Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А.-Р. К. Рамазанов, Рациональная аппроксимация
со знаочувствительным весом, *Матем. заметки*,
1996, том 60, выпуск 5, 715–725

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 11:28:37

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СО ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ВЕСОМ

А.-Р.К. Рамазанов

Знакочувствительные аппроксимации рассмотрены Е.П. Долженко и Е.А. Севастьяновым в работах [1] и [2] (см. также [3]).

Ниже получены обобщение теоремы Джексона и аналог теоремы Е.П. Долженко об оценке вариации функции на отрезке через ее наименьшие рациональные уклонения на этом отрезке, а также даны двусторонние оценки наименьших рациональных уклонений $\operatorname{sign} x$ в метрике знакочувствительного веса.

Непрерывным знакочувствительным весом $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$, $x \in \Delta = [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$, называется пара однозначных функций $p_-(x)$ и $p_+(x)$, неотрицательных и непрерывных на Δ . Считаем, что $x^+ = x$ при $x \geq 0$, $x^+ = 0$ при $x < 0$, $x^- = -x$ при $x \leq 0$, $x^- = 0$ при $x > 0$. Для непрерывных на Δ функции $f(x)$ и веса $p(x)$ используем также обозначения

$$\begin{aligned}(f, p)(x) &= f^+(x)p_+(x) - f^-(x)p_-(x), \\ |(f, p)(x)| &= f^+(x)p_+(x) + f^-(x)p_-(x), \\ |f|_p &= |f|_{p, \Delta} = \sup\{|(f, p)(x)| : x \in \Delta\}.\end{aligned}$$

Очевидно, при $p_-(x) \equiv p_+(x) \equiv 1$ полунорма $|f|_p$ совпадает с равномерной нормой $\|f\| = \|f\|_\Delta = \max\{|f(x)| : x \in \Delta\}$.

Если функция $f(x)$ и вес $p(x)$ непрерывны на $\Delta = [a, b]$, $f_h(x) = f(x+h)$ и $0 \leq \delta \leq b-a$, то

$$\omega(\delta, f, p) = \sup\{|(f_h - f, p)(x)| : x, x+h \in \Delta, |h| \leq \delta\}$$

назовем модулем непрерывности $f(x)$ относительно $p(x)$.

Через $\omega(f, \delta)$ обозначим модуль непрерывности $f(x)$ (на Δ) в равномерной метрике, а модулем непрерывности веса $p(x)$ назовем $\omega(p, \delta) = \max\{\omega(p_+, \delta), \omega(p_-, \delta)\}$ ($0 \leq \delta \leq b-a$). Легко показать, что при $\delta, h, \delta+h \in [0, b-a]$

$$\omega(\delta+h, f, p) \leq \omega(\delta, f, p) + \omega(h, f, p) + \min\{\omega(f, \delta)\omega(p, h), \omega(f, h)\omega(p, \delta)\}.$$

(1)

Теперь очевидно, что $\omega(\delta, f, p)$ – неубывающая и непрерывная на $[0, b-a]$ функция, $\omega(0, f, p) = 0$,

$$\omega(2\delta, f, p) \leq 2\omega(\delta, f, p) + \omega(f, \delta)\omega(p, \delta). \quad (2)$$

Отсюда, используя метод индукции и монотонность $\omega(\delta, f, p)$, для любого $\lambda > 0$ (при $\lambda\delta \in [0, b-a]$) имеем

$$\omega(\lambda\delta, f, p) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta, f, p) + \frac{(\lambda + 1)\lambda}{2}\omega(f, \delta)\omega(p, \delta). \quad (3)$$

Ниже через $E_n(f, p) = E_n(f, p, \Delta)$ и $R_n(f, p) = R_n(f, p, \Delta)$ ($n = 0, 1, \dots$) обозначаем наименьшие отклонения непрерывной функции $f(x)$ в метрике $|\cdot|_{p, \Delta}$ от алгебраических полиномов степени не выше n и рациональных функций $r(x)$ степени не выше n с $|r|_{p, \Delta} + |-r|_{p, \Delta} < \infty$, причем для $r(c \pm 0) = +\infty$ считаем, что

$$r(c)p_{\pm}(c) = \limsup r(x)p_{\pm}(x) \quad (x \rightarrow c),$$

$$\mathcal{R}_{p,n} = \mathcal{R}_{p,n}(\Delta) \stackrel{\text{df}}{=} \{r(x)\}.$$

