Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Симметризованная форма стохастического уравнения Хадсона–Партасарати, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 726–750

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1885>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 04:00:44

СИММЕТРИЗОВАННАЯ ФОРМА СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ХАДСОНА–ПАРТАСАРАТИ

А. М. Чеботарев

1. Введение. Идеи квантового стохастического исчисления возникли в результате попыток найти обобщенную форму теории марковских процессов, пригодную для описания необратимых явлений в квантовых системах [1]–[7]. Как мы покажем ниже, эта теория позволяет распространить теорему Стоуна на класс уравнений Шрёдингера, возмущенных сингулярными квадратичными формами, а с другой стороны, она является некоммутативным обобщением теории марковских процессов, согласованной с теорией квантовых динамических полугрупп [8], [9]. Современное изложение квантового стохастического исчисления можно найти в работах [10]–[13].

В статье излагается подход к интерпретации квантового стохастического исчисления в рамках теории однопараметрических групп унитарных операторов. С этой целью во втором разделе вводятся пространство состояний окружения, элементы которого не зависят от времени. Далее мы показываем, что решения квантовых стохастических уравнений можно рассматривать как унитарно эквивалентные представления решений специального класса уравнений Шрёдингера, возмущенных сингулярными квадратичными формами. В третьем разделе этот результат получен с помощью явной конструкции решений уравнения Хадсона–Партасарати с коммутирующими коэффициентами. Сингулярно возмущенный гамильтониан используется для реконструкции семейства самосопряженных операторов в фоксовском пространстве, сходящихся в смысле сильной сходимости резольвент к пределу, унитарно эквивалентному гамильтониану уравнения Хадсона–Партасарати.

Аналогичный результат доказывается далее в общем случае. В четвертом разделе статьи выводится уравнение относительно симметризованного стохастического дифференциала $N(dt)$

$$\int_{(s,t)} u(s, \tau) N(d\tau) = \int_{(s,t)} u(s, \tau) \left(N(d\tau_+) + \frac{1}{2} M(d\tau_+) N(d\tau_+) \right), \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95–01–00784.

где левая и правая части (1.1) – симметризованный и неупреждающий стохастический интегралы, а $u(s, t)$ – решение неупреждающего стохастического уравнения $du = uM(dt_+)$. Стохастический дифференциал $N(\cdot)$ такой, что $u(s, t)N(dt) = u(s, t)M(dt_+)$, может быть найден из интегрального уравнения

$$N(T) + \frac{1}{2} \int_T M(dt_+)N(dt_+) = M(T) \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (1.2)$$

Условия, достаточные для разрешимости уравнения (1.2) с неограниченными операторными коэффициентами, обсуждаются в пятом разделе. Отметим, что решение уравнения (1.2) отличается от семейства симметричных операторов $N(T)$, удовлетворяющих уравнению $M(dt) = \exp\{N(dt)\} - I$, описанному А. С. Холево [15], [16].

С помощью преобразования Жюрнэ J_t (см. [14]), сопоставляющего унитарному коциклу $u(s, t)$ однопараметрическую группу унитарных операторов $U_{t-s} = J_s^* u(s, t) J_t$, в статье показано, что квадратичная форма инфинитезимального оператора группы U_t порождается оператором Шрёдингера, возмущенным квадратичной формой, незамыкаемой в исходном гильбертовом пространстве и обращающейся в нуль на плотном множестве. Такие квадратичные формы называются *сингулярными* [17], [18]. Мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между стохастическим уравнением в симметризованной форме, определяемым дифференциалом аддитивной функции множества $\hat{\mathbf{H}}(T)$, и сингулярно возмущенным гамильтонианом $\mathbf{H}$:

$$\begin{array}{ccc} H_\alpha & \xrightarrow[w]{\alpha \rightarrow 0} & H \\ \mathfrak{R} \downarrow \alpha \rightarrow 0 & & \downarrow J \\ \mathbf{H} & \xrightarrow{S} & \hat{\mathbf{H}}(T) \end{array}, \quad (1.3)$$

где H и $\mathbf{H}$ – слабый и резольвентный пределы: $w - \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_\alpha = H$, $s - \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{itH_\alpha} = e^{it\mathbf{H}} = U_t$. Более точно, $H_\alpha = H_0 \otimes I + I \otimes \mathbf{E} + H_{\text{int}}^{(\alpha)}$,

$$H_{\text{int}}^{(\alpha)} = R^* \otimes A(f^{(\alpha)}) + R \otimes A^+(f^{(\alpha)}) + K \otimes A^+(g^{(\alpha)})A(g^{(\alpha)}),$$

– семейство гамильтонианов квантовой системы, взаимодействующей с окружением, H_0 и $\mathbf{E}$ – энергия системы и окружения, $H_{\text{int}}^{(\alpha)}$ – гамильтониан взаимодействия, K – самосопряженный оператор, R – замкнутый оператор: $(R^*)^* = R$; $\{g^{(\alpha)}\}$, $\{f^{(\alpha)}\}$ – последовательности функций из $L_2(\mathbb{R})$, сходящиеся к $1/\sqrt{2\pi}$ при $\alpha \rightarrow 0$. Основным примером зависимости от α является масштабное преобразование: $g^{(\alpha)}(\omega) = g(\alpha\omega)$. По соображениям, которые поясняются в третьем разделе, мы ограничиваемся классом функций из $L_2(\mathbb{R})$ с абсолютно интегрируемым образом Фурье:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{g}(t) dt, \quad \int \tilde{g}(t) dt = 1, \quad \tilde{g} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}). \quad (1.4)$$

Подмножество таких функций с четным неотрицательным образом Фурье обозначается через $L_{2,\tilde{1}}^+(\mathbb{R})$. На диаграмме (1.3) использованы следующие обозначения: J – унитарное преобразование Журнэ, S – обратимое преобразование гамильтониана стохастического уравнения от неупреждающей к симметризованной форме, H и $\mathbf{H}$ – гамильтонианы, возмущенные сингулярными квадратичными формами. С алгебраической точки зрения диаграмма (1.3) описывает связь между слабым (H) и резольвентным ($\mathbf{H}$) пределами семейства гамильтонианов H_α и гамильтонианом квантового стохастического уравнения $\hat{\mathbf{H}}(T)$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}(T) &= (H_0 \otimes I + I \otimes \mathbf{E}) \text{mes } T + R^* \otimes A(\tilde{I}_T) \\ &\quad + R \otimes A^+(\tilde{I}_T) + K \otimes \Lambda(\tilde{I}_T), \\ H &= H_0 \otimes I + I \otimes \mathbf{E} + R^* \otimes A(1) + R \otimes A^+(1) + K \otimes A^+(1)A(1), \\ \mathbf{H} &= L_0 \otimes I + L_1 \otimes A(1) + L_2 \otimes A^+(1) + L_3 \otimes A^+(1)A(1),\end{aligned}\tag{1.5}$$

где $\tilde{I}_T$ – Фурье-образ индикатора борелевского множества T , $\hat{\mathbf{E}}$ – генератор преобразования Журнэ: $\hat{\mathbf{E}} = \int d\omega \omega a^+(\omega)a(\omega)$, $J_t = \exp\{it\hat{\mathbf{E}}\}$, а $A^+(\tilde{I}_T)$, $A(\tilde{I}_T)$, $\Lambda(\tilde{I}_T)$ – фундаментальные процессы рождения, уничтожения и сохранения. Коэффициенты гамильтонианов (1.5) связаны соотношениями

$$\begin{aligned}L_0 &= \left(H_0 - R^* \frac{K}{4 + K^2} R + R^* \frac{2i}{4 + K^2} R \right) \otimes I + I \otimes H_E, \\ L_1 &= R^* \frac{2i}{2 - iK}, \quad L_2 = \frac{2i}{2 - iK} R, \quad L_3 = \frac{2iK}{2 - iK} = i(I - W), \\ W &= \frac{2 + iK}{2 - iK},\end{aligned}\tag{1.6}$$

где $W = (2 + iK)/(2 - iK)$ – преобразование Кэли оператора $\frac{1}{2}K$. Для любого самосопряженного оператора K коэффициенты $\{L_j\}$ определены корректно как квадратичные формы с плотной областью определения и удовлетворяют необходимым условиям унитарности решения квантового стохастического уравнения с коэффициентами $\mathcal{L}_k = iL_k$ (см. [10]):

$$\text{Re } \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2^* \mathcal{L}_2, \quad \mathcal{L}_1 = -L^* W, \quad \mathcal{L}_2 = L, \quad \mathcal{L}_3 = W - I,$$

имеющим смысл необходимых условий симметричности оператора $\mathbf{H}$.

Как нам стало известно при обсуждении настоящей работы с Е. Р. Лубенец, проблема эквивалентности квантового стохастического уравнения и уравнения Шрёдингера рассматривается в работах [19], [20]. Формулы, аналогичные соотношениям (1.6), получены в [20] одновременно и независимо от наших результатов и применимы в случае некоммутирующих операторных коэффициентов K, R, H_0 .

В заключение отметим, что связь между стохастическим дифференциалом $M(\cdot)$ в уравнении (1.1) и гамильтонианами (1.6) состоит в следующем. С одной стороны, неупреждающий интеграл сводится к интегралу, содержащему сингулярно возмущенный гамильтониан $\mathbf{H}$,

$$\begin{aligned} (\varphi, u(t)\psi) - (\varphi, \psi) &= \int_0^t (\varphi, u(\tau)M(d\tau_+)\psi) = i \int_0^t (\varphi, dU_\tau J_\tau^* \psi) \\ &= i \int_0^t (\varphi, u(\tau)(J_\tau H J_\tau^* - \widehat{\mathbf{E}} \otimes I)\psi) \end{aligned}$$

для φ, ψ из некоторого плотного подмножества D в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, так как генератор $\widehat{\mathbf{E}}$ коммутирует с группами $J_t = e^{it\widehat{\mathbf{E}}}$, $J_t^* = e^{-it\widehat{\mathbf{E}}}$. Поэтому

$$M(T) = i \int_T d\tau (J_\tau \mathbf{H} J_\tau^* - \widehat{\mathbf{E}} \otimes I), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{H}$ – резольвентный предел (1.3). С другой стороны,

$$(\varphi, u(t)\psi) - (\varphi, \psi) = \int_0^t (\varphi, u(\tau)N(d\tau)\psi),$$

и, как показано в п. 4,

$$N(T) = i \int_T d\tau (J_\tau H J_\tau^* - \widehat{\mathbf{E}} \otimes I)$$

для слабого предела H . Это наблюдение является весьма неожиданным. Таким образом, унитарность решения квантового стохастических уравнений эквивалентна самосопряженности резольвентного предела $\mathbf{H}$. Техника, разработанная для анализа унитарности решений квантовых стохастических уравнений (см. [21]–[23]), может быть использована для изучения достаточных условий самосопряженности сингулярно возмущенных гамильтонианов. С точки зрения физических приложений формулы (1.6) служат обоснованием выбора коэффициентов уравнения Линдблада, называемого также *master equation*, описывающего эволюцию квантовой системы, усредненную по состояниям окружения.

