(k))$, $k \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{a_k(t)\}_{k=0}^\infty$, $t > 0$, задает регулярный полунепрерывный метод А (метод Линделёфа), который суммирует ряд $\sum_{k=0}^\infty w^k$ к функции $(1-w)^{-1}$ равномерно внутри области $S \subset \mathbb{C}$ (см. [1, с. 224]). Зафиксируем произвольным образом $\varepsilon > 0$, и выберем $t(\varepsilon) > 0$ так, что при всех t , $0 < t < t(\varepsilon)$,

$$\left| (1-w)^{-1} - \sum_{k=0}^\infty a_k(t) w^k \right| < \varepsilon$$

на компакте $E(d, L)$, определенном в лемме.

Рассмотрим произвольную точку x компакта D_j . При некотором $p = p(x) \in \mathbb{R}^n$, $|p| = 1$, эта точка принадлежит комплексной прямой $pl = (p_1 l, \dots, p_n l)$, $l \in \mathbb{C}$, в частности, $(x_1, \dots, x_n) = (p_1 u, \dots, p_n u)$ при некотором $u > 0$. Пусть $L(p)$ – максимум $|y|$ по всем таким $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, что $y \in D$ и $y = vp$ при некотором $v \in \mathbb{R}$. Ясно, что $L(p) \leq L$, $|p| = 1$.

Пусть Γ – граница d -окрестности отрезка $[0, L(p)]$. По интегральной формуле Коши

$$f(x) = F(pu) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(pw) \frac{1}{w-u} dw. \quad (3)$$

Так как $(1/2\pi i) \int_\Gamma F(pw) w^{-k-1} dw$ – k -й тейлоровский коэффициент функции $F(pw)$ в точке $w = 0$, а с другой стороны,

$$F(pw) = \sum_{k=0}^\infty P_k(wp) = \sum_{k=0}^\infty P_k(p) w^k$$

при $|w| < d$ (и, значит, $P_k(p) = (1/2\pi i) \int_\Gamma F(pw) w^{-k-1} dw$), то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(pw) \cdot \frac{1}{w} \left\{ \sum_{k=0}^\infty a_k(t) \left(\frac{u}{w} \right)^k \right\} dw \\ &= \sum_{k=0}^\infty a_k(t) u^k \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(pw) w^{-k-1} dw \\ &= \sum_{k=0}^\infty a_k(t) u^k P_k(p) = \sum_{k=0}^\infty a_k(t) P_k(up). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует (с учетом леммы), что

$$\begin{aligned}
 & \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) P_k(x) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(pw) \frac{1}{w-u} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(pw) \frac{1}{w} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \left(\frac{u}{w} \right)^k \right\} dw \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(pw) \frac{1}{w} \left\{ \left(1 - \frac{u}{w} \right)^{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \left(\frac{u}{w} \right)^k \right\} dw \right| \\
 &< M\varepsilon \frac{1}{\pi d} \int_{\Gamma} |dw| < \varepsilon M \frac{1}{2\pi d} (2\pi d + 2L) \quad (0 < t < t(\varepsilon)).
 \end{aligned}$$

В силу произвола в выборе j и ε этим устанавливается достаточность условия теоремы 1.

В приведенном доказательстве вместо метода Линделёфа можно взять любой регулярный полунепрерывный метод, суммирующий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} w^k$ к функции $(1-w)^{-1}$ равномерно внутри области S . Однако, этот ряд можно просуммировать к функции $(1-w)^{-1}$ несколько по-другому, а именно справедливо следующее утверждение: существуют такие возрастающие последовательности натуральных чисел $\{l(k)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{m(k)\}_{k=0}^{\infty}$ и такая последовательность вещественных чисел $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$, $0 \leq c_j \leq 1$ при всех $j = 0, 1, \dots$, что в области S имеет место представление

$$(1-w)^{-1} = g_1(w) + g_2(w), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 g_1(w) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{l(k)} c_k w^k \right), \\
 g_2(w) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{m(k)} (1 - c_k) w^k \right);
 \end{aligned}$$

оба предела достигаются равномерно на каждом компактном подмножестве из S . Это означает, что ряды Тейлора функций $g_1(w)$ и $g_2(w)$ в точке $w = 0$ являются сверхсходящимися в области S (функциональный ряд называется *сверхсходящимся*, если какая-то последовательность его частичных сумм сходится на некотором множестве, большем, чем множество сходимости этого ряда). Представление (5) было получено А.И. Маркушевичем [3] (см. также [4, с. 499–507]). Мы сейчас вкратце напомним его построения, чтобы пояснить, почему числа c_j ($j = 0, 1, \dots$) можно выбирать такими, что $0 \leq c_j \leq 1$ при всех $j = 0, 1, \dots$.