§ 1. Сравнение скоростей рациональных и полиномиальных отклонений

Следующее утверждение обобщает теорему Джексона о приближении непрерывных функций алгебраическими полиномами на метрику знако-чувствительного веса.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых непрерывных на $\Delta = [a, b]$ функции $f(x)$ и веса $p(x)$ при $n = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство*

$$R_n(f, p) \leq E_n(f, p) \leq 6\omega\left(\frac{b-a}{n}, f, p\right) + 8\omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right)\omega\left(p, \frac{b-a}{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведем для $\Delta = [-1, 1]$. Первое из указанных неравенств очевидно, а для оценки $E_n(f, p)$ по аналогии с [4, с. 270–271] рассмотрим четный тригонометрический полином порядка $2n - 2$:

$$D(y, f) = \frac{1}{\pi\gamma} \int_0^\pi f(\cos t)[T(t+y) + T(t-y)] dt,$$

$$T(x) = \left(\frac{\sin(nx/2)}{n \sin(x/2)}\right)^4, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi T(x) dx.$$

Тогда при $x = \cos y$ для алгебраического полинома $D(x) = D(y, f)$ степени не выше $2n - 2$ имеем

$$\begin{aligned} & \pm [D(x) - f(x)]p_{\pm}(x) \\ & \leq \frac{1}{\pi\gamma} \int_0^{\pi} \sup\{[\pm f(x+h) \mp f(x)]p_{\pm}(x)\} [T(t+y) + T(t-y)] dt, \end{aligned}$$

где супремумы берутся по всем $|h| \leq |\cos t - x|$ и $x, x+h \in [-1, 1]$. Так как, очевидно, $\omega(|\cos t - x|) := \omega(|\cos t - x|, f, p)$ равно большему из указанных супремумов, то по аналогии с [4] получим

$$\pm [D(x) - f(x)]p_{\pm}(x) \leq \frac{4}{\pi\gamma} \int_0^{\pi/2} \omega(2t)T(2t) dt.$$

Остается воспользоваться неравенством (3) и известными оценками интегралов $\int_0^{\pi/2} t^i T(2t) dt$ при $i = 0, 1, 2$, а затем перейти к супремумам левой части (отдельно для $+$ и $-$).

Чтобы показать неулучшаемость оценки в теореме 1 даже для $R_n(f, p)$, рассмотрим функции $\omega_i(\delta)$ ($\delta \in [0, 1], i = 1, 2, 3$) такие, что $\omega_2(\delta)$ и $\omega_3(\delta)$ — модули непрерывности, а $\omega_1(\delta)$ — непрерывная и неубывающая на $[0, 1]$ функция, $\omega_1(0) = 0$.

Тройку таких функций $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ назовем согласованной с положительными константами C_1 и C_2 , если при $\delta \in [0, 1]$

$$\omega_1(2\delta) \leq C_1(\omega_1(\delta) + \omega_2(\delta)\omega_3(\delta)), \quad \omega_1(\delta) \leq C_2\omega_2(\delta).$$

Легко показать, что для любой согласованной тройки функций $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ функция $\varphi(\delta) = \omega_1(\delta) + \omega_2(\delta)\omega_3(\delta)$, $\delta \in [0, 1]$, является функцией типа модуля непрерывности, в частности, $\varphi(2\delta) \leq C\varphi(\delta)$ ($C = \text{const} > 0$).

