Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Бокаев, Об абсолютной сходимости кратных рядов из коэффициентов Фурье по мультипликативным системам, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 765–767

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:07:25

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Н. А. Бокаев

В настоящей работе в терминах полного группового модуля непрерывности приводится достаточное условие сходимости рядов, составленных из коэффициентов Фурье функций многих переменных по мультипликативным системам, обобщающим систему Уолша. Показывается, что полученное условие неулучшаемо на классах функций $H_p^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}$.

Приведем необходимые определения и обозначения. Пусть $\{p_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^\infty$ ($j = 1, 2, \dots, n$) – последовательности целых чисел, $p_{k_j}^{(j)} \geq 2$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k_j = 1, 2, \dots$, и пусть

$$G^{(j)} = \{x = \{x_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^\infty, 0 \leq x_{k_j}^{(j)} \leq p_{k_j}^{(j)} - 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

– соответствующие группы целочисленных последовательностей с групповой операцией $(+)$ покоординатного сложения по модулю $p_{k_j}^{(j)}$, $G^n = \prod_{j=1}^n G^{(j)}$ – прямое произведение групп $G^{(j)}$.

Множества $G_{\nu_l}^{(j)} = \{x = \{x_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^\infty \in G^{(j)} : x_{k_j}^{(j)} = 0, 0 \leq k_j < \nu_l\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\nu_l = 1, 2, \dots, n$, являются подгруппами группы $G^{(j)}$ и система подгрупп $G(\nu_l) = \prod_{j=1}^n G_{\nu_l}^{(j)}$ ($\nu_l = 1, 2, \dots$) группы G^n задает систему окрестностей нуля в G^n . Относительно введенной операции сложения и топологии группа G^n является компактной абелевой нульмерной группой (в одномерном случае см. [1]).

Положим $m_0^{(j)} = 1$, $m_r^{(j)} = \prod_{k_j=1}^r p_{k_j}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $r = 1, 2, \dots$.

Пусть на группе $G^{(j)}$ ($1 \leq j \leq n$) определена мультипликативная система Виленкина–Прайса (см. [1]):

$$\begin{aligned} \psi_0^{(j)} &= 1, \quad x \in G^{(j)}, \\ \psi_{\nu_j}^{(j)}(x^{(j)}) &= \prod_{k_j=0}^{l(\nu_j)} \exp \frac{2\pi i x_{k_j}^{(j)} + 1}{p_{k_j+1}^{(j)}} \quad \text{при} \quad \nu_j = \sum_{k_j=0}^{l(\nu_j)} \alpha_{k_j}^{(\nu_j)} m_{k_j}^{(j)}, \end{aligned}$$

где $\alpha_{k_j}^{(\nu_j)}$ – целые числа, $0 \leq \alpha_{k_j}^{(\nu_j)} < p_{k_j+1}^{(j)}$, $x^j = \{x_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^\infty \in G^j$.

Система $\{\psi_{k_j}^{(j)}(x^j)\}_{k_j=0}^\infty$ ($1 \leq j \leq n$) является полной ортонормированной относительно меры Хаара μ_j на группе $G^{(j)}$ мультипликативной системой (см. [1]). При $p_{k_j}^{(j)} = 2$, $k_j = 1, 2, \dots$, система совпадает с системой Уолша в нумерации Пэли.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 94–1044.

Положим $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кратная система функций

$$\psi_{\bar{k}}(\bar{x}) = \psi_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) = \psi_{k_1}(x^{(1)})\psi_{k_2}(x^{(2)}) \cdots \psi_{k_n}(x^{(n)})$$

является полной ортонормированной относительно меры Хаара $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n$ на G^n мультипликативной системой.

