Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Шведов, Трехслойная явная разностная схема второго порядка точности для параболических уравнений, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 751–759

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:10:49

ТРЕХСЛОЙНАЯ ЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. С. Шведов

§ 1. Постановка задачи и описание разностной схемы

Рассмотрим некоторую краевую задачу для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + g(x, t). \quad (1)$$

Будем считать, что на область $G \times [0, T]$, где ищется решение, на коэффициенты уравнения, на правую часть и на величины на границах наложены условия, гарантирующие однозначную разрешимость краевой задачи и достаточную гладкость решения. Для простоты изложения мы считаем, что коэффициенты σ_{ij} не зависят от t , хотя это ограничение не является принципиальным.

Если в области G построена сетка (т.е. выбрано N точек, принадлежащих G), то дифференциальную задачу (1) можно заменить дифференциально-разностной задачей

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t). \quad (2)$$

Здесь $u(t)$ и $f(t)$ при любом $t \in [0, T]$ являются N -мерными векторами, матрица A размера $N \times N$ симметрична и ее собственные числа неотрицательны. Вектор $u(0)$ считается заданным. Требуется, чтобы при измельчении сетки решения задачи (2) сходились к решению задачи (1). Подробнее о связи задач (1) и (2) сказано в § 5.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00489, и Международного научного фонда, гранты N8Q300, JBR100.

В дальнейшем до § 5 мы будем рассматривать только задачу (2). Задача (2) может возникнуть и независимо от задачи (1), если рассматривается не параболическое уравнение, а система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нас, однако, существенно, что матрица A симметрична и ее собственные значения неотрицательны.

Следующий этап состоит в переходе от дифференциально-разностной задачи (2) к разностной задаче. Пусть выбран временной шаг $\tau > 0$. Через y^j обозначим N -мерный вектор, являющийся решением разностной задачи для момента времени $j\tau$, где $0 \leq j\tau \leq T$. Для удобства будем считать, что число T/τ целое. Через f^j обозначим правую часть $f(t)$ при $t = j\tau$. Введем обозначения $\varphi_0 = \tau f^j$, $\varphi_1 = \frac{1}{2}\tau f^j + \frac{1}{2}\tau f^{j+1}$. Рассмотрим матрицы $B = E + \frac{1}{2}\tau A$, $B_1 = E - \frac{1}{2}\tau A$, где через E обозначена единичная матрица размера $N \times N$.

Разностные уравнения для определения y^{j+1} запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{y}^{j+1} &= y^{j-1} - 2\tau A y^j + 2\varphi_0, \\ y^{j+1} &= \bar{y}^{j+1} - \omega(B\bar{y}^{j+1} - (B_1 y^j + \varphi_1)).\end{aligned}\quad (3)$$

О выборе параметра ω будет сказано ниже. Первое уравнение, в котором определяется $\bar{y}^{j+1}$, — это уравнение разностной схемы Рундсона. Второе уравнение, в котором определяется y^{j+1} , возникает из решения системы линейных уравнений, соответствующих неявной разностной схеме Крэнка–Никольсона $Bz^{j+1} = B_1 z^j + \varphi_1$ итерационным методом, но при этом делается всего одна итерация, а в качестве нулевого приближения выбирается $\bar{y}^{j+1}$. (Мы обозначили через z^j решение, полученное для момента времени $j\tau$ по разностной схеме Крэнка–Никольсона, чтобы не путать его с решением y^j , полученным по разностной схеме (3).) Поэтому мы говорим, что разностная схема (3), про которую будет доказано, что при определенном выборе чисел ω и τ она устойчива и имеет второй порядок точности, является комбинацией разностных схем Рундсона и Крэнка–Никольсона.

Будем считать, что числа ω и τ удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 0.75} \leq \omega \leq 1 \quad (4)$$

и

$$\tau \leq \frac{2}{\Lambda} \min \left(2 \cdot \frac{1 - \omega}{\omega}, \frac{1 - \omega}{\omega} + 0.25 \right), \quad (5)$$

где Λ — максимальное собственное число матрицы A .

