Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошапка, Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 760–764

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1887>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 10:14:46

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОДНОРОДНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{C}^2$

В. К. Белошапка

Цель данной работы – изучение вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^2$, однородных по отношению к биголоморфным преобразованиям. При этом наш подход будет чисто локальным, как в отношении к гиперповерхности (росток гиперповерхности), так и в отношении однородности (однородность здесь означает, что инфинитезимальные биголоморфные преобразования действуют локально транзитивно).

За вычетом тривиального примера – ростка гиперплоскости – все однородные ростки являются невырожденными по Леви (см. предложение 1). При этом за вычетом второго исключительного случая – ростка сферы – все однородные ростки являются неомбилическими (определение 2, предложение 2). В работе Лободы [1] выписано 1-параметрическое семейство однородных трубчатых попарно неэквивалентных несферических гиперповерхностей. Было бы интересно получить полное и явное описание всех таких гиперповерхностей. В частности, ожидается, что семейство параметров (пространство модулей), определяющих попарно неэквивалентные однородные гиперповерхности, конечномерно. Удобным аппаратом для такого описания представлялся аппарат мозеровских нормальных форм [2]. Если росток несферичен, то нормальная форма определяется почти единственным образом, и на гиперповерхности возникает выделенная инвариантная кривая, трансверсальная комплексной касательной, так называемая цепь. В нормальных координатах цепь – это вещественная прямая, ортогональная к комплексной касательной. Было бы естественно, и это сильно упростило бы дальнейшее изучение, чтобы однородная гиперповерхность допускала бы сдвиги вдоль цепи. Это бы означало, что нормальная форма однородной гиперповерхности не зависит от соответствующей вещественной координаты. Однако, и это представляется нам весьма неожиданным, оказалось (предложение 3), что это невозможно, причем в весьма сильном смысле. Если лишь один только младший коэффициент нормальной формы (коэффициент s_{42}) не зависит от параметра цепи (координата u), то поверхность не может быть однородной. Предложение 3 является основным результатом данной работы. Этот негативный результат означает, что аппарат мозеровской нормальной формы плохо подходит для описания однородных гиперповерхностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 093-01-00225, и Международного научного фонда, грант NCE000.

Пусть Γ_ξ – росток вещественной гиперповерхности в некоторой точке $\xi \in \mathbb{C}^2$. Рассмотрим $\text{aut}_\xi \Gamma_\xi$ – алгебру ростков вещественных векторных полей вида

$$X = 2 \operatorname{Re} \left(f(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + g(z, w) \frac{\partial}{\partial w} \right) \quad (1)$$

таких, что сужение X на гиперповерхность касательно к ней, а f и g – ростки функций, голоморфных в ξ и обращающихся в этой точке в нуль. Интегрируя любое поле, представляющее такой росток, мы получаем однопараметрическую локальную группу биголоморфных преобразований окрестности ξ , оставляющих ξ на месте и переводящих Γ_ξ в себя. Совокупность этих преобразований порождает группу. Обозначим ее через $\text{Aut}_\xi \Gamma_\xi$. Если снять условие обращения полей в нуль, то возникает алгебра $\text{aut} \Gamma_\xi$, содержащая $\text{aut}_\xi \Gamma_\xi$ в качестве подалгебры. Интегрируя поля из $\text{aut} \Gamma_\xi$, получаем однопараметрические локальные подгруппы биголоморфных преобразований окрестностей ξ , которые уже не оставляют точку ξ неподвижной. Однако, если Γ – представитель Γ_ξ , то каждое из этих преобразований отображает некоторую окрестность ξ на Γ в Γ . Совокупность этих преобразований порождает некоторую локальную группу, которую мы обозначим через $\text{Aut} \Gamma_\xi$. Отметим, что размерности алгебр и соответствующих им групп совпадают.

Чтобы локализовать понятие однородности, дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Росток Γ_ξ называется *однородным*, если значения полей из $\text{aut} \Gamma_\xi$ в точке ξ совпадают с касательным пространством $T_\xi \Gamma_\xi$.