В дальнейшем изложении важную роль играет свойство интервальной согласованности семейств операторов в фоксовском пространстве. В следующем разделе мы рассматриваем соответствующее обобщение понятия согласованного семейства.

2. Свойство интервальной согласованности. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_E$ – пара гильбертовых пространств. Гильбертово пространство состояний квантовой системы и ее окружения имеет вид тензорного произведения $\mathbb{H} = \mathcal{H} \otimes \Gamma^S$, где $\mathcal{H}$ – пространство состояний квантовой системы, $\Gamma^S = \Gamma^S(\mathcal{H}_E)$ – симметричное фоксовское пространство переменных окружения

$(\cdot, \cdot), \|\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в соответствующем гильбертовом пространстве. Скалярное произведение в $\Gamma^S = \Gamma^S(\mathcal{H}_E)$ индуцируется скалярным произведением в $\mathcal{H}_E$

$$(F, F') = \overline{F}_0 F' + \sum \frac{1}{n!} (F_n, F'_n), \quad F = \{F_0, F_1, \dots\} \in \Gamma^S, \\ F_0 \in \mathbb{C}, \quad F_n \in \otimes_1^n \mathcal{H}_E.$$

Обозначим через $\mathcal{E} \subset \Gamma^S$ тотальное в Γ^S множество когерентных (экспоненциальных) векторов $\psi(f) = \{1, f, f \otimes f, \dots, f \otimes \dots \otimes f, \dots\}, f \in \mathcal{H}_E$ (см. [11], [12]). На тотальном подмножестве векторов $\mathcal{P}$ в Γ^S с полиномиальными компонентами $F_j = f^{\otimes j}$ и $F'_{n-j} = f'^{\otimes n-j}$ вводится операция симметричного тензорного умножения, определяемая формулами

$$F \otimes F' = \left\{ F_0 \cdot F'_0, F_0 \otimes F'_1 + F'_0 \otimes F_1, \dots, \sum_{j=0}^n S_n(F_j \otimes F'_{n-j}), \dots \right\}, \quad (2.1)$$

где S_n – симметризирующий оператор, действующий как сумма различных перестановок аргументов сомножителей. Операция тензорного умножения продолжается по линейности на линейную оболочку множества $\mathcal{P}$ и на ее замыкание $\overline{\text{Span } \mathcal{P}} = \Gamma^S$.

Непосредственный подсчет по правилу (2.1) показывает, что $\psi(f) \otimes \psi(v) = \psi(f + v)$, где $\psi(f), \psi(v) \in \mathcal{E}$. Поэтому $\psi(v) = \otimes_i \psi(\hat{\pi}_{T_i} v)$ для любого полного семейства ортопроекторов $\{\hat{\pi}_{T_j}\}_{T_j \in \mathcal{T}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_E)$, параметризованных подмножествами измеримого пространства $(\mathcal{T}, T)$,

$$\hat{\pi}_T^* = \hat{\pi}_T = \hat{\pi}_T^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}, \quad \hat{\pi}_{T_1} \hat{\pi}_{T_2} = \hat{\pi}_{T_2} \hat{\pi}_{T_1} = 0 \quad \forall T_1, T_2 : T_1 \cap T_2 = \emptyset.$$

Следовательно, фоковское пространство обладает свойством тензорной факторизуемости относительно любого конечного полного семейства ортопроекторов. В частности, если $\mathcal{H}_E = \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ и $\hat{\pi}_T = \mathcal{F}^* I_T \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – произвольный унитарный оператор в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, а I_T – ограниченный в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ оператор умножения на индикаторную функцию множества T , то $\Gamma^S(\mathcal{L}_2(\mathbb{R})) = \otimes_j \Gamma_{T_j}^S$, $\Gamma_{T_j}^S = \Gamma^S(\mathcal{F} \mathcal{L}_2(T_j))$ для любого конечно-го непересекающегося разбиения $\mathbb{R}$ множествами $\{T_j\}$. Через $\mathbb{H}_{\mathcal{T}}^{\hat{\pi}}$ будем обозначать произведение $\mathcal{H} \otimes \Gamma^S$, снабженное тензорным произведением, порождаемым системой ортопроекторов $\{\hat{\pi}_T\}_{T \in \mathcal{T}}$, а через $\mathbb{H}_T$ – его подпространство $\mathcal{H} \otimes \Gamma_T^S$, где $\Gamma_T^S = \Gamma^S(\hat{\pi}_T \mathcal{H}_E)$. Семейство операторов $u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H})$ будем называть $(\hat{\pi}, \mathcal{T})$ -согласованным, если для любых $T \in \mathcal{T}$ выполняются два условия:

$$u(T)h \otimes \psi(\hat{\pi}_T v) \in \mathcal{H} \otimes \Gamma_T^S, \\ u(T)h \otimes \psi(v) = \psi(\hat{\pi}_{T^a} v) \otimes \{u(T)h \otimes \psi(\hat{\pi}_T v)\}, \quad T^a = \mathbb{R} \setminus T,$$

т.е. если операторы $u(T)$ не изменяют векторы из $\mathbb{H}_{T^a} = \mathcal{H} \otimes \Gamma_{T^a}^S \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathcal{T}}$ и оставляют инвариантным множество $\mathbb{H}_T = \mathcal{H} \otimes \Gamma_T^S$. В дальнейшем изложении в качестве унитарного оператора $\mathcal{F}$ рассматривается преобразование Фурье, а в качестве семейства ортопроекторов – соответствующее представление операторов умножения на индикаторные функции борелевских множеств. В этом случае семейство операторов $\{u(T)\}$, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, называется *интервально согласованным* (см. [21])

$$(\varphi \otimes \psi(f), u(T)g \otimes \psi(v)) = \exp\{ (f, \widehat{\pi}_{T^a} v) \} (\varphi \otimes \psi(\widehat{\pi}_T f), u(T)g \otimes \psi(\widehat{\pi}_T v)), \quad (2.2)$$

где $\varphi, g \in \mathcal{H}$, $\psi(f), \psi(v) \in \mathcal{E}$, $T^a = \mathbb{R} \setminus T$, т.е. $u(T)$ действует только на часть экспоненциального вектора из Γ_T^S . Алгебру ограниченных операторов, действующих таким образом, обозначим через $\mathcal{B}(\mathbb{H}_T) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \otimes \mathcal{B}(\Gamma_T^S)$. Свойство интервальной согласованности проверяется в слабой топологии и поэтому сохраняется при переходе к сопряженному семейству $u^*(T)$. Основным следствием интервальной согласованности является возможность “прокоммутировать” составляющую экспоненциального вектора из $\Gamma_{T^a}^S$ с интервально согласованными семействами $u(T)$, $M(T)$

$$\begin{aligned} & (\varphi \otimes \psi(f), u(T_1)M(T_2)g \otimes \psi(v)) \\ &= \exp(f, \widehat{\pi}_{T^a} v) \left(\{u^*(T_1)\varphi \otimes \psi(\widehat{\pi}_{T_1} f)\} \otimes \psi(\widehat{\pi}_{T_2} f), \right. \\ & \quad \left. \{M(T_2)g \otimes \psi(\widehat{\pi}_{T_2} v)\} \otimes \psi(\widehat{\pi}_{T_1} v) \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $T_a = \mathbb{R} \setminus \{\bigcup T_i\}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Важным примером семейства интервально согласованных операторов является вводимое ниже представление процессов рождения, уничтожения и сохранения.

Пусть $\widehat{\mathbf{E}}$ – генератор преобразования Журнэ:

$$\widehat{\mathbf{E}} = \int \omega a^+(\omega) a(\omega) d\omega \in \mathcal{C}(\Gamma^S),$$

где $a^+(\omega)$, $a(\omega)$ – плотности операторов рождения и уничтожения [1]–[4], $\omega \in \mathbb{R}$. Существенная самосопряженность оператора $\widehat{\mathbf{E}}$ следует из теоремы Э. Нельсона [19]. Поэтому однозначно определена группа унитарных операторов $J_t = \exp\{it\widehat{\mathbf{E}}\}$, $J_t\psi(v) = \psi(e^{i\omega t}v)$. Из канонических коммутационных соотношений имеем (см. [5])

$$a_t^+(\omega) = J_t^* a^+(\omega) J_t = e^{-i\omega t} a^+(\omega), \quad J_t a^+(\omega) J_t^* = e^{i\omega t} a^+(\omega). \quad (2.4)$$

Пусть $\widetilde{W}_2^p(\mathbb{R})$ – соболевское пространство функций со скалярным произведением $\langle f, v \rangle = (f(\omega), v(\omega)(1 + \omega^2)^{p/2})$, $p \in \mathbb{R}$. Обозначим через $A = A(1) = \int a(\omega) d\omega$, $A^+ = A^+(1) = \int_{\mathbb{R}} a^+(\omega) d\omega$, $\Lambda = A^+ A$ – квадратичные формы в $\widetilde{W}_1^2(\mathbb{R})$, действующие по правилу

$$(\psi(f), A\psi(v)) = \sqrt{2\pi} \widetilde{v}(0) e^{(f, v)}, \quad (\psi(f), A^+ \psi(v)) = \sqrt{2\pi} \overline{\widetilde{f}(0)} e^{(f, v)}.$$

Квадратичные формы A, A^+, Λ незамыкаемы в $\Gamma^S(\mathcal{L}_2(\mathbb{R}))$ и обращаются в нуль на плотном подмножестве, порождаемом экспоненциальными векторами $\{\psi(v) : \tilde{v}(0) = 0\}$. Однако, они замыкаемы в $\Gamma^S(\widetilde{W}_2^1(\mathbb{R}))$ (см. [17], [18]) и поэтому определяют замкнутые операторы, действующие из $\Gamma^S(\widetilde{W}_2^1(\mathbb{R}))$ в $\Gamma^S(\widetilde{W}_2^{-1}(\mathbb{R}))$. Рассмотрим три семейства операторов $A_t = J_t^* A J_t$, $A_t^+ = J_t^* A^+ J_t$, $\Lambda_t = J_t^* \Lambda J_t$ и соответствующие им функции множества:

$$A(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T A_t dt, \quad A^+(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T A_t^+ dt, \quad \Lambda(T) = \frac{1}{2\pi} \int_T \Lambda_t dt. \quad (2.5)$$

