Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, Решения уравнения Шредингера с магнитным полем, сохраняющиеся при точечных возмущениях, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 768–773

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1889>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:43:15

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ, СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ПРИ ТОЧЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В. А. Гейлер, В. А. Маргулис

1. В серии статей [1]–[5] авторы изучали двумерный оператор Шрёдингера с магнитным полем, возмущенный точечным потенциалом, сосредоточенным в точках некоторой плоской решетки. Интерес к операторам такого вида резко возрос в связи с успехами в исследовании транспортных свойств низкоразмерных систем в квантующем магнитном поле, в частности, в связи с открытием квантования холловской проводимости, с экспериментальным обнаружением осцилляций Ааронова–Бома в мезоскопических системах, эффектов, связанных с андерсоновской локализацией и др. [6]. Упомянутый оператор – это самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^2)$, который формально имеет вид

$$H = H_0 + \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma \delta(x - \gamma). \quad (1)$$

Потенциал в правой части формулы (1) является суммой δ -функций Дирака, распространенной на дискретное множество Γ , $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Это множество будем считать инвариантным относительно сдвигов на векторы некоторой двумерной решетки Λ . Невозмущенный оператор $H_0 \equiv H_0(\xi)$ представляет собой оператор Шрёдингера с магнитным полем, перпендикулярным плоскости системы $\mathbb{R}^2$ (этот оператор называется также оператором Ландау):

$$H_0 = \left(\frac{-i\partial}{\partial x_1} + \pi \xi x_2 \right)^2 + \left(\frac{-i\partial}{\partial x_2} - \pi \xi x_1 \right)^2. \quad (2)$$

Здесь параметр ξ , $\xi \neq 0$, имеет смысл плотности потока магнитного поля (число квантов потока магнитного поля через единичную площадку плоскости (x_1, x_2) [5]). Строгий операторный смысл формальному выражению (1) можно придать, используя теорию расширений самосопряженных операторов [7], [8]. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом, поскольку математически корректное определение оператора H в дальнейшем нам потребуется только в лемме 4.

Хорошо известно, что спектр $\sigma(H_0)$ оператора H_0 чисто точечный и состоит из бесконечно вырожденных собственных чисел – уровней Ландау $\varepsilon_l \equiv \varepsilon_l(\xi) = 4\pi|\xi|(l + 1/2)$ ($l = 0, 1, \dots$). Таким образом, $L^2(\mathbb{R}^2)$ разлагается в прямую сумму: $L^2(\mathbb{R}^2) = \oplus L_l$, где $L_l \equiv L_l(\xi)$ – собственное подпространство, соответствующее собственному числу ε_l . Обозначим через Ω_Λ некоторую элементарную ячейку решетки Λ , т.е. параллелограмм вида $\{x \in \mathbb{R}^2 : x = t_1 \tilde{a}_1 + t_2 \tilde{a}_2, 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$, натянутый на какую-либо пару $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ базисных векторов этой решетки. Через S_Λ будем обозначать площадь ячейки Ω_Λ , через k – число элементов в множестве $\Omega_\Lambda \cap \Gamma$, а через η – число квантов магнитного потока через элементарную ячейку решетки Λ : $\eta = S_\Lambda \xi$.

В случае $\Gamma = \Lambda$ (т.е. в случае $k = 1$) Т. Андо путем численных экспериментов обнаружил, что при $|\eta| > k$ основное состояние ε_0 оператора H_0 входит в спектр

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

оператора H , каковы бы ни были константы связи α_γ [9]. Этот факт был строго доказан в [1] для случая, когда $l = 0, k = 1$, и в [5] – для любых l и k , но лишь при рациональном значении потока η . На самом деле, с использованием разложения пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ по спектру неприводимых представлений группы магнитных трансляций было доказано, что при $|\eta| > k$ для любого $l \in \mathbb{N}$ существует собственная функция $\psi \in L_1$ оператора H_0 , которая одновременно является собственной функцией оператора H с тем же собственным числом ε_l . Отсюда вытекает (см. лемму 4), что

$$\psi(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (3)$$

Следует отметить, что наличие собственных функций ψ уровня ε_0 , удовлетворяющих равенству (3), следует и из результатов А. М. Переломова о полноте когерентных состояний (см., например, [10]).