ТЕОРЕМА 2. Для согласованной тройки $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ при каждом $n = 1, 2, \dots$ существуют непрерывные на $[0, 1]$ функция $f(x)$ и вес $p(x)$ такие, что

$$\begin{aligned} & \omega(f, \delta) \asymp \omega_2(\delta), \quad \omega(p, \delta) \asymp \omega_3(\delta) \quad (0 \leq \delta \leq 1/(18n)), \\ & \omega\left(\frac{1}{18n}, f, p\right) = \omega_1\left(\frac{1}{18n}\right), \quad E_n(f, p) \geq R_n(f, p) \geq \frac{\varphi(1/n)}{2C^5}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи $\omega_2(\delta) \equiv 0$ и (или) $\omega_3(\delta) \equiv 0$ тривиальны, поэтому считаем, что $\omega_2(\delta) > 0$ и $\omega_3(\delta) > 0$ при $\delta > 0$.

Для данного $n = 1, 2, \dots$ возьмем $h = 1/(18n)$ и построим две функции $F(x, a)$ и $G(x, a)$, причем по-разному, в зависимости от того выполняется неравенство $\omega_2(h)\omega_3(h) \geq \omega_1(h)$ или нет. Если оно выполняется, то при $H = \omega_1(h)/\omega_3(h)$ положим

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} \min\{\omega_2(x-a), \omega_2(h) - H\}, & x \in [a, a+2h], \\ \min\{\omega_2(x-a-2h) + \omega_2(h) - H, \omega_2(h)\}, & x \in (a+2h, a+3h]; \end{cases} \\ F(x, a) &= \begin{cases} F(x), & x \in [a, a+3h], \\ F(2a+6h-x), & x \in (a+3h, a+6h]; \end{cases} \\ G(x, a) &= \begin{cases} 0, & x \in [a, a+2h] \cup [a+4h, a+6h], \\ \omega_3(x-a-2h), & x \in [a+2h, a+3h], \\ \omega_3(a+4h-x), & x \in (a+3h, a+4h). \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть теперь $\omega_2(h)\omega_3(h) < \omega_1(h)$, $h = 1/(18n)$. Так как тройка $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ согласованная, отсюда имеем $\omega_3(h)\omega_2(h) < \omega_1(h) \leq C_2\omega_2(h)$, а поэтому $\omega_1(h) = M\omega_2(h)$, $M \in (\omega_3(h), C_2]$. Теперь возьмем

$$\begin{aligned} F(x, a) &= \begin{cases} 0, & x \in [a, a+2h] \cup [a+4h, a+6h], \\ \omega_2(x-a-2h), & x \in (a+2h, a+3h), \\ \omega_2(a+4h-x), & x \in [a+3h, a+4h]; \end{cases} \\ G(x) &= \begin{cases} \omega_3(a+h-x), & x \in [a, a+h], \\ 0, & x \in (a+h, a+2h), \\ \frac{M(x-a-2h)}{h}, & x \in [a+2h, a+3h]; \end{cases} \\ G(x, a) &= \begin{cases} G(x), & x \in [a, a+3h], \\ G(2a+6h-x), & x \in (a+3h, a+6h]. \end{cases} \end{aligned}$$

Каждую из $p_+(x)$ и $p_-(x)$ положим равной непрерывной $6h$ -периодической функции, которая при $x \in [0, 6h]$ совпадает с $G(x, 0)$. В качестве $f(x)$ возьмем непрерывную $(12h)$ -периодическую функцию, которая при $x \in [0, 6h]$ равна $F(x, 0)$, а при $x \in [6h, 12h]$ равна $-F(x, 6h)$.

Тогда функция $f(x)$ и вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ на отрезке $[0, 1]$ — требуемые в теореме 2, причем при оценке снизу $R_n(f, p)$ используется прием подсчета интервалов монотонности рациональных функций [5].

§ 2. Приближение $\text{sign } x$

Рациональные аппроксимации $\text{sign } x$ в различных метриках изучены в ряде работ (подробности см., например, в [6]). Полученные ниже оцен-

ки для наименьших уклонений $R_n(\text{sign } x, p, [-1, 1])$ показывают, что скорость их стремления к нулю при $n \rightarrow \infty$ зависит не только от того, обращаются или нет в нуль составляющие веса $p_-(x)$ и $p_+(x)$ в некоторых точках $[-1, 1]$, но и от степени роста $p_-(x)$ и $p_+(x)$ в этих точках. Более того, можно получить непрерывную шкалу скоростей для $R_n(\text{sign } x, p, [-1, 1])$, связанную с поведением $p_-(x)$ и $p_+(x)$ в окрестности нуля. Она аналогична шкале, построенной А. А. Гончаром [7] для наименьших равномерных рациональных уклонений непрерывных функций, имеющих “излом” графика в нуле.