В стандартных обозначениях $A(T) = A(\tilde{I}_T)$ – оператор уничтожения с плотностью, равной Фурье-образу индикатора борелевского множества $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Из теоремы Э. Нельсона [24] следует, что операторы $A^+(0, t) + A(0, t)$, $i(A^+(0, t) - A(0, t))$ и $\Lambda(0, t)$ существенно самосопряжены в $\Gamma^S(\mathcal{L}_2(\mathbb{R}))$, а операторы $A^+(0, t)$ и $A(0, t)$ являются взаимно сопряженными (см. [11]). Семейства операторов $A^+(0, t)$, $A(0, t)$ и $\Lambda(0, t)$ играют роль фундаментальных процессов *рождения, уничтожения и сохранения*. Из канонических коммутационных соотношений для операторных плотностей $a(\omega)$, $a^+(\omega)$ следуют формулы для средних значений процессов A^+, A, Λ :

$$\begin{aligned} (\psi(f), \Lambda(T)\psi(v)) &= (f, \hat{\pi}_T v) \exp\{(f, v)\}, \\ (\psi(f), A(T)\psi(v)) &= e^{(f, v)}(\tilde{I}_T, v), \quad (\psi(f), A^+(T)\psi(v)) = e^{(f, v)}(f, \tilde{I}_T). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть $M(T) = \sum L_j \otimes M_j(T)$ – аддитивная функция множества:

$$\begin{aligned} M_0(T) &= I \cdot \text{mes } T, & M_1(T) &= A(T), \\ M_2(T) &= A^+(T), & M_3(T) &= \Lambda(T), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$L_j \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $M_j \in \mathcal{C}(\Gamma^S)$. Пусть $\tilde{v}, \tilde{f} \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$. Используя тождества (2.6), получаем выражение для среднего значения

$$(\varphi \otimes \psi(f), M(T)g \otimes \psi(v)) = e^{(f, v)} \cdot \sum_{i=0}^3 (\varphi, L_i g) \cdot ((\tilde{f})^{\alpha_i}, I_T \tilde{v}^{\beta_i}) = O(\text{mes } T),$$

где показатель степени $\alpha_i = 1$ при $i = 2, 3$ и $\beta_i = 1$ при $i = 1, 3$. В остальных случаях $\alpha_i = \beta_i = 0$. Отсюда следует интервальная согласованность семейств $M(T)$ в смысле определения (2.2) и абсолютная непрерывность средних значений относительно стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} (\varphi \otimes \psi(f), M(0, t)g \otimes \psi(v)) = e^{(f, v)} \cdot \sum_{i=0}^3 (\varphi, L_i g) \overline{(\tilde{f}(t))^{\alpha_i}} \tilde{v}(t)^{\beta_i} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}). \quad (2.8)$$

Этот результат позволяет корректно определить слабую форму стохастических дифференциальных уравнений.

3. Точно решаемая модельная задача. Рассмотрим неупреждающее операторное стохастическое дифференциальное уравнение

$$du(\tau, t) = u(\tau, t)M(dt_+), \quad \tau \leq t, \quad s - \lim_{T \rightarrow \emptyset} u(T) = I \quad (3.1)$$

(см. [5], [10]) относительно непрерывного в сильной операторной топологии семейства интервально согласованных операторов $u(\cdot): \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H})$, где $M(T)$ – аддитивная функция множества на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ со значениями в множестве интервально согласованных замыкаемых операторов, имеющих общую тотальную в $\mathbb{H}$ область определения $\mathcal{D}$. Слабым ограниченным решением уравнения (3.1) называется интервально согласованное семейство ограниченных операторов $u(\cdot): \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такое, что для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ существует предел

$$\int_T u(s, \tau)M(d\tau_+)\varphi = \omega - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_N(T)} u(s, t_j)M(t_j, t_{j+1})\varphi,$$

где $t_j = j2^{-N}$, $J_N(T) = \{j : t_j \in T\}$, $s \leq \tau \quad \forall \tau \in T$, и

$$u(T)\varphi = \varphi + \int_T u(s, \tau)M(d\tau_+)\varphi.$$

Из оценки (2.8) и интервальной согласованности семейства $u(s, t)$ следует дифференцируемость по t билинейных форм

$$\frac{d}{dt}(h \otimes \psi(f), u(\tau, t)\varphi \otimes \psi(v)) = \sum_j (h \otimes \psi(f), u(\tau, t)L_j g \otimes \psi(v)) \overline{\tilde{f}(t)^{\alpha_j} \tilde{v}(t)^{\beta_j}} \quad (3.2)$$

для $g \in \bigcap_j \text{dom } L_j$, $f, v \in \widetilde{W}_2^1(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{H}$. Соотношение (3.2) называется *дифференциальным стохастическим уравнением (3.1) в слабой форме*. Ниже приводится пример, иллюстрирующий факт унитарной эквивалентности решений квантовых стохастических уравнений и сильных пределов решений уравнений Шрёдингера.

Рассмотрим семейство уравнений Шрёдингера $\partial_t \psi_t = iH_\alpha \psi_t$ с самосопряженным гамильтонианом $H_\alpha = H_0 \otimes I + I \otimes \widehat{\mathbf{E}} + H_{\text{int}}^{(\alpha)}$

$$H_{\text{int}}^{(\alpha)} = K \otimes A^+(g^{(\alpha)})A(g^{(\alpha)}) + R \otimes A^+(f^{(\alpha)}) + R^* \otimes A(f^{(\alpha)}) \quad (3.3)$$

с коммутирующими коэффициентами $H_0, K, R \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, имеющими общее спектральное семейство E_λ :

$$H_0 = \int \nu(\lambda) dE_\lambda, \quad K = \int \lambda dE_\lambda, \quad R = \int \rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)} dE_\lambda, \quad (3.4)$$

где ν, ρ, Φ – измеримые вещественные функции, соответствующие операторам H_0, K, R , а функции $f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)}$ из $L_{2,1}^+(\mathbb{R})$ определены выше (см. (1.4)).

Для упрощения записи индекс α опускается в тех случаях, когда зависимость от α можно не учитывать. Обозначим через $\hat{P}_t = \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)$ однопараметрическую группу унитарных операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с генератором $\hat{N}_\alpha(\lambda) = \omega + \lambda |g^{(\alpha)}\rangle \langle g^{(\alpha)}|$ и убедимся, что разрешающий оператор $U_t^{(\alpha)} = \exp\{iH_\alpha t\}$ задачи Коши действует по правилу

$$\begin{aligned} U_t^{(\alpha)} h \otimes \psi(v) = & \int e^{i\nu(\lambda)t} dE_\lambda h \otimes \psi \left(\hat{P}_t(\lambda) v \right. \\ & \left. + i\rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)} \int_0^t \hat{P}_s(\lambda) f^{(\alpha)} ds \right) \\ & \times \exp \left\{ i\rho(\lambda) e^{-i\Phi(\lambda)} \int_0^t (f^{(\alpha)}, \hat{P}_s(\lambda) v) ds \right. \\ & \left. - \rho(\lambda)^2 \int_0^t dr \int_0^r ds (f^{(\alpha)}, \hat{P}_{r-s}(\lambda) f^{(\alpha)}) \right\}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

где $\hat{P}_t = \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda) = e^{i\hat{N}_\alpha(\lambda)t}$ – однопараметрическая унитарная группа. Для любой ограниченной слабо измеримой функции $\hat{P}_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ выполнены интегральные соотношения, являющиеся следствием невырожденных замен переменных: $\int_0^t \hat{P}_r dr + \int_0^s \hat{P}_{r+t} dr = \int_0^{t+s} \hat{P}_r dr$,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t \int_0^r + \int_0^s \int_0^r \right) \hat{P}_{r-p} dr dp + \int_0^t \int_0^s \hat{P}_{r+p} dr dp \\ & = \left(\int_0^t \int_0^r + \int_t^{t+s} \int_t^{t+r} + \int_0^t \int_t^{t+s} \right) \hat{P}_{r-p} dr dp \\ & = \int_0^{t+s} \int_0^r \hat{P}_{r-p} dr dp, \end{aligned}$$

обеспечивающие групповое свойство семейства $U_t^{(\alpha)}$: первое тождество обеспечивает групповое свойство аргумента когерентного вектора, а второе – групповое свойство нормировочного множителя в (3.5).

Слабая форма уравнения Шрёдингера для функции (3.5) проверяется дифференцированием квадратичной формы $\varphi_t = (h \otimes \psi(v), U_t^{(\alpha)} h \otimes \psi(v))$:

$$\begin{aligned} \varphi_t = & \int e^{i\nu(\lambda)t} (dE_\lambda h, h) \exp \left\{ \left(v, \hat{P}_t(\lambda) v + i\rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)} \int_0^t \hat{P}_s(\lambda) f^{(\alpha)} ds \right) \right. \\ & \left. + i\rho(\lambda) e^{-i\Phi(\lambda)} \int_0^t (f^{(\alpha)}, \hat{P}_s(\lambda) v) ds \right. \\ & \left. - \rho(\lambda)^2 \int_0^t dr \int_0^r (f^{(\alpha)}, \hat{P}_{r-s}(\lambda) f^{(\alpha)}) ds \right\}. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} -i\varphi'_0 &= e^{\|v\|^2} \int (dE_\lambda h, h) \left(\nu(\lambda) + \lambda |g^{(\alpha)}, v|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re} \rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)}(v, f^{(\alpha)}) + \int d\omega \omega |v(\omega)|^2 \right) \\ &= (h \otimes \psi(v), H_\alpha h \otimes \psi(v)). \end{aligned}$$

Унитарность семейства $U_t^{(\alpha)}$ следует из ортогональности спектрального семейства E_λ и формулы для нормы экспоненциального вектора

$$\begin{aligned} &\left\| \psi \left(\hat{P}_t v + i\rho e^{i\Phi} \int_0^t \hat{P}_s f ds \right) \right\|^2 \\ &= \exp \left\{ \|v\|^2 + \rho^2 \left\| \int_0^t \hat{P}_s f ds \right\|^2 - 2\rho \operatorname{Im} e^{-i\Phi} \int_0^t (f, \hat{P}_s v) ds \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая, что из унитарности операторов $\hat{P}_t^{(\alpha)}$ следует тождество

$$2 \operatorname{Re} \int_0^t dr \int_0^r ds \hat{P}_{r-s} = \overline{\int_0^t dr \hat{P}_s} \int_0^t ds \hat{P}_r,$$

все члены в (3.6), кроме $\|v\|^2$, компенсируются экспоненциальным нормирующим множителем из формулы (3.5). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3.1. Унитарная группа операторов $U_t^{(\alpha)} = \exp\{itH_\alpha\}$, где $H_\alpha = H_0 \otimes I + I \otimes \hat{\mathbf{E}} + H_{\text{int}}^{(\alpha)}$, а оператор $H_{\text{int}}^{(\alpha)}$ определен формулой (3.3), действует по правилу

$$\begin{aligned} U_t^{(\alpha)} h \otimes \psi(v) &= \int e^{i\nu(\lambda)t} dE_\lambda h \otimes \psi(v_t^{(\alpha)}(\lambda)) \\ &\quad \times \exp \left\{ i\rho(\lambda) e^{-i\Phi(\lambda)} \int_0^t (f^{(\alpha)}, v_s^{(\alpha)}(\lambda)) ds \right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$v_t^{(\alpha)}(\lambda) = \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)v + i\rho(\lambda)e^{i\Phi(\lambda)} \int_0^t \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda)f^{(\alpha)} ds.$$

Следующая лемма обосновывает предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ в (3.7).