В статье [11] М. Я. Азбель использовал решения уравнения Шрёдингера

$$H_0 \psi = \varepsilon_l \psi,$$

удовлетворяющие условию (3) (и не обязательно суммируемые с квадратом), для исследования термодинамических и транспортных свойств неупорядоченных квадимерных систем носителей заряда, находящихся в квантующем магнитном поле. Такие решения мы будем называть *состояниями Ландау–Андо уровня ε_l* (М. Я. Азбель называл их *расширенными беспорядочными независимыми состояниями*). Несколько ранее в работах [12]–[14] было показано, что при $k = 1$ состояния Ландау–Андо уровня ε_l существуют, если $|\eta| > l$. Цель настоящей заметки – доказать, что это условие можно значительно ослабить, а именно, при любом k достаточным условием существования состояний Ландау–Андо произвольного уровня ε_l является выполнение неравенства $|\eta| > k$.

2. В этом разделе мы укажем некоторые хорошо известные свойства оператора Ландау H_0 и те простейшие следствия из них, которые будут применены в доказательстве теоремы 1; подробности см. в [5], [10], [15]–[17]. Далее будем использовать пространство Фока–Баргмана, для чего перейдем к комплексной переменной. Положим $z = x_1 + ix_2$, если $\xi > 0$, и $z = x_1 - ix_2$, если $\xi < 0$. Определим на пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ магнитные операторы уничтожения $a(\xi)$ и рождения $a^+(\xi)$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= -i(2\pi|\xi|)^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + 2^{-1}\pi|\xi|z \right), \\ a^+(\xi) &= i(2\pi|\xi|)^{-1/2} \left(-\frac{\partial}{\partial z} + 2^{-1}\pi|\xi|\bar{z} \right). \end{aligned}$$

Тогда на пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$H_0(\xi) = 4\pi|\xi| \left(a^+(\xi)a(\xi) + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

ЛЕММА 1. *И. Пространство $L_0(\xi)$ состоит в точности из всех функций $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, которые допускают представление в виде*

$$\varphi(z) = \exp\left(-\frac{\pi|\xi|z\bar{z}}{2}\right) f(z), \quad (5)$$

где f – целая функция переменного z . Более того, если функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ имеет вид $\varphi(z) = \exp(-\pi|z|^2/2) f(z)$, где f – целая функция переменного z , то φ является решением уравнения

$$4\pi|\xi| \left(a^+(\xi) a(\xi) + \frac{1}{2} \right) \varphi = \varepsilon_0 \varphi. \quad (6)$$

II. Пусть $l \in \mathbb{N}$. Тогда для функции $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ равносильны условия:

1) ψ является решением уравнения

$$4\pi|\xi| \left(a^+(\xi) a(\xi) + \frac{1}{2} \right) \psi = \varepsilon_l \psi; \quad (7)$$

2) найдется функция φ , $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая уравнению (6) и такая, что $\psi = (a^+(\xi))^l \varphi$.

III. При любом $l \in \mathbb{N}$ оператор $(l+1)^{-1/2} a^+(\xi)$ изометрично отображает пространство L_l на пространство L_{l+1} , а при $l > 0$ оператор $l^{-1/2} a(\xi)$ изометрично отображает пространство L_l на L_{l-1} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пользуясь обобщением теоремы И. Э. Шноля на случай операторов Шрёдингера с магнитным полем [18], [19], можно доказать, что всякая полиномиально ограниченная функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая уравнению (6), представима в виде произведения (5), в котором множитель $f(z)$ – целая функция.

Обозначим через $\mathcal{A}_\xi(\mathbb{C})$ пространство всех целых функций f , таких что функция $\varphi(z) = \exp(-\pi\xi|z|^2/2) f(z)$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^2)$. Очевидно, $\mathcal{A}_\xi(\mathbb{C})$ – гильбертово пространство относительно нормы $\|f\| = \|\varphi\|_{L^2}$. Следующая лемма непосредственно вытекает из леммы 1.