Пусть $\{P_d(w)\}_{d=1}^{\infty}$ — фиксированная каким-либо образом последовательность полиномов, сходящаяся при $d \rightarrow \infty$ к функции $(1-w)^{-1}$

равномерно на каждом компактном подмножестве из S (такая последовательность существует по теореме Рунге). По этой последовательности строится такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{s(k)\}_{k=1}^{\infty}$, что функции $g_1(w)$ и $g_2(w)$ определяются равенствами

$$g_1(w) = \sum_{k=1}^{\infty} (P_{2s(k)}(w) - P_{2s(k)-1}(w)),$$

$$g_2(w) = P_{s(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (P_{2s(k)+1}(w) - P_{2s(k)}(w)),$$

где оба ряда сходятся равномерно на каждом компактном подмножестве из S . Из этих равенств видно, что если полиномы $P_1(w), P_2(w), \dots$ таковы, что при каждом фиксированном j ($j = 0, 1, \dots$) последовательность коэффициентов этих полиномов при w^j не убывает, то все тейлоровские коэффициенты функций g_1 и g_2 неотрицательны, что эквивалентно неравенствам $0 \leq c_j \leq 1$, $j = 0, 1, \dots$. Такую последовательность полиномов можно построить, исходя из указанного выше метода суммирования Линделёфа, а именно, последовательность целых функций

$$h_d(w) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-d^{-1}k \cdot \ln(k)) w^k \quad (d = 1, 2, \dots)$$

сходится при $d \rightarrow \infty$ к функции $(1-w)^{-1}$ равномерно на компактных подмножествах из S , следовательно, существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{r(d)\}_{d=1}^{\infty}$, что последовательность полиномов

$$Q_d(w) := 1 + \sum_{k=1}^{r(d)} \exp(-d^{-1}k \cdot \ln(k)) w^k \quad (d = 1, 2, \dots)$$

также сходится при $d \rightarrow \infty$ к функции $(1-w)^{-1}$ равномерно на компактных подмножествах из S . Поэтому, полагая $P_d(w) = Q_d(w)$ ($d = 1, 2, \dots$), мы получаем последовательность полиномов с нужными нам свойствами.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1, только вместо представления функции $(1-w)^{-1}$ в области S в виде

$$\frac{1}{1-u} \stackrel{A}{=} \sum_{k=0}^{\infty} w^k,$$

где A – метод суммирования Линделёфа, используется представление (5).

ТЕОРЕМА 2. *Существуют возрастающие последовательности натуральных чисел $\{l(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность вещественных чисел $\{c_j\}_{j=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ такие, что для каждой области $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), прямолинейно звездной относительно точки x^0 , и любой функции f , вещественно аналитической в D и заданной вблизи точки x^0 рядом вида (2) по однородным полиномам, имеет место представление*

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{l(k)} c_k P_k(x - x^0) \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{m(k)} (1 - c_k) P_k(x - x^0) \right) \quad (x \in D), \quad (6)$$

где оба предела достигаются равномерно по x на каждом компакте из D . Обратно, всякая область $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), для которой существуют возрастающие последовательности $\{l(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{c_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ такие, что для каждой вещественно аналитической в D функции f имеет место представление (6), где оба предела достигаются равномерно по x на каждом компакте из D , является прямолинейно звездной относительно точки x^0 .

Подчеркнем, что в первой части теоремы 2 последовательности $\{l(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ не зависят ни от размерности n пространства $\mathbb{R}^n$, ни от области D , ни от функции f .

В заключение выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю проф. Е.П. Долженко за постановку задачи и внимание к моей работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
03.10.94
Исправленный вариант
03.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Физматгиз, 1960.
- [2] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т. 2. М.: Наука, 1985.
- [3] Маркушевич А.И. Аналитическое продолжение и сверхсходимость // Докл. АН СССР. 1944. Т. 45. № 6. С. 239–241.
- [4] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.