Однородность ростка, таким образом, означает, что орбита точки ξ под действием $\text{Aut} \Gamma_\xi$ содержит ее окрестность на гиперповерхности, представляющей росток. Имеет место следующее вполне очевидное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если форма Леви однородного ростка гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ вырождена в центре ростка, то росток биголоморфно эквивалентен ростку гиперплоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В $\mathbb{C}^2$ вырожденность означает, что форма Леви равна нулю. Из однородности следует, что она равна нулю в окрестности центра ростка на гиперповерхности, следовательно, по теореме Фробениуса росток плоский.

Пусть росток вещественно аналитической гиперповерхности Γ_ξ в $\mathbb{C}^2$ ($z, w = u + iv$) невырожден по Леви, тогда существует голоморфная замена координат в окрестности ξ , приводящая уравнение Γ_ξ к виду, который называется нормальной формой [2]

$$v = |z|^2 + \sum_{\min(m, n) \geq 2} c_{mn}(u) z^m \bar{z}^n, \quad (2)$$

причем $c_{22}(u) = c_{32}(u) = c_{33}(u) = 0$, а $\xi = (0, 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (а) Точка ξ и росток Γ_ξ , называются *омбилическими*, если младший коэффициент нормальной формы $c_{42}(0) = 0$ (это условие не зависит от выбора нормальной системы координат), в противном случае – *неомбилическими* (заметим, что невырожденность входит в определение как омбиличности, так и неомбиличности).

(б) Росток называется *сферическим*, если его представитель локально эквивалентен открытому подмножеству квадрики $Q = \{v = |z|^2\}$ или (что то же самое) сферы, в противном случае – *несферическим*.

Сфера $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$ после дробно-линейного преобразования может быть представлена в виде гиперквадрики

$$Q = \{\operatorname{Im} w = |z|^2\}.$$

Однородность в этих координатах обеспечивается аффинными преобразованиями вида $z \rightarrow p + q$, $w \rightarrow q + 2i\bar{p}z + w$, где $(p, q) \in Q$. Группа и алгебра квадрики вписаны в [2] и [3], в частности, $\dim \operatorname{Aut} Q = 8$, $\dim \operatorname{Aut}_0 Q = 5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Γ_ξ – росток однородной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$, тогда имеет место следующая альтернатива:

либо росток плоский и $\dim \operatorname{Aut} \Gamma_\xi = \infty$, $\dim \operatorname{Aut}_\xi \Gamma_\xi = \infty$;
 либо росток сферический и $\dim \operatorname{Aut} \Gamma_\xi = 8$, $\dim \operatorname{Aut}_\xi \Gamma_\xi = 5$;
 либо росток несферический и $\dim \operatorname{Aut} \Gamma_\xi = 3$, $\dim \operatorname{Aut}_\xi \Gamma_\xi = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если росток плоский или сферический, то его группы изоморфны соответствующим группам гиперплоскости или квадрики, откуда получаем их размерности. Если росток несферический, то согласно [2] $\dim \operatorname{Aut}_\xi \Gamma_\xi = 0$ (эта группа состоит не более, чем из двух преобразований). То, что при этом $\dim \operatorname{Aut} \Gamma_\xi = 3$, следует из однородности.

Плоскость и сфера – это хорошо известные примеры однородных гиперповерхностей. Для нашего исследования интерес представляет описание несферических однородных ростков. Чтобы получить соответствующий пример, рассмотрим следующую гиперповерхность

$$C = \{v = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z}\}.$$

Данная гиперповерхность устроена следующим образом: $C^0 = C \cap \{\operatorname{Re} z = 0\}$ – это точки с нулевой формой Леви, $C^+ = C \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ и $C^- = C \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$ – это две однородные части, где знаки формы Леви противоположны (считаем ориентацию фиксированной). В том, что в точках, где $\operatorname{Re} z \neq 0$, ростки гиперповерхности действительно однородны и не сферичны, можно убедиться так. Уравнение ростка в точке ξ , где $\operatorname{Re} z \neq 0$, после несложного преобразования, можно записать как $v = |z|^2 + 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z}$. Вычисляя $\operatorname{aut} C_\xi$ для $\xi \in \{\operatorname{Re} z \neq 0\}$, получаем

$$\operatorname{aut} C_\xi = \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\left(p - \frac{4}{5} (\operatorname{Re} p) z \right) \frac{\partial}{\partial z} + \left(q + \frac{12}{5} (\operatorname{Re} p) w + 2i\bar{p}z + 2i\bar{p}z^2 \right) \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\},$$