Через u^j обозначим решение $u(t)$ дифференциально-разностной задачи (2) при $t = j\tau$. Для N -мерного вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ через $\| \cdot \|$ обозначается L^2 -норма:

$$\|y\| = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. При любом $j = 2, 3, \dots, T/\tau$

$$\|u^j - y^j\| \leq \max(\|u^0 - y^0\|, \|u^1 - y^1\|) + C \cdot j \cdot \tau^3. \quad (6)$$

Константа C не зависит ни от j , ни от τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы содержится в § 2–4.

Наиболее слабые ограничения на временной шаг τ получаются при $\omega = 1/(\sqrt{2} + 0.75)$. В этом случае утверждение теоремы 1 справедливо при $\tau \leq 2\sqrt{2}/\Lambda$.

Отметим, что похожий метод построения трехслойных явных разностных схем для параболических уравнений использовался в [3]. Подробнее об этих разностных схемах и об их связи с нашей разностной схемой сказано в [4].

§ 2. Преобразование разностных уравнений

Заметим, что первое из уравнений (3) можно записать в виде

$$\bar{y}^{j+1} = y^{j-1} - 2(By^j - (B_1y^j + \varphi_0)).$$

Подставляя это выражение во второе из уравнений (3), получаем

$$\begin{aligned} y^{j+1} &= y^{j-1} - 2(By^j - (B_1y^j + \varphi_0)) \\ &\quad - \omega B \left(y^{j-1} - 2(By^j - (B_1y^j + \varphi_0)) \right) + \omega(B_1y^j + \varphi_1) \\ &= (E - \omega B)y^{j-1} - 2B(E - \omega B)y^j + (2E - 2\omega B + \omega E)B_1y^j \\ &\quad + 2(E - \omega B)\varphi_0 + \omega E\varphi_1. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $Z = E - \omega B$, $S = -2BZ + (2Z + \omega E)B_1$, получаем

$$y^{j+1} = Zy^{j-1} + Sy^j + 2Z\varphi_0 + \omega E\varphi_1. \quad (7)$$

Найдем еще одно представление для оператора S :

$$S = -2BZ + (2Z + (E - Z)B^{-1})B_1 = ((-2B^2 + 2BB_1 - B_1)Z + B_1)B^{-1}.$$

Выражая B и B_1 через A , получаем

$$S = \frac{E - \frac{1}{2}\tau A - (4(\frac{1}{2}\tau A)^2 + 3(\frac{1}{2}\tau A) + E)Z}{E + \frac{1}{2}\tau A}. \quad (8)$$

§ 3. Доказательство устойчивости по начальным данным

В этом параграфе мы докажем, что если ω и τ удовлетворяют условиям (4) и (5), то

$$\|Z\| + \|S\| \leq 1. \quad (9)$$

Здесь через $\|Z\|$ и $\|S\|$ обозначены нормы матриц Z и S . Воспользуемся тем фактом, что если K – симметричная матрица размера $N \times N$ и $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N$ – ее собственные числа, то

$$\|K\| = \max_{1 \leq i \leq N} |\kappa_i|.$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ – собственные числа матрицы A . По условию все эти числа принадлежат отрезку $[0, \Lambda]$. Числа $\xi_i = \frac{1}{2}\tau\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, являются собственными числами матрицы $\frac{1}{2}\tau A$.

Определим функции

$$\mu(\xi) = 1 - \omega(1 + \xi), \quad \nu(\xi) = \frac{1 - (\xi + \mu(\xi)(4\xi^2 + 3\xi + 1))}{1 + \xi}.$$

На основании определения матрицы Z и представления (8) для матрицы S имеем

$$\|Z\| = \max_{1 \leq i \leq N} |\mu(\xi_i)| \quad \text{и} \quad \|S\| = \max_{1 \leq i \leq N} |\nu(\xi_i)|,$$

откуда

$$\|Z\| \leq \max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]} |\mu(\xi)| \quad \text{и} \quad \|S\| \leq \max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]} |\nu(\xi)|.$$

Мы докажем, что если ω и τ удовлетворяют условиям (4) и (5), то

$$\max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]} |\mu(\xi)| + \max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]} |\nu(\xi)| = 1, \quad (10)$$

откуда будет следовать (9).