ЛЕММА 3.1 (о четырех пределах). Пусть $\hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)$ – однопараметрическая унитарная группа операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с генератором $\hat{N}_\alpha(\lambda)$. Тогда для $f, g \in L_{2,1}^+(\mathbb{R})$ таких, что $f(0) = g(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ при $\alpha \rightarrow 0$ существуют следующие пределы:

$$1) \int_0^t ds (g^{(\alpha)}, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda)f^{(\alpha)}) \rightarrow (2 - i\lambda)^{-1};$$

- 2) $\int_0^t ds \widehat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda) f^{(\alpha)}(\omega) \rightarrow e^{i\omega t} \widetilde{I}_{(0,t)}(\omega) (1 - i\lambda/2)^{-1}$;
 3) $(g^{(\alpha)}, \widehat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)v) \rightarrow (1 - i\lambda/2)^{-1} \mathcal{F}_{\omega \rightarrow t}^* v$;
 4) $\widehat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda) \rightarrow \exp\{iZ(\lambda)\widehat{\pi}_{(0,t)}\} = \widehat{P}_t(\lambda)$, $\exp\{iZ(\lambda)\} = (2 + i\lambda)/(2 - i\lambda)$,
 где $f^{(\alpha)}(\omega) = f(\alpha\omega)$, $g^{(\alpha)}(\omega) = g(\alpha\omega)$, $\widehat{\pi}_T$ – проектор в $L_2(\mathbb{R})$: $\widehat{\pi}_T = \mathcal{F}_{t \rightarrow \omega} I_T(t) \mathcal{F}_{\omega \rightarrow t}^*$. Пределы 2), 3) слабые в $L_2(\mathbb{R})$, предел 4) сильный в $L_2(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пределы 1)–3) могут быть найдены с помощью разложения оператора $\widehat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)$ в ряд по степеням параметра λ и почленного предельного перехода при $\alpha \rightarrow 0$, в результате которого ряд становится геометрической прогрессией с коэффициентом $i\lambda/2$, сходящейся в круге $|\lambda| < 2$. С помощью теоремы Фату–Привалова этот результат распространяется на всю вещественную ось $\lambda \in \mathbb{R}$ при наличии в каждой точке $\lambda \in \mathbb{R}$ априорной оценки, равномерной по α . Технический прием, предлагаемый ниже, состоит в использовании свойств вполне монотонных функций (см. [25, гл. XIII, § 4]) и уравнения Дюамеля для группы $\widehat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)$

$$\widehat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda) = e^{i\omega t} + i\lambda \int_0^t ds e^{i\omega(t-s)} |g^{(\alpha)}\rangle \langle g^{(\alpha)}| \widehat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda). \quad (3.8)$$

1) Пусть $a_t = a_t^{(\alpha)}(\lambda) = (g^{(\alpha)}, \widehat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)f^{(\alpha)})$. Рассмотрим уравнение для $\int_0^t a_s ds$, вытекающее из (3.8):

$$\int_0^t a_s ds = \Phi_t(g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)}) + i\lambda \int_0^t \Phi_{t-s}(g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)}) a_s ds, \quad (3.9)$$

где $\Phi_t(g, f) = \int_0^t ds (g, e^{i\omega s} f) = \mu_{f,g}(0, t)$, $\mu_{f,g}(\cdot)$ – вероятностная мера такая, что

$$\mu_{f,g}(T) = \int_T ds \int_{\mathbb{R}} dt \overline{\widetilde{g}(s-t)} \widetilde{f}(t), \quad \mu_{f,g}(\mathbb{R}) = 2\pi g(0)f(0) = 1.$$

Обозначим через $\widetilde{a}_p = \widetilde{a}_p^{(\alpha)}(\lambda)$ преобразование Лапласа непрерывной ограниченной функции a_t и учитывая, что правая часть уравнения (3.9) содержит свертку, получим эквивалентное уравнение относительно $\widetilde{a}_p$:

$$p^{-1} \widetilde{a}_p = \widetilde{\Phi}_p(g, f) + i\lambda \widetilde{a}_p \widetilde{\Phi}_p(g, g),$$

решением которого является функция $\widetilde{a}_p = p \widetilde{\Phi}_p(g, f) (1 - i\lambda p \widetilde{\Phi}_p(g, g))^{-1}$, где $p \widetilde{\Phi}_p(g, f) = \int_0^\infty e^{-pt} d(g, e^{i\omega t} f) = \widetilde{\mu}_{f,g}(p)$ – преобразование Лапласа вероятностной меры. Поскольку $\Phi_t(g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)}) = \mu_{f,g}(0, t/\alpha)$, то $\widetilde{a}_p^{(\alpha)}(\lambda) = \widetilde{a}_{p\alpha}(\lambda)$ и

$$\widetilde{a}_p(\lambda) = \frac{\widetilde{\mu}_{f,g}(p)}{1 - i\lambda \widetilde{\mu}_{g,g}(p)} = \frac{\widetilde{\mu}_{f,g}(p)}{1 + |\lambda|^2 \widetilde{\mu}_{g,g}^2(p)} + i\overline{\lambda} \frac{\widetilde{\mu}_{f,g}(p) \widetilde{\mu}_{g,g}(p)}{1 + |\lambda|^2 \widetilde{\mu}_{g,g}^2(p)}.$$

Напомним, что класс образов Лапласа положительных мер совпадает с классом вполне монотонных функций. Он содержит функцию $(1 + |\lambda|^2 p)^{-1}$ и замкнут относительно сложения, умножения и композиции (см. [25, гл. XIII, § 4]). Поэтому вещественная и мнимая части $\tilde{a}_{p\alpha}(\lambda)$ являются образами Лапласа конечных мер на $\mathbb{R}_+$:

$$\tilde{a}_p^{(\alpha)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-pt} (A_\lambda(\alpha^{-1} dt) + i\lambda B_\lambda(\alpha^{-1} dt)),$$

$$A_\lambda(\mathbb{R}_+) = \frac{\mu_{f,g}(\mathbb{R}_+)}{1 + |\lambda|^2 \mu_{g,g}^2(\mathbb{R}_+)} = \frac{2}{4 + \lambda^2},$$

$$B_\lambda(\mathbb{R}_+) = \frac{\mu_{f,g}(\mathbb{R}_+) \mu_{g,g}(\mathbb{R}_+)}{1 + |\lambda|^2 \mu_{g,g}^2(\mathbb{R}_+)} = \frac{1}{4 + \lambda^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_T a_s^{(\alpha)}(\lambda) ds = A_\lambda(T/\alpha) + i\lambda B_\lambda(T/\alpha) \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \quad (3.10)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^t a_s^{(\alpha)}(\lambda) ds = A_\lambda(\mathbb{R}_+) + i\lambda B_\lambda(\mathbb{R}_+) = (2 - i\lambda)^{-1} \quad (3.11)$$

для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Частным случаем является утверждение

$$\int_T ds (g^{(\alpha)}, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda), f^{(\alpha)}) \rightarrow (2 - i\lambda)^{-1} I_T(0),$$

справедливое для любого борелевского множества $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

2) Пусть $v \in L_2(\mathbb{R})$. Обозначим через

$$\beta_t^{(\alpha)}(\lambda, \omega) = \int_0^t ds \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda) f^{(\alpha)}(\omega),$$

$$b_t^{(\alpha)}(\lambda, v) = \int d\omega \bar{v}(\omega) \beta_t^{(\alpha)}(\lambda, \omega), \quad \varphi_t(v, f) = \int_0^t ds (v, e^{i\omega s} f).$$

Из уравнения Дюамеля (3.8) и формулы (3.10) следует тождество

$$\begin{aligned} b_t^{(\alpha)} &= \varphi_t(v, f^{(\alpha)}) + i\lambda \int_0^t ds \varphi_{t-s}(v, g^{(\alpha)}) \int_0^{t-s} d\tau (g^{(\alpha)}, \hat{P}_\tau^{(\alpha)}(\lambda) f^{(\alpha)}) \\ &= \varphi_t(v, f^{(\alpha)}) + i\lambda \int_0^t ds \varphi_{t-s}(v, g^{(\alpha)}) \left(A_\lambda(\alpha^{-1}(t-s)) \right. \\ &\quad \left. + i\lambda B_\lambda(\alpha^{-1}(t-s)) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Заметим, что $\int_T dt e^{i\omega t} g^{(\alpha)}(\omega)$ поточечно сходится к $e^{i\omega t} \frac{1}{2} I_{(0,t)}(\omega)$ при $\alpha \rightarrow +0$ в $L_2(\mathbb{R})$ и $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, и поэтому $\varphi_t(v, f^{(\alpha)})$, $\varphi_t(v, g^{(\alpha)})$ сходятся

к $(v, e^{i\omega t} \tilde{I}_{(0,t)})$ в $C(\mathbb{R})$. Поскольку функция $A_\lambda(\alpha^{-1}t) + i\lambda B_\lambda(\alpha^{-1}t)$ измерима, ограничена равномерно по α и поточечно сходится к $(2-i\lambda)^{-1}$, то в правой части (3.12) возможен предельный переход под знаком интеграла: $b_p^{(\alpha)}(\lambda, v) \rightarrow (1 + i\lambda/(2 - i\lambda))(v, e^{i\omega t} \tilde{I}_{(0,t)})$. Поэтому для любого $v \in L_2(\mathbb{R})$ существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^t ds (v, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda) f^{(\alpha)}) = (1 - i\lambda/2)^{-1} (v, e^{i\omega t} \tilde{I}_{(0,t)}), \quad (3.13)$$

т.е. $w - \lim \beta_t^{(\alpha)}(\lambda, \omega) = (1 - i\lambda/2)^{-1} e^{i\omega t} \tilde{I}_{(0,t)}(\omega)$.