Для оценки $R_n(\text{sign } x, p, [-1, 1])$ сверху мы применим один аналог леммы 2 из [8]. Он, в частности, позволит учесть отдельно возможное разное поведение весовых функций $p_{\pm}(x)$ в правой и левой окрестностях нуля.

ЛЕММА 1. Пусть $-1 \leq -b < -a < 0 < c < d \leq 1$, n и m — целые неотрицательные числа,

$$C(n, m) = \min \left\{ \frac{(1 - a/b)n}{\ln(b/a)}, \frac{(1 - c/d)m}{\ln(d/c)} \right\}.$$

Тогда для наименьшего равномерного уклонения $\text{sign } x$, $x \in [-b, -a] \cup [c, d]$, от рациональных функций степени не выше $n + m$ выполняется неравенство

$$R_{n+m}(\text{sign } x, [-b, -a] \cup [c, d]) \leq 5 \exp(-C(n, m)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_i = b(a/b)^{i/n}$, $y_j = d(c/d)^{j/m}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$). Рассмотрим нечетную рациональную функцию

$$r(x) = \frac{Q(x) - Q(-x)}{Q(x) + Q(-x)}, \quad Q(x) = \prod_{i=1}^n (x + x_i) \prod_{j=1}^m (x + y_j).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sup \{ |\text{sign } x - r(x)| : x \in [-b, -a] \cup [c, d] \} \\ &= \max \left\{ \sup \{ |1 - r(x)| : x \in [a, b] \}, \sup \{ |1 - r(x)| : x \in [c, d] \} \right\}. \end{aligned}$$

Оценим $|1 - r(x)|$ при $x \in [a, b]$ и $(1 - a/b)n \geq \log_2(b/a)$. По аналогии с [8] получим

$$|1 - r(x)| \leq 3 \exp \left(-\frac{(1 - a/b)n}{\ln(b/a)} \right). \quad (4)$$

При $x \in [c, d]$ и $(1 - c/d)m \geq \log_2(d/c)$ также имеем

$$|1 - r(x)| \leq 3 \exp \left(-\frac{(1 - c/d)m}{\ln(d/c)} \right). \quad (5)$$

Если же $(1 - a/b)n < \log_2(b/a)$ и $(1 - c/d)m < \log_2(b/a)$, то легко показать, что $R_{n+m}(\text{sign } x, [-b, -a] \cup [c, d])$ меньше соответственно правых частей оценок (4) и (5) с заменой 3 на 5.

Ниже через $\omega(p, \delta, \Delta)$ обозначим модуль непрерывности веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ на отрезке Δ ; положим также

$$M_p(x) = \max\{p_-(x), p_+(x)\}, \quad x \in [-1, 1], \quad M_p = \|M_p\|_{[-1, 1]};$$

далее, для $\psi(t) = (1 - e^{-t})/t$, целых неотрицательных m и n и положительных t и τ пусть

$$B(n, m, t, \tau) = \min\{\psi(t)n, \psi(\tau)m\}, \quad \delta(t, \tau) = \max\{\exp(-t), \exp(-\tau)\}, \\ \Delta(t, \tau) = [-\exp(-t), \exp(-\tau)];$$

считаем, что

$$R_n(\text{sign } x, p, [-1, 1]) = \inf\{|\text{sign } x - r(x)|_{p, [-1, 1]} : r \in \mathcal{R}_{p, n}\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Для непрерывного веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$, $p_-(0) = p_+(0) = 0$, при $N = 0, 1, \dots$ выполняется неравенство

$$R_N(\text{sign } x, p, [-1, 1]) \leq \inf\left\{2\omega(p, \delta(t, \tau), \Delta(t, \tau)) + 5M_p \exp(-B(n, m, t, \tau)) : 0 < t, \tau < \infty, n + m \leq N\right\};$$