Пусть $f(\bar{x}) \in L_p(G^n)$, $1 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(G^n)} &= \int_{G^n} |f(\bar{x})|^p d\bar{\mu}(\bar{x}) \\ &= \int_{G^{(1)}} \int_{G^{(2)}} \cdots \int_{G^{(n)}} |f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})| d\mu_1 x^{(1)} d\mu_2 x^{(2)} \cdots d\mu_n x^{(n)} \end{aligned}$$

и

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \widehat{f}(k_1, k_2, \dots, k_n) \psi_{k_1}(x^{(1)}) \psi_{k_2}(x^{(2)}) \cdots \psi_{k_n}(x^{(n)})$$

— ее ряд Фурье по системе $\psi_k(\bar{x})$, где

$$\widehat{f}(\bar{k}) = \int_{G^n} f(\bar{x}) \overline{\psi_{\bar{k}}(\bar{x})} d\mu(\bar{x})$$

— ее коэффициенты Фурье.

Через

$$\begin{aligned} \omega_p(f, \bar{k}) &= \omega_p(f; k_1, k_2, \dots, k_n) \\ &= \sup_{h^{(j)} \in G_{k_j}^{(j)}} \|f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}, \dots, x^{(n)} + h^{(n)}) \\ &\quad - f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})\|_{L_p(G^n)} \end{aligned}$$

обозначим полный групповой модуль непрерывности функций $f(\bar{x}) \in L_p(G^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$, $0 < \beta \leq p'$, $f(\bar{x}) \in L_p(G^n)$ и

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n m_{k_j+1}^{(j)} \right)^{1-\beta/p'} \omega_p^\beta(f; k_1, k_2, \dots, k_n) < \infty. \quad (1)$$

Тогда сходится ряд

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} |\widehat{f}(k_1, k_2, \dots, k_n)|^\beta < \infty. \quad (2)$$

Эта теорема в случае функций одной переменной доказана в работе [2].

В теореме образующие последовательности $\{p_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^{\infty}$ системы $\{\psi_{k_j}(x)\}_{k_j=1}^{\infty}$ ($1 \leq j \leq n$) произвольны, в частности, они могут быть неограниченными в совокупности. В случае, когда $\sup_{1 \leq k_j < \infty} p_{k_j}^{(j)} = N_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$, из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$, $f(\bar{x}) \in L_p(G^n)$,

$$\sup_{1 \leq k_j < \infty} p_{k_j}^{(j)} = N_j < \infty$$

($j = 1, 2, \dots, n$) и

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n m_{k_j}^{(j)} \right)^{1-\beta/p'} \omega_p^\beta(f; k_1, k_2, \dots, k_n) < \infty. \quad (3)$$

Тогда сходится ряд (2).

Это утверждение в одномерном случае доказано в [3] и является аналогом классической теоремы О. Саса о тригонометрических рядах. Оказывается, что утверждение приведенного следствия имеет место только при условии ограниченности всех образующих последовательностей $\{p_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \dots, n$. При условии, когда хотя бы одна из последовательностей $\{p_{k_j}^{(j)}\}$ неограничена, сходимость ряда (3) может не обеспечить сходимость ряда из (2). А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$, $0 < \beta \leq p'$, и

$$\sup_{1 \leq k'_j < \infty} p_{k'_j}^{(j')} = \infty$$

при некотором j' ($1 \leq j' \leq n$) и $\sup_{1 \leq k_j < \infty} p_{k_j}^{(j)} = N_j < \infty$ при всех $j \neq j'$ ($1 \leq j \leq n$). Тогда существует функция $f(\bar{x}) \in L_p(G^n)$ такая, что для нее ряд (3) сходится, однако, ряд (2) расходится.

Карагандинский государственный университет
им. Е. А. Букетова

Поступило
29.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: Элм, 1981.
2. Quek T. S., Zar Y. H. // J. Math. Anal. Appl. 1980. V. 74. P. 1–14.
3. Onneweer C. W. // Duke Math. J. 1974. V. 41. P. 679–688.
4. Жантлесов Ж.Ж. Коэффициенты Фурье и аппроксимативные свойства средних рядов Фурье по мультипликативной системе. Дисс. ... к.ф.-м.н. Караганда: КарГУ, 1988.