3) Перепишем (3.13) в эквивалентном виде:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^t ds (v, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda) f^{(\alpha)}) = \frac{2}{2 - i\lambda} \int \overline{\mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau} v} I_{(0,t)}(\tau) d\tau. \quad (3.14)$$

Поскольку $(g^{(\alpha)}, P_t^{(\alpha)}(\lambda)v) = \overline{(v, P_{-t}^{(\alpha)}(\lambda)g^{(\alpha)})}$, то из предельного соотношения (3.14) следует

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^t ds (g^{(\alpha)}, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda)v) &= \overline{\frac{2}{2 + i\lambda} (\mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau}^* v, I_{(0,t)}(\tau))} \\ &= \frac{2}{2 - i\lambda} (I_{(0,t)}(\tau), \mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau}^* v). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Учитывая, что множество индикаторных функций тотально в $L_2(\mathbb{R})$, мы можем утверждать, что для любых $v \in L_2(\mathbb{R})$ из (3.15) следует

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int ds \bar{r}(t)(g^{(\alpha)}, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda)v) = \frac{2}{2 - i\lambda} (r(\cdot), \mathcal{F}_{\omega \rightarrow \cdot}^* v), \quad (3.16)$$

т.е. $w - \lim (g^{(\alpha)}, \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)v) = (1 - i\lambda/2)^{-1} \mathcal{F}_{\omega \rightarrow t}^* v$ в $L_2(\mathbb{R})$. Отсюда также следует равномерная по α ограниченность нормы слабо сходящейся последовательности $g^{(\alpha)}(t) = (g^{(\alpha)}, \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)v) \in L_2(\mathbb{R})$.

4) Заметим, что сильная сходимость унитарных операторов следует из слабой, а слабая сходимость вытекает из сходимости соответствующих квадратичных форм. Поэтому достаточно показать, что $(v, \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)v) \rightarrow (v, \hat{P}_t(\lambda)v)$ для любого $v \in L_2(\mathbb{R})$. Обозначим $c_t^{(\alpha)} = c_t^{(\alpha)}(\lambda, v) = (v, \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda)v)$. Из уравнения Дюамеля (3.3) вытекает тождество

$$c_t^{(\alpha)} = (v, e^{i\omega t} v) + i\lambda \int_0^t ds (v, e^{i\omega(t-s)} g^{(\alpha)}) (g^{(\alpha)}, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda)v), \quad (3.17)$$

где $\psi^{(\alpha)}(s) = (g^{(\alpha)}, \hat{P}_s^{(\alpha)}(\lambda)v)$ – равномерно ограниченная и слабо сходящаяся в $L_2(\mathbb{R})$ последовательность функций. Обозначим $\tilde{v}(t) = \mathcal{F}_{\omega \rightarrow t} v(\omega)$, $\tilde{v}_\alpha(t) = (v, e^{i\omega t} g^{(\alpha)})$. Поскольку функции g допускают представление (1.4),

то квадрат нормы разности $\delta_\alpha = \|\tilde{v} - \tilde{v}_\alpha\|$ может быть записан в виде интеграла равномерно и абсолютно интегрируемых функций:

$$\delta_\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}^3} dt dr ds \overline{(\tilde{v}(t - \alpha s) - \tilde{v}(t))\tilde{g}(s)} (\tilde{v}(t - \alpha r) - \tilde{v}(t))\tilde{g}(r),$$

допускающем предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ под знаком интеграла для любых $v \in L_2(\mathbb{R})$, $g \in L_{2,1}^+(\mathbb{R})$. Таким образом, имеет место сходимост по норме $\tilde{v}_\alpha \rightarrow \tilde{v}$. Теперь равномерная по α ограниченность в $L_2(\mathbb{R})$ слабо сходящейся последовательности $(g^{(\alpha)}, \tilde{P}_s^{(\alpha)}(\lambda)v)$ позволяет воспользоваться предельным соотношением 3) и совершить предельный переход под знаком интеграла (3.17):

$$\begin{aligned} c_t^{(\alpha)} &\rightarrow \left(v, e^{i\omega t} \left\{ I + \frac{2i\lambda}{2 - i\lambda} \int_0^t ds e^{-i\omega s} \mathcal{F}_{\omega \rightarrow s}^* \right\} v \right) \\ &= \left(v, e^{i\omega t} \left\{ I + \frac{2i\lambda}{2 - i\lambda} \hat{\pi}_{(0,t)} \right\} v \right). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем слабый и сильный пределы

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{P}_t^{(\alpha)}(\lambda) = I + \frac{2i\lambda}{2 - i\lambda} \hat{\pi}_{(0,t)} = \frac{2 + i\lambda}{2 - i\lambda} \hat{\pi}_{(0,t)} + \hat{\pi}_{(0,t)}^a = \exp\{iZ(\lambda)\hat{\pi}_{(0,t)}\},$$

где $\hat{\pi}_{(0,t)}$ – описанный выше проектор в $L_2(\mathbb{R})$, а $\hat{\pi}_{(0,t)}^a = I - \hat{\pi}_{(0,t)}$ – его ортогональное дополнение. Лемма доказана.

Пределы 1)–4) соответствуют предельным переходам в четырех составляющих решения (3.6), зависящих от α . Подставляя 1)–4) в (3.6), находим унитарную группу $U_t = \exp\{i\mathbf{H}t\} = s - \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_t^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned} U_t h \otimes \psi(v) &= \int e^{iH(\lambda)t} E(d\lambda) h \\ &\otimes \psi \left(e^{iZ(\lambda)\hat{\pi}_{(0,t)}} e^{i\omega t} v + i\rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)} \frac{2}{2 - i\lambda} (\tilde{I}_{(0,t)}, v) \right) \\ &\times \exp \left\{ i\rho(\lambda) e^{-i\Phi(\lambda)} \frac{2}{2 - i\lambda} (\tilde{I}_{(0,t)}, e^{i\omega t} v) \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $H(\lambda) = \nu(\lambda) + i\rho^2/(2 - i\lambda)$. Вычисляя производную по времени правой части (3.18), получаем гамильтониан $\mathbf{H}$, совпадающий с формулой (1.5).

Рассмотрим теперь функцию множества $u(0, t) = U_t J_t^*$. Учтывая, что $J_t^* \psi(v) = \psi(e^{-i\omega t} v)$, мы получаем из (3.18)

$$\begin{aligned} u(T) h \otimes \psi(v) &= \int e^{iH(\lambda) \text{mes } T} E(d\lambda) h \otimes \psi \left(e^{iZ(\lambda)\hat{\pi}_T} v \right. \\ &\left. + i\rho(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)} \frac{2}{2 - i\lambda} \tilde{I}_T \right) \exp \left\{ i\rho(\lambda) e^{-i\Phi(\lambda)} \frac{2}{2 - i\lambda} (\tilde{I}_T, v) \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Нетрудно видеть, что интервально согласованное семейство коммутирующих операторов $u(T)$ удовлетворяет закону композиции $u(T_1 \cup T_2) = u(T_1)u(T_2)$ для непересекающихся множеств, а слабое эволюционное уравнение имеет вид

$$d(h \otimes \psi(v), u(0, t)h \otimes \psi(v)) = i(h \otimes \psi(v), u(0, t)H(dt_+)h \otimes \psi(v)),$$

где $iH(T) = M(T) = \int_T dt (J_t \mathbf{H} J_t^* - \hat{\mathbf{E}} \otimes I)$,

$$\begin{aligned} H(T) = & \left(H_0 - R^* \frac{K}{4 + K^2} R + R^* \frac{2i}{4 + K^2} R \right) \otimes \text{mes } T \\ & + \frac{2}{2 - iK} R \otimes A^+(T) + R^* \frac{2}{2 - iK} \otimes A(T) + i(I - W) \otimes \Lambda(T). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. *С точностью до унитарного преобразования J_t семейство решений уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (3.3) сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к решению $u(t)$ стохастического уравнения (3.1) с коэффициентами (1.5): $u(t) = s - \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_t^{(\alpha)} J_t^*$. Условия (1.6) являются следствием симметричности гамильтониана (3.3) и имеют смысл необходимых условий симметричности генератора предельной группы U_t .*

4. Замена меры при симметризации стохастического интеграла. Как будет показано в этом разделе, замена операторзначной меры при симметризации стохастического дифференциального уравнения является операцией, в известном смысле, обратной резольвентному предельному переходу: с точностью до слагаемого $\hat{\mathbf{E}}$ она сопоставляет слабый предел резольвентному. Наша ближайшая цель – вывод симметризованного уравнения для функций $u(t) = u(0, t)$, эквивалентного (3.1): более точно, будет построена операторзначная мера $N(T)$ такая, что

$$w - \lim \varepsilon^{-1} u(t) M(t, t + \varepsilon) \varphi = w - \lim \varepsilon^{-1} u(t) N(t - \varepsilon/2, t + \varepsilon/2) \varphi.$$

Начнем с подходящего выбора семейства операторзначных мер $M(\cdot)$ в уравнении (3.1). Пусть $\mathcal{D}$ – тотальное подмножество в $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{\hat{\mathcal{T}}}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\hat{\pi}_T = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega}^* I_T(\tau) \mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau}$. Для уравнений (3.1) с ограниченными коэффициентами в качестве $\mathcal{D}$ можно использовать $\mathcal{D} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_1$, где $\mathcal{E}_1 \subset \Gamma^S$ – множество когерентных векторов $\psi(f)$ таких, что $|\tilde{f}(\omega)| \leq 1$, а ее прообраз $f(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ – финитная функция. Множество $\mathcal{E}_1$ тотально в Γ^S , а множество $\mathcal{D}$ тотально в $\mathbb{H}$. Для уравнений с неограниченными коэффициентами $\mathcal{D} = D_0 \otimes \mathcal{E}_1$, где D_0 – плотная в $\mathcal{H}$ общая область определения операторов L_k и их произведений.