Из определения функции $\nu(\xi)$ следует, что $\mu(0) + \nu(0) = 1$. Поэтому для выполнения (10) необходимо, чтобы соблюдались условия

$$\max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]} |\mu(\xi)| = \mu(0), \quad (11)$$

$$\max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]} |\nu(\xi)| = \nu(0). \quad (12)$$

Для доказательства соотношений (11) и (12) удобно ввести новое обозначение $x = (1 - \omega)/\omega$. Тогда $\mu(\xi) = (x - \xi)/(x + 1)$ и условие (11) выполняется в том и только том случае, если

$$\frac{1}{2}\tau\Lambda \leq 2x. \quad (13)$$

Условие (12) выполняется тогда и только тогда, когда для произвольного $\xi \in [0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]$

$$-\nu(0) \leq \nu(\xi) \quad (14)$$

и

$$\nu(\xi) \leq \nu(0). \quad (15)$$

Замечая, что $\nu(0) = 1/(x+1)$, запишем условие (14) в виде

$$-\frac{1+\xi}{x+1} \leq 1 - \xi - \frac{x-\xi}{x+1}(4\xi^2 + 3\xi + 1)$$

или

$$(x - \xi)(4\xi^2 + 3\xi + 1) \leq (x + 2) - \xi x. \quad (16)$$

Аналогично, условие (15) записывается в виде

$$(x - \xi)(4\xi^2 + 3\xi + 1) \geq x - \xi(x + 2). \quad (17)$$

Таким образом, условие (12) выполняется в том и только в том случае, если на отрезке $[0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]$ график функции $\zeta = (x - \xi)(4\xi^2 + 3\xi + 1)$ лежит между графиками прямых $\zeta = -\xi x + (x + 2)$ и $\zeta = -\xi(x + 2) + x$. Прежде, чем провести строгое обсуждение условий, при которых график кубической параболы лежит между графиками прямых, отметим, что графики этих функций при трех различных значениях x показаны на рис. 1–3.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Графики кубической параболы $\zeta = (x - \xi)(4\xi^2 + 3\xi + 1)$ и прямых $\zeta = -\xi x + (x + 2)$ и $\zeta = -\xi(x + 2) + x$ при $x = \sqrt{2} - 0.15$ (рис. 1), при $x = \sqrt{2} - 0.25$ (рис. 2), при $x = \sqrt{2} - 0.35$ (рис. 3).

Сначала обсудим условия, при которых на отрезке $[0, \frac{1}{2}\tau\Lambda]$ график кубической параболы лежит под графиком верхней прямой. Заметим, что при любом x кубическая парабола пересекается с этой прямой в точке с абсциссой $\xi = -1$. Другие точки пересечения существуют в том и только в том случае, когда уравнение

$$4\xi^2 - (4x + 1)\xi + 2 = 0 \quad (18)$$

имеет действительные корни. При $x \leq \sqrt{2} - 0.25$ действительных корней у уравнения (18) не больше одного (кубическая парабола при $\xi \geq 0$ лежит строго под верхней прямой или касается этой прямой в одной точке) и условие (16) выполнено при любом $\xi \geq 0$. При $x > \sqrt{2} - 0.25$ действительных корней у уравнения (18) два (кубическая парабола при $\xi \geq 0$ имеет две точки пересечения с верхней прямой). Можно показать, что условие (16) нарушается при достаточно малом ξ , а наша цель состоит в том, чтобы сделать число τ (и, следовательно, число $\frac{1}{2}\tau\Lambda$) как можно больше. Поэтому будем считать, что выполнено условие $0 < x \leq \sqrt{2} - 0.25$, равносильное условию $1/(\sqrt{2} + 0.75) \leq \omega < 1$.

Одна точка пересечения кубической параболы с нижней прямой известна ($\xi = 0$). Две другие точки пересечения определяются из квадратного уравнения

$$4\xi^2 - (4x - 3)\xi - (4x + 1) = 0 \quad (19)$$

и оказываются равными $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = x + 0.25$. Таким образом, условие (17) выполняется при

$$\frac{1}{2}\tau\Lambda \leq x + 0.25. \quad (20)$$

Условия (13) и (20) дают ограничение на временной шаг τ :

$$\tau \leq \frac{2}{\Lambda} \min(2x, x + 0.25),$$

совпадающее с (5).