в частности, при $n = 0, 1, \dots$ имеем

$$R_n(\text{sign } x, p, [-1, 1]) \leq \inf\left\{2\omega(p, e^{-t}, \Delta(t, t)) + 5M_p \exp(-\psi(t)n) : 0 < t < \infty\right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для данного веса $p(x)$ имеем $M_p(x) \equiv 0$ при $x \in [-1, 0]$ или при $x \in [0, 1]$, то, очевидно, $R_N(\text{sign } x, p, [-1, 1]) = 0$ ($N = 0, 1, \dots$). Поэтому пусть $M_p(x) > 0$ для некоторых $x = x_1 \in [-1, 0]$ и $x = x_2 \in (0, 1]$. Положим $-b = \inf\{x \in [-1, 0] \mid M_p(x) > 0\}$, $d = \sup\{x \in (0, 1] \mid M_p(x) > 0\}$. Возьмем еще положительные числа t, τ и целые неотрицательные числа n, m с суммой $n + m \leq N$.

При $\psi(t)n \ln 2 < 1$ или $\psi(\tau)m \ln 2 < 1$ требуемые в теореме 3 неравенства очевидным образом выполняются. Поэтому будем считать $\psi(t)n \ln 2 \geq 1$ и $\psi(\tau)m \ln 2 \geq 1$. Обозначим через a и c соответственно $b \exp(-t)$ и $d \exp(-\tau)$.

Рассмотрим рациональную функцию

$$r(x) = \frac{Q(x) - Q(-x)}{Q(x) + Q(-x)},$$

построенную в лемме 1 для отрезков $[-b, -a]$, $[c, d]$ и взятых n, m . Ввиду $\psi(t)n \ln 2 \geq 1$ и $\psi(\tau)m \ln 2 \geq 1$ для этой $r(x)$ выполняются неравенства (4) и (5), причем правые части этих неравенств $\leq 3 \exp(-1/\ln 2) < 1$.

Положим $S(x) = [\operatorname{sign} x - r(x)]^+ p_+(x) + [\operatorname{sign} x - r(x)]^- p_-(x)$. Тогда $S(0) = 0$, и так как $r(x) \geq 0$ при $x \in [-u, u]$ (пусть $u = \min\{a, c\}$, $v = \max\{a, c\}$), а при $x \in [-v, -u] \cup [u, v]$ из (4) и (5) следует $|1 - r(x)| < 1$, то $S(x) \leq 2M_p(x)$ при $x \in [-a, c]$.

Если же $x \in [-b, -a] \cup [c, d]$, то ввиду нечетности $r(x)$ и неравенств (4) и (5) получим

$$S(x) \leq 3 \max \left\{ \exp \left(-\frac{(1 - a/b)n}{\ln(b/a)} \right), \exp \left(-\frac{(1 - c/d)m}{\ln(d/c)} \right) \right\}.$$

Переходя к переменным t, τ и учитывая, что $M_p(0) = 0$, $0 < a < b \leq 1$ и $0 < c < d \leq 1$, легко получить требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим один частный случай, когда (используя лемму 1) легко можно уточнить оценку в теореме 3. Именно, если одна из непрерывных на $[-1, 1]$ функций $p_-(x)$ и $p_+(x)$ равна нулю в каждой точке $x \in [-\alpha, \alpha]$, $0 < \alpha \leq 1$, то при $n = 0, 1, \dots$

$$R_n(\operatorname{sign} x, p, [-1, 1]) \leq C \exp(-C(\alpha)n),$$

где $C > 0$ и $C(\alpha) > 0$ не зависят от n ; в частности, при $\alpha = 1$, очевидно, $R_n(\operatorname{sign} x, p, [-1, 1]) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$).

Относительно оценок снизу предварительно заметим, что при $p_+(0)p_-(0) > 0$ имеем

$$R_n(\operatorname{sign} x, p, [-1, 1]) > 0,5 \min\{p_+(0), p_-(0)\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Далее, если множество нулей (непрерывной) функции $q(x) = p_+(x)p_-(x)$ плотно на $[-1, 1]$, то она тождественно равна нулю на $[-1, 1]$, а поэтому в этом случае, вообще говоря, можно утверждать лишь, что $R_n(\operatorname{sign} x, p, [-1, 1]) \geq 0$.