где $p \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\dim \operatorname{Aut} C_\xi = 3$, $\dim \operatorname{Aut}_\xi C_\xi = 0$. Если же $\xi \in \{\operatorname{Re} z = 0\}$, то

$$\operatorname{aut} C_\xi = \left\{ 2 \operatorname{Re} \left((ia + bz) \frac{\partial}{\partial z} + (c + 6bw + 2az^2) \frac{\partial}{\partial w} \right) \right\},$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и соответственно $\dim \operatorname{Aut} C_\xi = 3$, $\dim \operatorname{Aut}_\xi C_\xi = 1$.

Если точка ξ неомбилическая, то уравнение Γ_ξ можно подвергнуть дополнительной нормализации. Можно добиться выполнения дополнительных условий [2]

$$c_{42}(0) = 1, \quad c_{43}(0) = 0, \quad \operatorname{Re} c'_{42}(0) = 0. \quad (3)$$

Таких усиленных нормальных форм ровно две. Вторая получается из первой заменой $z \rightarrow -z$, $w \rightarrow w$. Воспользуемся условием однородности ростка, чтобы получить какие-либо условия на коэффициенты нормальной формы гиперповерхности.

Пусть уравнение ростка Γ_ξ записано в виде (2) с условиями (3) и $|z|^2 + N(z, \bar{z}, u)$ — его правая часть, тогда условие того, что поле (1) является касательным, принимает вид

$$\operatorname{Re}(ig(z, w) + 2\bar{z}f(z, w) + 2N_z(z, \bar{z}, u)f(z, w) + N_u(z, \bar{z}, u)g(z, w)) \Big|_{w=u+i(|z|^2+N(z, \bar{z}, u))} = 0. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. Если (f, g) — решение (4), то

$$f(z, u) = \alpha(u) + \beta(u)z + 2i\bar{\alpha}'(u)z^2 - 2\left(\sum_4^\infty c_p 2z^p\right)\bar{\alpha}(u), \quad (5)$$

$$g(z, u) = \gamma(u) + 2i\bar{\alpha}(u)z,$$

причем

$$\operatorname{Im} \beta = 0, \quad 2 \operatorname{Re} \beta = \gamma', \quad \alpha'' = 2\bar{c}_{42}\alpha, \quad \operatorname{Re} \beta'' = 2 \operatorname{Re}(c_{43}\alpha). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для работы с соотношением (4) будем использовать разложения вида

$$F(z, \bar{z}, u) = \sum_{m,n} F_{mn}(u)z^m\bar{z}^n, \quad (7)$$

$$f(z, w) = \sum_n f_n(w)z^n, \quad g(z, w) = \sum_n g_n(w)z^n, \quad (8)$$

$$h(u + iv) = \sum_n \frac{i^n}{n!} h^{(n)}(u)v^n. \quad (9)$$

Записывая для (4) разложение (7), используя при этом (8) и (9) и выделяя отдельные компоненты, получаем

$$\begin{aligned} (0, 0) \quad & \operatorname{Im} g_0 = 0, \\ (1, 0) \quad & ig_1 + 2f_0 = 0, \\ (p, 0) \quad & \text{при } p \geq 2 \quad g_p = 0, \\ (2, 1) \quad & -g'_1 + 2f_2 - 2i\bar{f}'_0 = 0, \\ (3, 1) \quad & -g'_2 + 2f_3 = 0, \\ (p, 1) \quad & p \geq 4, -g'_{p-1} + 2f_p + 4c_{p2}\bar{f}_0 = 0. \end{aligned}$$

Откуда, вводя обозначения $\alpha = f_0, \beta = f_1, \gamma = g_0$, получаем (5). Продолжая выписывать компоненты (4), получаем

$$\begin{aligned} (1, 1) \quad & \operatorname{Re}(-g'_0 + 2f_1) = 0, \\ (2, 2) \quad & \operatorname{Re}(-\frac{i}{2}g''_0 + 4i\bar{f}'_0) = 0, \\ (3, 2) \quad & -\frac{i}{2}g''_1 - 2if'_2 - \bar{f}''_0 + 8c_{42}f_0 = 0, \\ (3, 3) \quad & \operatorname{Re}(\frac{1}{8}g'''_0 - f''_1 + 8c_{43}f_0) = 0. \end{aligned}$$

Откуда следует (6). Лемма доказана.