Равенства (11) и (12) доказаны. Вместе с ними доказаны равенство (10) и неравенство (9).

§ 4. Доказательство сходимости

Положим

$$\begin{aligned} w_0^{j+1} &= u^{j-1} - 2\tau Au^j + 2\varphi_0, \\ w_1^{j+1} &= B^{-1}B_1u^j + B^{-1}\varphi_1, \\ w_2^{j+1} &= Zu^{j-1} + Su^j + 2Z\varphi_0 + \omega E\varphi_1. \end{aligned}$$

Из разложения в ряд Тейлора и из (2) получаем

$$u^{j+1} = u^{j-1} - 2\tau Au^j + 2\varphi_0 + O(\tau^3).$$

Отсюда

$$u^{j+1} = w_0^{j+1} + \varepsilon_0^{j+1}, \quad (21)$$

где $\|\varepsilon_0^{j+1}\| \leq C_0\tau^3$. Последнее неравенство справедливо, поскольку $\|\varepsilon_0^{j+1}\|$ не превосходит норму ε_0^{j+1} в метрике C .

Еще раз воспользовавшись разложением в ряд Тейлора и (2), получаем

$$Bu^{j+1} = B_1u^j + \varphi_1 + O(\tau^3).$$

Отсюда

$$u^{j+1} = w_1^{j+1} + B^{-1}\varepsilon_1^{j+1}, \quad (22)$$

где $\|\varepsilon_1^{j+1}\| \leq C_1\tau^3$.

Заметим, что

$$\|u^{j+1} - y^{j+1}\| \leq \|u^{j+1} - w_1^{j+1}\| + \|w_1^{j+1} - w_2^{j+1}\| + \|w_2^{j+1} - y^{j+1}\|.$$

Оценим по отдельности каждое из трех слагаемых правой части последнего неравенства:

$$\|u^{j+1} - w_1^{j+1}\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|\varepsilon_1^{j+1}\| \leq C_1\tau^3, \quad (23)$$

поскольку

$$\|B^{-1}\| \leq 1. \quad (24)$$

С учетом (8) имеем

$$\begin{aligned} w_1^{j+1} - w_2^{j+1} &= B^{-1}B_1u^j + B^{-1}\varphi_1 - Zu^{j-1} - Su^j - 2Z\varphi_0 - \omega BB^{-1}\varphi_1 \\ &= B^{-1}B_1u^j - Z(w_0^{j+1} + 2\tau Au^j - 2\varphi_0) \\ &\quad - Su^j - 2Z\varphi_0 + ZB^{-1}\varphi_1 \\ &= B^{-1}B_1u^j - Z(w_0^{j+1} + 2\tau Au^j) \\ &\quad - \left(B_1 - \left(\tau^2 A^2 + \frac{3}{2}\tau A + E\right)Z\right)B^{-1}u^j + ZB^{-1}\varphi_1 \\ &= -Zw_0^{j+1} - 2\tau A\left(E + \frac{1}{2}\tau A\right)ZB^{-1}u^j \\ &\quad + \left(\tau^2 A^2 + \frac{3}{2}\tau A + E\right)ZB^{-1}u^j + ZB^{-1}\varphi_1 \\ &= -Zw_0^{j+1} + \left(-\frac{1}{2}\tau A + E\right)ZB^{-1}u^j + ZB^{-1}\varphi_1 \\ &= Z(w_1^{j+1} - w_0^{j+1}). \end{aligned}$$

С учетом (21) и (22) получаем

$$w_1^{j+1} - w_2^{j+1} = Z(\varepsilon_0^{j+1} - B^{-1}\varepsilon_1^{j+1}).$$

В силу (9) и (24)

$$\|w_1^{j+1} - w_2^{j+1}\| \leq (C_0 + C_1)\tau^3. \quad (25)$$

Наконец, с учетом (7)

$$w_2^{j+1} - y^{j+1} = Z(u^{j-1} - y^{j-1}) + S(u^j - y^j).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|w_2^{j+1} - y^{j+1}\| &\leq \|Z\| \cdot \|u^{j-1} - y^{j-1}\| + \|S\| \cdot \|u^j - y^j\| \\ &\leq (\|Z\| + \|S\|) \max(\|u^{j-1} - y^{j-1}\|, \|u^j - y^j\|). \end{aligned}$$

В силу (9)

$$\|w_2^{j+1} - y^{j+1}\| \leq \max(\|u^{j-1} - y^{j-1}\|, \|u^j - y^j\|). \quad (26)$$

Собирая вместе оценки (23), (25) и (26), получаем

$$\|u^{j+1} - y^{j+1}\| \leq \max(\|u^{j-1} - y^{j-1}\|, \|u^j - y^j\|) + C\tau^3,$$

откуда следует (6). Теорема 1 доказана.