Рассмотрим класс $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ интервально согласованных функций множества $M: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H}_{\hat{\mathcal{T}}})$ со следующими свойствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Классом $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ называется векторное пространство интервально согласованных функций множества $M: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^{\hat{\pi}})$ таких, что для любого $\varphi \in \mathcal{D}$

(i) существует верхняя грань (слабая мажоранта)

$$\sup_{\{\psi_j\}, \{T_j\}} \sum_j |(\psi_j, M(T_j)\varphi)| = \mu_T(\varphi), \quad (4.1)$$

являющаяся локально-конечной мерой, обращающаяся в нуль, если $\text{mes } T = 0$, $h_j = B_{T_j^a} h$, $\sup_j \|h_j\| \leq c < \infty$ для непересекающихся разбиений $\{T_j\}$ ограниченного множества $T: \{T_j: \bigcup T_j = T, T_i \cap T_j = \emptyset\}$, и $\psi_j \in \mathcal{B}_{T_j^a}$, $\sup_j \|\psi_j\| \leq 1$.

(ii) существует правая производная

$$f_t(\psi, \varphi) = \frac{(\psi, M(dt_+)\varphi)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (\psi, M(t, t + \varepsilon)\varphi), \quad \psi \in \mathbb{H}, \quad (4.2)$$

являющаяся непрерывной функцией $\mathbb{H} \rightarrow \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ для фиксированного $\varphi \in \mathcal{D}$.

Условие (i) означает существование слабой абсолютной априорной оценки для интегральных сумм, равномерной относительно разбиения $\{T_j\}$, а условие (ii) – существование слабой мажоранты, абсолютно непрерывной относительно стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$. Заметим, что функции из класса $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ не предполагаются аддитивными.

Для упрощения обозначений зафиксируем систему ортопроекторов $\{\hat{\pi}_T\}$ и борелевскую σ -алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и будем писать $\mathbb{H}_{\mathcal{D}}^{\hat{\pi}} = \mathbb{H}$. Обозначим $\delta_N = 2^{-N}$, $\tau_j = \tau_j^{(N)} = j2^{-N}$, $J_N(T) = \{j: \tau_j \in T\}$.

ЛЕММА 4.1. Для любого $L \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$, $\varphi \in \mathcal{D}$ и любого сильно непрерывного согласованного семейства ограниченных операторов $u(t) = u(0, t)$ существуют интервально согласованные слабые пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_N(T)} u(\tau_j^{(N)}) M(\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)}) \varphi = \int_T u(\tau) M(d\tau_+) \varphi, \quad (4.3)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{j \in J_N(T)} u(\tau_j^{(N)}) M(\tau_j^{(N)}, \tau_j^{(N)} + \delta_{N+1}) \varphi = \int_0^t u(\tau) M(d\tau_+) \varphi, \quad (4.4)$$

называемые неупреждающими интегралами относительно интервально согласованного процесса L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможность предельного перехода под знаком суммы следует из априорной оценки верхней грани (4.1) в классе $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{j \in J_N(T)} |(h, u(\tau_j)M(\tau_j, \tau_{j+1})\varphi)| \\ &\leq \sup_N \sum_{j \in J_N(T)} |(h_j, M(\tau_j, \tau_{j+1})\varphi)| \leq \mu_T(\varphi) \end{aligned}$$

для $h_j = u^*(0, \tau_j)h$, $\|h\| \leq 1$, и абсолютной интегрируемости поточечного предела:

$$f_t(u^*(0, t)\psi, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (u^*(0, t)\psi, M(t, t + \varepsilon)\varphi) \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

вытекающей из условия (4.2). Таким образом,

$$\lim I_N = \int_T dt f_t(u^*(0, t)\psi, \varphi).$$

Для доказательства (4.4) рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=0}^{J_N(t)} u(\tau_j^{(N)})M(\tau_j^{(N)}, \tau_j^{(N)} + \delta_{N+1}) &= \sum_{j=0}^{J_N(t)} u(\tau_j^{(N)})M(\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)} + \delta_{N+1}) \\ &+ \sum_{j=0}^{J_N(t)} u(\tau_j^{(N)}) (M(\tau_j^{(N)}, \tau_j^{(N)} + \delta_{N+1}) - M(\tau_j^{(N)} + \delta_{N+1}, \tau_{j+1}^{(N)})). \end{aligned}$$

Как было показано выше, первая сумма сходится к интегралу (4.3), а вторая слабо абсолютно ограничена равномерно по N и почленно слабо сходится к нулю. Поэтому во втором слагаемом возможен предельный переход под знаком суммы, в результате которого второе слагаемое обращается в нуль. Лемма доказана.

Пусть $M^{(1)}, M^{(2)}, \dots$ – интервально согласованные функции множества из $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$. Например, $M^{(k)}(T) = L_k \otimes M_k(T)$ (см. (2.7)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Локально выпуклым векторным пространством* $G_{\mathcal{D}} = G_{\mathcal{D}}(M^{(1)}, M^{(2)}, \dots) \subseteq \mathbb{H}$ является замыкание множества $\text{Span } \mathcal{D} \subseteq \mathbb{H}$, относительно системы полунорм:

$$\rho_t(\varphi) = \|\varphi\| + \sup_{\tau, \psi, \{i_k\}, \{T_j\}} \frac{|(\psi, M^{(i_1)}(T_1)M^{(i_2)}(T_2)J_{\tau}\varphi)|}{\prod_j \text{mes } T_j}, \quad (4.5)$$

где $\varphi \in \text{Span } \mathcal{D}$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $\psi \in \mathbb{H}_{T^a}$, $\|\psi\| \leq 1$, $T_a = \mathbb{R} \setminus \{T_1 \cup T_2\}$, $\tau \in (0, t)$, $T_j \subseteq (0, t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Мы предполагаем также, что множество $G_{\mathcal{D}}$ плотно в $\mathbb{H}$.

Множество $G_{\mathcal{D}}$ инвариантно относительно группы J_t : $\rho_t(g) = \rho_t(J_{\tau}g)$, $G_{\mathcal{D}} = J_{\tau}G_{\mathcal{D}}$. Коцикличность в смысле [14] фундаментальных процессов (2.5) является очевидным следствием определения (2.6) операторов J_t . Например, $J_t^* A(T) J_t \psi(v) = (\tilde{I}_T, e^{i\omega t} v) \psi(v) = (\tilde{I}_{T+t}, v) \psi(v) = A(T+t) \psi(v)$. В дальнейшем предполагается, что меры $M(\cdot)$, построенные из фундаментальных процессов, также коцикличны: $M(T+t) = J_t^* M(T) J_t$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $u(t)$ – ограниченное слабое решение уравнения (3.1). Если существует плотное в $\mathbb{H}$ множество $\mathcal{D} = G_{\mathcal{D}}(L, M)$ такое, что $L, ML \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$, где L – аддитивная функция множества, и полунорма $\rho_{\tau}(L(0, \tau)g)$ локально равномерно ограничена по параметру $\tau \in \mathbb{R}$ для любых $g \in \mathcal{D}$, то согласованный и симметризованный стохастические интегралы связаны соотношением

$$\int_0^t u(\tau) \left(L(d\tau_+) + \frac{1}{2} M(d\tau_+) L(d\tau_+) \right) = \int_0^t u(\tau) L(d\tau). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t)$ – решение уравнения (4.3). Рассмотрим семейство операторов $u_s(t) = u(s) + u(s)M(s, t)$. Разность $\Delta_u(s, t) = u(t) - u_s(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_u(s, t) = \int_s^t \int_s^{\sigma} u(\tau) M(d\tau_+) M(d\sigma_+)$$

и для любых $\psi \in \mathbb{H}$, $\|\psi\| \leq 1$, $\varphi \in \mathcal{D}$ равномерно по j выполнена оценка

$$|(\psi, \Delta_u(s, t) L(\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)}) \varphi)| \leq \frac{(t-s)^2}{2} \sup_{\tau \in (0, t)} \|u(\tau) \psi\| \rho_{t-s}(L(0, 2^{-N}) \varphi), \quad (4.7)$$

вытекающая из определения (4.5) полунормы ρ_t . В силу уравнения для $u(t)$ и аддитивности функции $L(\cdot)$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} u(\tau_j) L(\tau_j, \tau_{j+1}) &= u(\tau_{j+1/2}) L(\tau_j, \tau_{j+1}) - u(\tau_j) (ML)(\tau_j, \tau_{j+1/2}) \\ &\quad - u(\tau_j) M(\tau_j, \tau_{j+1/2}) L(\tau_{j+1/2}, \tau_{j+1}) \\ &\quad - \Delta_u(\tau_j, \tau_{j+1/2}) L(\tau_j, \tau_{j+1}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.5) также следует, что для любых $g, h \in \mathcal{D}$ выполнены равномерные по j априорные оценки

$$\begin{aligned} \delta_{j,N}^{(1)} &= |(\psi, u(\tau_j) M(\tau_j, \tau_{j+1/2}) L(\tau_{j+1/2}, \tau_{j+1}) \varphi)| \\ &\leq 2^{-2N} \sup_{\tau \in (0, t)} \|u^*(\tau) \psi\| \rho_{\tau_1}(\varphi), \end{aligned}$$

а из (4.5) и (4.7) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \delta_{j,N}^{(2)} &= |(\psi, \Delta_u(\tau_j, \tau_{j+1/2}) ML(\tau_j, \tau_{j+1}) \varphi)| \\ &\leq 2^{-2N} \sup_{\tau \in (0, t)} \|u^*(\tau) \psi\| \rho_{\tau_1}(L(0, \tau_1) \varphi), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где полунорма $\rho_{\tau_1}(L(0, \tau_1)g)$ в силу условия теоремы ограничена равномерно по N . Следовательно, $\lim_N \sum_j \delta_{j,N}^{(1,2)} = 0$. Теперь остается заметить, что поскольку $L, ML \in \mathcal{A}_\mathcal{D}$, то имеет место слабая сходимость

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_N(T)} u(\tau_j) L(\tau_j, \tau_{j+1}) &= \int_T u(\tau) L(d\tau_+), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_N(T)} u(\tau_j) M(\tau_j, \tau_{j+1/2}) L(\tau_j, \tau_{j+1/2}) &= \frac{1}{2} \int_T u(\tau) M(d\tau_+) L(d\tau_+), \end{aligned}$$

Поэтому из тождества (4.8) и леммы 4.1 следует существование слабого предела, называемого *симметризованным* стохастическим интегралом,

$$\begin{aligned} \int_T u(\tau) L(d\tau) &= \lim_N \sum_{j \in J_N(T)} u(\tau_{j+1/2}) L(\tau_j, \tau_{j+1}) \\ &= \int_T u(\tau) \left(L(d\tau_+) + \frac{1}{2} M L(d\tau_+) \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Теорема доказана.