Действительно, пусть $g(x)$ — непрерывная и неотрицательная на $[0, 1]$ функция, для которой $\lim g(x)/x = 0$ ($x \rightarrow +0$). Положим $p_+(x) = g(x)$ при $x \in [0, 1]$ и $p_+(x) = 0$ при $x \in [-1, 0)$, $p_-(x) = p_+(-x)$ при $x \in [-1, 1]$.

Ясно, что $r(x) = x + 1/x \in \mathcal{R}_{p,2}$. Легко подсчитать, что

$$[\operatorname{sign} x - r(x)]^+ p_+(x) + [\operatorname{sign} x - r(x)]^- p_-(x) \equiv 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Следовательно, $R_n(\operatorname{sign} x, p, [-1, 1]) = 0$ ($n = 2, 3, \dots$).

Ниже для учета нечетности функции $\operatorname{sign} x$ потребуем, чтобы $p_-(x) = p_+(-x)$, $x \in [-1, 1]$. Пусть также $p_+(0) = 0$, $p_+(x) \leq M$ при $x \in [-1, 1]$, $M > 0$, множество нулей $q(x) = p_+(x)p_-(x)$ не плотно на $[-1, 1]$. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ такой, что $q(x) > 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$, $q(\alpha) = 0$ и $q(\beta) = 0$ при $\beta < 1$, $q(\beta) \geq 0$ при $\beta = 1$.

Тогда для любого $\delta \in (0, (\beta - \alpha)/2)$ и всех натуральных n , начиная с некоторого n_0 , выполняется неравенство

$$R_n(\operatorname{sign} x, p, [-1, 1]) \geq \frac{M}{2} \exp(-A(n, \delta)),$$

$$A(n, \delta) \left(\pi^2 n - \int_a^b \ln \left(\frac{q(x)}{M^2} \right) \frac{dx}{x} \right) / \ln \frac{b}{a},$$

$$a = \alpha + \delta, \quad b = \beta - \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что существует нечетная $r \in \mathcal{R}_{p, 2n}$, для которой

$$R_n(\operatorname{sign} x, p, [-1, 1]) > 0,5 |\operatorname{sign} x - r(x)|_{p, [-1, 1]} \geq 0,5 |1 - r(x)|_{p, (0, 1]}.$$

Функцию $r(x)$ можно считать неотрицательной на (α, β) (для всех n , начиная с некоторого n_0), так как если в некоторой точке $x \in (\alpha, \beta)$ будет $r(x) < 0$ ($p_+(x) > 0$), то получим $R_n(\operatorname{sign} x, p, [-1, 1]) > 0,5 p_+(x)$, что противоречит теореме 3 при достаточно больших n .

Если обозначить $S(x) = [1 - r(x)]^+ p_+(x) + [1 - r(x)]^- p_-(x)$, то существует полином $Q(x)$ степени $\leq 2n$, $Q(x) > 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$, для которого выполняется неравенство

$$S(x) \geq \left[\frac{Q(-x)}{Q(x)} \right]^+ p_+(x) + \left[\frac{Q(-x)}{Q(x)} \right]^- p_-(x)$$

или неравенство, получаемое из него, если поменять местами $p_+(x)$ и $p_-(x)$. Действительно, функцию $r(x)$ можно представить в одной из следующих форм:

$$r(x) = \frac{x A(x^2)}{B(x^2)} \quad \text{или} \quad r(x) = \frac{A(x^2)}{x B(x^2)},$$

где $A = A(t)$ и $B = B(t)$ – алгебраические полиномы (неотрицательные на (α^2, β^2)), а дроби несократимые.

Тогда в первом случае имеем: если в данной точке $x \in (\alpha, \beta)$ разность $1 - r(x) \geq 0$, то

$$S(x) = [1 - r(x)] p_+(x) \geq \frac{B - xA}{B + xA} p_+(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{Q(-x)}{Q(x)} p_+(x),$$

а при $1 - r(x) < 0$

$$S(x) = [r(x) - 1] p_-(x) \geq -\frac{B - xA}{B + xA} p_-(x) = -\frac{Q(-x)}{Q(x)} p_-(x),$$

причем, очевидно, $Q(x) > 0$, $x \in (\alpha, \beta)$.