Соотношения (6) — это дифференциальные уравнения, которые позволяют определить функции α, β, γ однозначно с точностью до выбора значений параметров $p = \alpha(0), a = \alpha'(0), \lambda = \beta(0), r = \beta'(0), q = \gamma(0)$, где r и q — вещественны.

ЛЕММА 2. Если росток Γ_ξ неомбилический, то параметры a, λ, r однозначно выражаются через p, q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем предполагать, что выполнены условия (3). Выпишем еще две компоненты (4) – (4, 2) и (4, 3)

$$\begin{aligned} 10c_{52}\alpha + 6c_{43}\bar{\alpha} + 8c_{42}\beta + 4c_{42}\bar{\beta} + 2c'_{42}\gamma - 2c_{42}\gamma' &= 0, \\ (48ic_{42} - 8ic_{24})\bar{\alpha}' + 30c_{53}\alpha + (24c_{44} - 8ic'_{24})\bar{\alpha} + 18c_{43}\bar{\beta} + 6c'_{43}\gamma - 6c_{43}\gamma' &= 0. \end{aligned}$$

Отделяя в обоих соотношениях свободные члены, а также член, линейный по u в первом из них, и учитывая, что $c_{42}(0) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} 4\lambda + \bar{\lambda} + 5c_{52}(0)p + c'_{42}(0)q &= 0, \\ 40i\bar{a} + 30c_{53}(0)p + (24c_{44}(0) + 8ic'_{42})\bar{p} + 6c'_{43}(0)q &= 0, \\ 8r + 10c_{53}(0)a + 10c'_{52}(0)p + 6c'_{43}\bar{p} + 8c'_{42}(0)\lambda + 4c'_{42}(0)\bar{\lambda} + 2c''_{42}(0)q &= 0. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы.

Если росток является неомбилическим и однородным, то параметры p, q не имеют ограничений и все неиспользованные ранее компоненты (4) – это некоторая счетная система уравнений на коэффициенты c_{mn} , решениями которой являются нормальные формы уравнений однородных неомбилических ростков. Любое соотношение из этой системы является необходимым условием однородности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть (2) – уравнение неомбилического ростка Γ_ξ и c_{42} не зависит от u , тогда росток Γ_ξ не является однородным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем предполагать, что выполнены условия (3), тогда $c_{42} = 1$. Записывая компоненту (3, 2) соотношения (4), с учетом леммы 1 получаем $\alpha'' = 2\bar{\alpha}$. Решая это уравнение, получаем $\alpha = C_1 e^{\sqrt{2}u} + C_2 e^{-\sqrt{2}u}$. Учитывая, что $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = a$, получаем $C_1 = \frac{1}{2}(p + a/\sqrt{2}), C_2 = \frac{1}{2}(p - a/\sqrt{2})$. Из соотношений (6) получаем явный вид β и γ . Подставляя эти выражения в соотношения, полученные из (4) в компонентах (4, 2), (5, 2), (4, 3), (4, 4), полагая $q = 0$ и учитывая при этом выражения для параметров λ, a, r , из леммы 6 получаем ограничение на параметр p . Предложение доказано.

Работа была написана во время пребывания в Рурском университете (Германия, Бохум) и Университете г. Реджайна (Канада, Саскичевань). Автор благодарен профессорам А. Хакклберри, Б. Гиллигану за предоставленную возможность для работы и плодотворные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: beloshap@ium.ips.ras.ru

Поступило
24.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Loboda A. V. On homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$ // International Conference on Complex Analysis. St.-Petersburg, 1994.
2. Chern S. S., Moser J. K. // Acta Math. 1974. V. 133. № 3–4. P. 219–271.
3. Белошапка В. К. // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 2. С. 203–219.