Формула (4.10) имеет смысл *уравнения* для замены операторной меры при переходе от неупреждающего интеграла относительно $N(dt) = L(dt) + \frac{1}{2} M(dt) L(dt)$ к симметризованному интегралу относительно $L(dt)$. Условие (4.10) выполнено, если функция $L(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$L(T) + \frac{1}{2} \int_T M(dt_+) L(dt_+) = N(T) \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (4.11)$$

Покажем, как может быть найдена симметризованная форма дифференциала для уравнений с ограниченными коэффициентами. Пусть

$$\begin{aligned} M(T) = N(T) &= \sum_0^3 \mathcal{L}_i \otimes M_i(T), \quad L(T) = \sum_0^3 \ell_i \otimes M_i(T), \\ M_0(T) &= I \cdot \text{mes } T, \quad M_1(T) = A(T), \\ M_2(T) &= A^+(T), \quad M_3(T) = \Lambda(T). \end{aligned}$$

В этом случае уравнение (4.11) имеет вид:

$$\int_T \left(L(dt) + \frac{1}{2} M(dt) L(dt) \right) = M(T).$$

Используя правило умножения стохастических дифференциалов (см. [10]) в правой части уравнения $L(dt) + \frac{1}{2} M(dt) L(dt) = \sum_j \mathcal{L}_j \otimes M_j(dt)$, получим систему уравнений относительно коэффициентов ℓ_k :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \ell_0 + \mathcal{L}_1 \ell_2 / 2, & \mathcal{L}_1 &= \ell_1 + \mathcal{L}_1 \ell_3 / 2, \\ \mathcal{L}_2 &= \ell_2 + \mathcal{L}_3 \ell_2 / 2, & \mathcal{L}_3 &= \ell_3 + \mathcal{L}_3 \ell_3 / 2. \end{aligned}$$

Предположим, что оператор $2 + \mathcal{L}_3$ обратим и $(2 + \mathcal{L}_3)^{-1} \mathcal{L}_2: D_0 \rightarrow \text{dom } \mathcal{L}_1$, $(2 + \mathcal{L}_3)^{-1}: D_0 \rightarrow \text{dom } \mathcal{L}_1$. Тогда решение этой системы уравнений строится следующим образом:

$$\begin{aligned} \ell_3 &= 2\mathcal{L}_3(2 + \mathcal{L}_3)^{-1}, & \ell_1 &= 2\mathcal{L}_1(2 + \mathcal{L}_3)^{-1}, \\ \ell_2 &= 2(2 + \mathcal{L}_3)^{-1} \mathcal{L}_2, & \ell_0 &= \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1(2 + \mathcal{L}_3)^{-1} \mathcal{L}_2. \end{aligned}$$

Подставляя в качестве $\mathcal{L}_k$ коэффициенты $\mathcal{L}_k = iL_k$ (1.5), где

$$\text{Im } \mathcal{L}_0 = H_0 - R^* \frac{k}{4 + k^2} R, \quad \text{Re } \mathcal{L}_0 = -R^* \frac{2}{4 + k^2} R = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_2^* \mathcal{L}_2,$$

получаем коэффициенты слабого предела гамильтонианов (3.3) (с точностью до слагаемого $\mathbf{E} \otimes I$ и множителя i , связанного с различием в записи уравнения Шрёдингера и уравнения Хадсона–Партасарати): $\ell_3 = iK$, $\ell_1 = iR^*$, $\ell_2 = iR$, $\ell_0 = iH_0$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4.2. *Операторная мера $N(T)$ симметризованного стохастического уравнения связана со слабым пределом H гамильтонианов (3.3) соотношением $N(T) = i \int_T d\tau (J_\tau H J_\tau^* - \widehat{\mathbf{E}} \otimes I)$.*

В совокупности с утверждением теоремы 4.2 этот результат означает, что переход от симметризованного стохастического уравнения к неупреждающему эквивалентен переходу от резольвентного предела семейства гамильтонианов (3.3) к слабому. Семейство операторов $\widehat{\mathbf{H}}(T) = iN(T)$ мы называем *гамильтонианом* уравнения Хадсона–Партасарати.

В следующем разделе обсуждаются ограничения на коэффициенты L_k , при которых для класса функций множества (2.7) выполнены предположения, включенные в определения 4.1 и 4.2.

5. Предположения о коэффициентах стохастических уравнений. Пусть L_i , ($i = 0, 1, 2, 3$) – плотно определенные операторы, действующие в $\mathcal{H}$, имеющие общую область определения D_0 такую, что $L(i_n) = L_{i_1} \cdots L_{i_n}: D_0 \rightarrow \mathcal{H}$ для любого конечного n , $i_n = \{i_1, \dots, i_n\}$. Пусть, далее, $\mathcal{E}_1 \subset \Gamma^S$ – множество когерентных векторов $\psi(f)$ таких, что $|\tilde{f}(\omega)| \leq 1$, а ее прообраз $f(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ – финитная функция. Множество $\mathcal{E}_1$ тотально в Γ^S , а множество $\mathcal{D} = D_0 \otimes \mathcal{E}_1$ тотально в $\mathbb{H}$ (см. [11], [12]).

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $\mathcal{D} = D_0 \otimes \mathcal{E}_1$. Тогда $M \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ и $\mathcal{D} \subset G(M^{(i_1)}, M^{(i_1)}, \dots)$ для интервально согласованных функций множества (2.7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для функций множества (2.7) выполнены условия (i)–(ii).

Пусть $h = \varphi \otimes \psi(f)$, $g = \chi \otimes \psi(v)$, $\varphi, \chi \in D_0$, $\psi(f), \psi(v) \in \mathcal{E}_1$. Из определения фундаментальных процессов и условия интервальной согласованности следует, что для любого слабо непрерывного семейства равномерно ограниченных операторов $B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ средние значения

$$\sigma_j = (h_j, L_i M_i(T_j) g), \quad h_j = B_{t_j} \{ \varphi \otimes \psi(\widehat{\pi}_{j_j} f) \} \otimes \psi(\widehat{\pi}_{j_j} v),$$

где $T_j \subseteq (t_j, s_j)$, $J_j = (0, s_j)$, $J_j^a = \mathbb{R} \setminus J_j$, распадаются на произведения (см. формулу (2.2)):

$$\sigma_j = e^{(f, \widehat{\pi}_{J_j^a} v)} \cdot \mu_{i,j}(f, v) \cdot \left(B_{t_j} \{ \varphi \otimes \psi(\widehat{\pi}_{(0,t_j)} f) \}, L_i \chi \otimes \psi(\widehat{\pi}_{(0,t_j)} v) \right),$$

отличные от нуля при $k_0 = l_0 = k_1 = l_2 = 0$, $l_1 = k_2 = k_3 = l_3 = 1$, где $|\widetilde{f}(\tau)|, |\widetilde{v}(\tau)| \leq 1$, и

$$\mu_{i,j}(f, v) = (\psi(\widehat{\pi}_{T_j} f), M_i(T_j) \psi(\widehat{\pi}_{T_j} v)) = \int_{T_j} \overline{(\widetilde{f}(\tau))^{k_i}} (\widetilde{v}(\tau))^{l_i} d\tau.$$

Поэтому $|\mu_{i,j}(f, v)| \leq \text{mes } T_j$ и функция $\mu_{u^*, T}(g, h)$ имеет абсолютно непрерывную мажоранту:

$$\begin{aligned} \mu_{u^*, T}(g, h) &= \sup_{\{T_j\}} \sum_j |\sigma_j| \\ &\leq \text{mes } T \cdot \sup_{\tau \in (0, t)} \|B_\tau\| \cdot \|\varphi\| \cdot e^{(\|f\|^2 + \|v\|^2)/2} \sum_j \|L_j \psi\|, \end{aligned}$$

а производная (4.2) равна $f_t(g, h) = \sum_i \overline{(\widetilde{f}(t))^{k_i}} (\widetilde{v}(t))^{l_i} \beta_t^{(i)}$, где

$$\beta_t^{(i)} = e^{(f, \widehat{\pi}_t v)} \cdot \left(B_t \{ \varphi \otimes \psi(\widetilde{I}_{(0,t)} f) \}, L_i \chi \otimes \psi(\widetilde{I}_{(0,t)} v) \right), \quad I_t = \mathbb{R} \setminus (0, t).$$

В дальнейшем изложении роль операторов B_t играет семейство $u^*(t)$, сопряженное сильно непрерывному семейству $u(t)$. В случае, если операторы $u^*(t)$ изометричны, из тождества $\|u_t^* - I\|g\|^2 = (g, (I - u_t)g) + ((I - u_t)g, g)$ следует сильная непрерывность семейства $u^*(t)$. В общем случае это семейство слабо непрерывно. Поэтому мы ограничиваемся здесь предположением слабой непрерывности семейства операторов B_t , из которой следует непрерывность функций $\beta_t^{(i)}$, а из интегрируемости и ограниченности функций $f(t), v(t)$ следует, что $f_t(g, h) \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}$. Таким образом, $M(\cdot) \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$.

Пусть теперь $M^{(1)}, M^{(2)}$ – интервально согласованные функции вида (2.7). Покажем, что функция множества $M(T) = \int_T M^{(1)}(dt_+) M^{(2)}(dt_+)$ также принадлежит $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$.

Используя приведенные выше в п. 2 коммутационные соотношения между $M_i(T)$ и $M_j(T)$ и формулы (3.2) для средних значений $|\widetilde{f}|, |\widetilde{v}| \leq 1$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \left(\psi(f), \int_T M_i(dt_+) M_j(dt_+) \psi(v) \right) \right| &\leq \text{mes } T \cdot (1 + \text{mes } T) |e^{(f, v)}| \\ &\leq J_T(f, v) \cdot \text{mes } T \end{aligned}$$

для любых векторов $\psi(f), \psi(v)$ из $\mathcal{E}_1$. Поэтому выполнено предположение (i) о существовании абсолютно непрерывной мажоранты:

$$F_T(f, v) \leq J_T(f, v) \cdot \text{mes } T \cdot \|\varphi\| \cdot e^{(\|f\|^2 + \|v\|^2)/2} \cdot \sup_{\tau \in (0, t)} \|B_\tau\| \times \sum_{i, j} \|L_i^{(1)} L_j^{(2)} \psi\|.$$

Предположение (ii) проверяется с учетом оценок (5.1). Ненулевой вклад в производную (4.2) дают следующие члены:

$$f_t(f, v) = e^{(f, \hat{\pi}_t v)} \sum_{j_l \in J} \overline{(\tilde{f}(\tau))^{n_{j_l}}} (\tilde{v}(\tau))^{m_{j_l}} \times \left(B_t \{ \varphi \otimes \psi(\hat{\pi}_{(0, t)} f) \}, \{ L_i^{(1)} L_k^{(2)} \psi \} \otimes \psi(\tilde{I}_{(0, t)} v) \right),$$

$$J = \{j_1, j_2, j_3, j_4\}, \quad j_1 = \{i = 1, k = 2\},$$

$$j_2 = \{i = 3, k = 3\}, \quad j_3 = \{i = 3, k = 2\}, \quad j_4 = \{i = 1, k = 3\},$$