Второй случай рассматривается вполне аналогично.

Воспользуемся теперь неравенством Ньюмена [9], по которому для любого $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ имеем

$$\int_a^b \ln |R(x)| \frac{dx}{x} \geq -\pi^2 n, \quad R(x) = \frac{Q(-x)}{Q(x)}.$$

Пусть $0 < \delta < (\beta - \alpha)/2$, $a = \alpha + \delta$, $b = \beta - \delta$,

$$E_1 = \{x \in [a, b] \mid R(x) \geq 0\}, \quad E_2 = [a, b] \setminus E_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_a^b \ln \left(\frac{R^+(x)p_+(x) + R^-(x)p_-(x)}{M} \right) \frac{dx}{x} \\ &= \int_{E_1} \ln \left(\frac{R(x)p_+(x)}{M} \right) \frac{dx}{x} + \int_{E_2} \ln \left(\frac{-R(x)p_-(x)}{M} \right) \frac{dx}{x} \\ &= \int_{E_1} \ln \left(\frac{p_+(x)}{M} \right) \frac{dx}{x} + \int_{E_2} \ln \left(\frac{p_-(x)}{M} \right) \frac{dx}{x} + \int_a^b \ln |R(x)| \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Применив это равенство и неравенство Ньюмена, мы приходим к противоречию, если допустить, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется

$$R^+(x)p_+(x) + R^-(x)p_-(x) < M \exp(-A(n, \delta)).$$

Для этого достаточно разделить обе части последнего неравенства на M , логарифмировать, разделить на x , а затем интегрировать на $[a, b]$.

Следовательно, существует $x \in [a, b]$ такая, что $S(x) \geq M \exp(-A(n, \delta))$.

§ 3. Аналог обратной теоремы Е. П. Долженко

Как известно [10], вариацию непрерывной на отрезке Δ функции $f(x)$ можно оценить через ее наименьшие равномерные уклонения на этом отрезке: $\text{var}(f, \Delta) \leq 12 \sum_{n=0}^{\infty} R_n(f)$.

Легко показать, что подобная оценка, вообще говоря, невозможна в метрике $|\cdot|_p$. Но можно получить обобщение указанного неравенства в виде оценки $\text{var}(fp_+p_-, \Delta)$ через наименьшие рациональные уклонения $f(x)$ в метрике $|\cdot|_p$.

Будем говорить, что вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ при $x \in \Delta$ на некотором множестве рациональных функций удовлетворяет Д-условию, если существует $C = C(p) > 0$ такое, что для любой рациональной функции $r(x)$ из этого множества выполняется неравенство

$$\text{var}(rp_+p_-, \Delta) \leq C(\deg r + 1)(|r|_{p, \Delta} + |-r|_{p, \Delta}) < \infty. \quad (6)$$

При $p_-(x) \equiv p_+(x) \equiv 1$ и непрерывных на Δ рациональных функций $r(x)$ это условие постоянным множителем отличается от неравенства Е. П. Долженко [10] $\text{var}(r, \Delta) \leq 2 \deg r \|r\|_\Delta$.

Оказывается, если непрерывные функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ имеют конечную вариацию на отрезке Δ , то вес $p(x)$ при $x \in \Delta$ удовлетворяет Д-условию на множестве рациональных функций $r(x)$, для которых $|r|_{p, \Delta} + |-r|_{p, \Delta} < \infty$ (ввиду громоздкости мы здесь не приводим доказательства).

Следовательно, класс весовых функций, удовлетворяющих Д-условию, достаточно широк.