§ 5. О связи задач (1) и (2)

Пусть сетка состоит из N точек $x^1, x^2, \dots, x^N$, принадлежащих области G . Обозначим через w функцию, определенную на отрезке $[0, T]$, принимающую значения в N -мерном пространстве и такую, что $w_i(t) = v(x^i, t)$ при любом $i = 1, 2, \dots, N$ и при любом $t \in [0, T]$, где v — это решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (1). Будем считать, что задача (2) (точнее, последовательность задач (2)) аппроксимирует задачу (1), т.е., во-первых, функции u и w совпадают при $t = 0$, и, во-вторых, функция w является решением системы уравнений

$$\frac{dw}{dt} = -Aw + f(t) + \psi(t),$$

где $\|\psi(t)\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, T]$. Так же, как и в основной части работы, здесь через $\|\cdot\|$ обозначена норма L^2 для N -мерного вектора.

Положим $z(t) = w(t) - u(t)$.

ТЕОРЕМА 2. $\|z(t)\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. z является решением системы уравнений

$$\frac{dz}{dt} = -Az + \psi(t). \quad (27)$$

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_N$ — собственные векторы матрицы A , т.е. $AX_k = \lambda_k X_k$ при $k = 1, 2, \dots, N$. Напомним, что $\lambda_k \geq 0$ для всех k . Будем считать, что векторы $X_1, X_2, \dots, X_N$ образуют ортонормированный базис N -мерного пространства и

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(t) X_k, \quad z(t) = \sum_{k=1}^N z_k(t) X_k.$$

Из (27) получаем

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -\lambda_k z_k(t) + \psi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Переходя к новым неизвестным $c_k(t) = z_k(t) \exp(\lambda_k t)$, получаем для них уравнения

$$\frac{dc_k(t)}{dt} = \psi_k(t) \exp(\lambda_k t).$$

Учитывая, что $z_k(0) = 0$, находим

$$c_k(t) = \int_0^t \psi_k(s) \exp(\lambda_k s) ds \quad \text{и} \quad z_k(t) = \int_0^t \psi_k(s) \exp(-\lambda_k(t-s)) ds.$$

С учетом того, что $\lambda_k \geq 0$, имеем

$$|z_k(t)| \leq \int_0^t |\psi_k(s)| ds.$$

Отсюда следует, что

$$|z_k(t)|^2 \leq t \int_0^t |\psi_k(s)|^2 ds.$$

Суммируя последние неравенства по всем k , получаем

$$\|z(t)\|^2 \leq t \int_0^t \|\psi(s)\|^2 ds,$$

и из того, что $\|\psi(t)\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, T]$, получаем, что $\|z(t)\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно на $[0, T]$. Теорема 2 доказана.

Приведенные в [4] результаты расчетов двух одномерных краевых задач показывают, что для данных краевых задач предлагаемая трехслойная явная разностная схема и двухслойная неявная разностная схема Крэнка–Никольсона дают приблизительно одинаковые результаты. Результаты, полученные по двухслойной явной разностной схеме, оказываются значительно хуже.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Поступило
28.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Richardson L. F. The approximate solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam // Roy. Soc. Philos. Trans. 1910. V. 210A. P. 307–357.
- [2] Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical integration of solutions of partial differential equations of heat conduction type. I // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1947. V. 43. P. 50–67.
- [3] Юань Чжао-дин. Некоторые разностные схемы решения первой краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1958.
- [4] Шведов А. С. Построение трехслойной явной разностной схемы второго порядка точности для параболических уравнений на основе разностных схем Рундсона и Крэнка–Никольсона. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 104. М., 1995.