где $l_{j_1} = m_{j_1} = m_{j_3} = l_{j_4} = 0, l_{j_2} = m_{j_2} = l_{j_3} = m_{j_4} = 1$. В частности, если $M(\cdot)$ – функция вида (2.7), то

$$\int_T u(t) M^2(dt_+) = \int_T u(t) \{ L_1 L_2 dt + L_1 L_3 A(dt_+) + L_3 L_2 A^+(dt_+) L_3^2 \Lambda(dt_+) \}.$$

Покажем теперь, что $\mathcal{D} \in G_n(M^{(1)}, M^{(2)}, \dots)$ для любого $n \geq 1$. Из условий интервальной согласованности операторов B_n следует, что

$$|(h(\mathbf{i}_n), M^{(i_1)}(T_1) \dots M^{(i_n)}(T_n) J_\tau g)| \leq \sum_{\mathbf{j}_n} |C(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n) D(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n)|,$$

где $\mathbf{i}_n = \{i_1, \dots, i_n\}, \mathbf{j}_n = \{j_1, \dots, j_n\}, h(\mathbf{i}_n) = B(\mathbf{i}_n)h, h \in \mathcal{D}, B(\mathbf{i}_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_{T(n)}), T(n) = \mathbb{R} \setminus \bigcup T_m, M^{(i)}(T) = \sum_{j=0}^3 L_j^{(i)} M_j(T),$

$$C(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n) = \left(B_t \{ \varphi \otimes \psi(\hat{\pi}_{T(n)} f) \}, \{ L_{j_1}^{(i_1)} \dots L_{j_n}^{(i_n)} \chi \} \otimes \psi(J_\tau \tilde{I}_{T(n)} v) \right),$$

$$D(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n) = \prod_{m=1}^n (\psi(\hat{\pi}_{T_m} f), M_{j_m}(T_m) \psi(J_\tau \tilde{I}_{T_m} v)),$$

$$1 \leq i_m \leq n, \quad 0 \leq j_k \leq 3.$$

Нетрудно видеть, что $|\tilde{f}|, |\tilde{h}| \leq 1$ для $\psi(f), \psi(v) \in \mathcal{E}_1$, и поэтому для непесекающихся множеств T_m имеют место оценки

$$\begin{aligned} (\psi(\widehat{\pi}_{T_m} f), M_{j_m}(T_m) \psi(J_\tau \tilde{I}_{T_m} v)) &\leq \text{mes } T_m \cdot e^{(\|\widehat{\pi}_{T_m} f\|^2 + \|\widehat{\pi}_{T_m} v\|^2)/2}, \\ |D(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n)| &\leq e^{(\|\tilde{f} \cdot I_T\|^2 + \|\tilde{v} \cdot I_T\|^2)/2} \prod_{m=1}^n \text{mes } T_m, \quad T = \bigcup T_m, \\ |C(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n)| &\leq e^{(\|\widehat{\pi}_{T(n)} f\|^2 + \|\widehat{\pi}_{T(n)} v\|^2)/2} \|B_n\| \\ &\quad \times \|\varphi\| \sum_{\mathbf{j}_n} \|L_{j_1}^{(i_1)} \dots L_{j_n}^{(i_n)} \psi\| < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $T \cup T(n) = \mathbb{R}$, то

$$\rho_t(g) \leq e^{(\|f\|^2 + \|v\|^2)/2} \sup_n \|B_n\| \cdot \|\varphi\| \sum_{\mathbf{j}_n} \|L_{j_1}^{(i_1)} \dots L_{j_n}^{(i_n)} \psi\| < \infty.$$

Теорема доказана.

Для проверки условий теоремы 4.1 покажем, что для аддитивной функции $L(0, t)$ вида (2.7) полунорма $\rho_t(L(0, t)g)$ локально ограничена по t .

Рассмотрим оценку скалярного произведения в $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} &|(h_n, M^{(i_1)}(T_1) \dots M^{(i_n)}(T_n) J_\tau L(0, t)g)| \\ &\leq \sum_{\mathbf{j}_n} |\tilde{C}(\mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{j}_{n+1}) \tilde{D}(\mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{j}_{n+1})|, \\ \tilde{C}(\mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{j}_{n+1}) &= \left(\{B_t \varphi \otimes \psi(\widehat{\pi}_{(0,t)} f)\}, L_{j_1}^{(i_1)} \dots L_{j_{n+1}}^{(i_{n+1})} \chi \otimes \psi(e^{i\omega\tau} \widehat{\pi}_{(0,t)} v) \right), \\ \tilde{D}(\mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{j}_{n+1}) &= \left(\psi(\widehat{\pi}_{(0,t)} f), \left(\prod_{m=1}^n M_{j_m}(T_m) \right) M_{j_{n+1}}[0, t] \psi(e^{i\omega\tau} \widehat{\pi}_{(0,t)} v) \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Воспользуемся аддитивностью функции множества $M_{j_{n+1}}(\cdot)$:

$$M_{j_{n+1}}(0, t) = \sum_{l=1}^n M_{j_{n+1}}(T_l) + M_{j_{n+1}}(T_{n+1}), \quad T_{n+1} = [0, t] \setminus \bigcup_1^m T_m. \quad (5.2)$$

Учитывая, что для различных m множества T_m не пересекаются, а операторы $M_{j_m}(T_m)$ коммутируют, получаем из (5.1) и (5.2)

$$\begin{aligned} &|\tilde{D}(\mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{j}_{n+1})| \\ &= \left| \sum_{l=1}^n \left(\psi(\widehat{\pi}_{(0,t)} f), \left(\prod_{m=1}^n M_{j_m}(T_m) \right) M_{j_{n+1}}(T_l) \psi(\widehat{\pi}_{(0,t)} v) \right) \right. \\ &\quad \left. + \prod_{m=1}^{n+1} (\psi(\widehat{\pi}_{(0,t)} f), M_{j_m}(T_m) \psi(\widehat{\pi}_{(0,t)} v)) \right| \\ &\leq J_t \left\{ n \cdot \prod_{m=1}^n \text{mes } T_m + \prod_{m=1}^{n+1} \text{mes } T_m \right\} e^{(\|\widehat{\pi}_{(0,t)} f\|^2 + \|\widehat{\pi}_{(0,t)} v\|^2)/2} \end{aligned}$$

локально равномерно по τ , так как норма $\|J_\tau v\|_{\mathcal{L}_2}$ инвариантна относительно сдвига. Аналогично,

$$|\tilde{C}(\mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{j}_{n+1})| \leq e^{(\|\hat{\pi}_{(0,t)} f\|^2 + \|\hat{\pi}_{(0,t)} v\|^2)/2} \|B_n\| \cdot \|\varphi\| \|L_{j_1}^{(i_1)} \dots L_{j_{n+1}}^{(i_{n+1})} \psi\|$$

равномерно по τ . Окончательно имеем

$$\rho_t(L(0, t)g) \leq J_t e^{(\|f\|^2 + \|v\|^2)/2} \|\varphi\| \sup_n \|B_n\| \sum_{j_n} \|L_{j_1}^{(i_1)} \dots L_{j_{n+1}}^{(i_{n+1})} \psi\| < \infty$$

локально равномерно по τ, t . Таким образом, для класса мер (2.7) выполнены условия теоремы 4.1.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970.
- [2] Haake F. Stochastic treatment of open systems by general master equations. N. Y., London, Berlin, Tokyo: Springer Verlag, 1973.
- [3] Davies E. B. Quantum theory of open systems. London: Acad. Press, 1976.
- [4] Helström C. W. Quantum detection and estimation theory. London: London Acad. Press, 1976.
- [5] Gardiner C. W., Collett M. J. Input and output in damped quantum systems: quantum statistical differential equations and the master equation // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 3761–3774.
- [6] Chebotarev A. M., Fagnola F., Frigerio A. Towards a stochastic Stone's theorem // Stochastic partial differential equations and applications. Pitman Research Notes in Math., 1992. P. 86–97.
- [7] Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum stochastic processes // Publ. Rims. Kyoto Univ. 1982. V. 18. P. 97–133.
- [8] Gorini V., Kossakovsky A., Sudarshan E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of n -level systems // J. Math. Phys. 1976. V. 17. № 3. P. 821–825.
- [9] Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Comm. Math. Phys. 1976. V. 48. № 2. P. 119–130.
- [10] Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions // Comm. Math. Phys. 1984. V. 93. № 3. P. 301–323.
- [11] Meyer P. A. Quantum probability for probabilists. Lecture Notes in Math. V. 1338, 1993.
- [12] Parthasarathy K. R. An introduction to quantum stochastic calculus. Basel: Birkhauser, 1992.
- [13] Belavkin V. P. A quantum nonadapted Ito formula and stochastic analysis in Fock space // J. Funct. Anal. 1991. V. 102. № 2. P. 414–447.
- [14] Journee J.-L. Structure des cocycles markovins sur l'espace de Fock // Probab. Theory Related Fields. 1987. V. 75. P. 291–316.
- [15] Холево А. С. Стохастические представления квантовых динамических полугрупп // Тр. МИАН. 1989. Т. 191. С. 130–139.
- [16] Holevo A. S. Exponential formulae in quantum stochastic calculus // Proc. Roy. Soc. Edinburg. Sect. A. 1996. V. 126. P. 375–389.

- [17] Кошманенко В. Д. Возмущения самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. № 1. С. 3–18.
- [18] Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1993.
- [19] Aberg C., Lubenets E. R. Quantum stochastic calculus and nondemolition measurements. Notes on a Recent Approach to Quantum Measurement. Report № 94–28. Goteborg: Institute of Theoretical Physics, 1994.
- [20] Lubenets E. R. Quantum stochastic equation as a limit of the Schrödinger evolution (to appear).
- [21] Chebotarev A. M. Minimal solutions in classical and quantum probability // Quantum probability and related topics / ed. L. Accardi. Singapore: World Scientific, 1992.
- [22] Chebotarev A. M. Sufficient conditions for conservativity of a minimal dynamical semigroup // Math. Notes. 1992. V. 52. № 3–4. P. 1077–1077.
- [23] Chebotarev A. M., Fagnola F. Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups // J. Funct. Anal. 1993. V. 118. P. 131–153.
- [24] Nelson E. Analytic vectors // Ann. Math. 1970. V. 70. P. 572–614.
- [25] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.