Ниже вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ назовем однородным (на Δ), если существуют ограниченные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ такие, что $p_-(x) \leq \varphi_1(x)p_+(x)$ и $p_+(x) \leq \varphi_2(x)p_-(x)$ ($x \in \Delta$).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p(x)$ – непрерывный на Δ вес. Чтобы для некоторого $C(p) > 0$ и любой непрерывной на Δ функции $f(x)$ при

$$S(f, p) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(f, p) + R_n(-f, p) < \infty \quad (7)$$

выполнялось неравенство

$$\text{var}(fp_+p_-, \Delta) \leq C(p) (|f|_{p, \Delta} + |-f|_{p, \Delta} + S(f, p)), \quad (8)$$

необходимо, а в случае однородного на Δ веса $p(x)$ и достаточно, чтобы вес $p(x)$ при $x \in \Delta$ удовлетворял Д-условию на множестве рациональных функций $r(x)$, для которых $|r|_{p, \Delta} + |-r|_{p, \Delta} < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для непрерывной на Δ функции $f(x)$ возьмем $r_n \in \mathcal{R}_{p, n}$ такую, что $|f - r_n|_{p, \Delta} \leq 2R_n(f, p)$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда из теоремы 1 следует, что $|f - r_n|_{p, \Delta} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а поэтому для $q(x) = p_+(x)p_-(x)$ и $x \in \Delta$ имеем

$$\begin{aligned} [r_n(x) - f(x)]q(x) &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \\ f(x)q(x) &= r_0(x)q(x) + [r_1(x) - r_0(x)]q(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} [r_{2^{k+1}}(x) - r_{2^k}(x)]q(x). \end{aligned}$$

Остается оценить вариацию каждого слагаемого, используя (6) и однородность веса $p(x)$, а также монотонность $R_n(f, p)$ по n и неравенство (7). Тогда получим (8), если $R_n(f, p) > 0$ при $n = 0, 1, \dots$.

Случай $R_0(f, p) = 0$ очевиден.

Если же $R_n(f, p)$ равен нулю при $n = m$ и больше нуля при $n = m - 1$ ($m = 1, 2, \dots$), то для $n = m$ и произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем $r_m \in \mathcal{R}_{p, m}$

такую, что $|f - r_m|_{p,\Delta} < \varepsilon$. Тогда требуемое получается, если мы возьмем конечную сумму

$$f(x)q(x) = r_0(x)q(x) + \sum_{n=1}^m [r_n(x) - r_{n-1}(x)]q(x).$$

Обратно, для любой рациональной функции $r(x)$ степени n ($n = 1, 2, \dots$) при $|r|_{p,\Delta} + |-r|_{p,\Delta} < \infty$, как легко видеть, имеем

$$S(r, p) \leq n(|r|_{p,\Delta} + |-r|_{p,\Delta}) < \infty.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{var}(rq, \Delta) &\leq C(p)(|r|_{p,\Delta} + |-r|_{p,\Delta} + S(r, p)) \\ &\leq C(p)(n+1)(|r|_{p,\Delta} + |-r|_{p,\Delta}). \end{aligned}$$

Следовательно, $p(x)$ при $x \in \Delta$ удовлетворяет Д-условию на множестве рациональных функций $r(x)$ с $|r|_{p,\Delta} + |-r|_{p,\Delta} < \infty$.

Дагестанский государственный университет

Поступило

06.07.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации (пространство знакочувствительных весов, жесткость и свобода системы) // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 686–689.
- [2] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации (вопросы единственности и устойчивости) // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 1. С. 5–7.
- [3] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [4] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [5] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимации // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313–320.
- [6] Вячеславов Н. С. О наименьших уклонениях функции $\text{sign } x$ и ее первообразных от рациональных функций в метриках L_p , $0 < p \leq \infty$ // Матем. сб. 1977. Т. 103(145). № 1(5). С. 24–36.
- [7] Гончар А. А. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения // Матем. сб. 1967. Т. 72(114). № 3. С. 489–503.
- [8] Гончар А. А. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями // Матем. сб. 1967. Т. 73(115). № 4. С. 630–638.
- [9] Newman D. J. Rational approximation to $|x|$ // Michigan Math. J. 1964. V. 11. № 1. P. 11–14.
- [10] Долженко Е. П. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций // Матем. сб. 1962. Т. 56(98). № 4. С. 403–432.