ЛЕММА 2. Существует такой дифференциальный оператор $D_l(\xi)$,

$$D_l(\xi) = \sum_{j=0}^l P_j(z, \bar{z}; \xi) \frac{\partial^j}{\partial z^j},$$

где $P_j(z, \bar{z}; \xi)$ – полином вида

$$P_j(z, \bar{z}; \xi) = \sum_{s+t \leq j} \lambda_{st}^j(\xi) z^s \bar{z}^t,$$

что для функции ψ , $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, равносильны следующие условия:

1) $\psi \in L_l$;

2) найдется функция $f_0 \in \mathcal{A}_\xi$, такая что

$$\psi(z) = \exp\left(-\pi\xi \frac{|z|^2}{2}\right) f(z),$$

где $f = D_l(\xi) f_0$.

При этом коэффициенты $\lambda_{st}^j(\xi)$ полинома P_j непрерывно зависят от ξ .

Для каждого комплексного числа α определим оператор $[\alpha](\xi)$, действующий на функцию $f(z, \bar{z})$ по формуле:

$$([\alpha](\xi) f)(z, \bar{z}) = \exp(\pi\xi i \operatorname{Im}(z\bar{\alpha})) f(z - \alpha, \bar{z} - \bar{\alpha}).$$

(Оператор $[\alpha](\xi)$ называется магнитной трансляцией на вектор α [15]).

ЛЕММА 3. На пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ все операторы вида $[\alpha](\xi)$ коммутируют как с оператором $a(\xi)$, так и с оператором $a^+(\xi)$.

3. Этот раздел начнем с описания частного вида операторов типа (1). Пусть S – сужение оператора H_0 на множество $\mathcal{D}(S)$, $\mathcal{D}(S) = \{\varphi \in \mathcal{D}(H_0) : \varphi(\gamma) = 0 \forall \gamma \in \Gamma\}$; нетрудно проверить, что S – замкнутый оператор [5]. Далее, через H будем обозначать самосопряженное расширение оператора S , резольвента которого $R(z) = (H - z)^{-1}$ задается формулой М. Г. Крейна следующего вида (см. [7]):

$$R(z) = R_0(z) - B_z[Q(z)]^{-1}B_z^*. \quad (8)$$

В формуле (8) $R_0(z)$ обозначает резольвенту оператора H_0 , а B_z и $Q(z)$ – соответственно Γ - и $\mathcal{Q}$ -функции Крейна пары операторов (S, H_0) . При каждом допустимом значении z оператор $Q(z)$ действует в пространстве $\ell^2(\Gamma)$, а оператор B_z действует из пространства $\ell^2(\Gamma)$ в пространство $L^2(\mathbb{R}^2)$ [5].

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(H_0)$. Тогда равносильны следующие условия:

- 1) $\varphi(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$;
- 2) $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ и $H\varphi = H_0\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое число z_0 , не принадлежащее объединению спектров $\sigma(H_0) \cup \sigma(H)$. Тогда область определения оператора H допускает следующее “параметрическое” описание [8]:

$$\mathcal{D}(H) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) : \psi = \varphi - B_{z_0}[Q(z_0)]^{-1}B_{z_0}^*(H_0 - z_0)\varphi, \varphi \in \mathcal{D}(H_0)\}. \quad (9)$$

При этом каждое $\psi \in \mathcal{D}(H)$ единственным образом представимо в виде, указанном в (9), и

$$(H - z_0)\psi = (H_0 - z_0)\varphi. \quad (10)$$

Пусть $G_0(x, y; z)$ – функция Грина оператора H_0 ; определим функцию $g_\gamma(z_0)$ равенством: $g_\gamma(z_0) = G_0(\cdot, \gamma; z_0)$. В [3] доказано, что семейство функций $\{g_\gamma(z_0) : \gamma \in \Gamma\}$ образует базис Рисса в дефектном пространстве $\text{Ker}(S^* - z_0)$ оператора S , и что оператор B_{z_0} имеет вид

$$B_{z_0}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma g_\gamma(z_0), \quad (11)$$

где $x = (\xi_\gamma) \in \ell^2(\Gamma)$. С учетом указанного в [5] вида оператора $Q(z_0)$ из формул (9) и (11) получаем следующее описание области $\mathcal{D}(H)$:

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^2) : \psi = \varphi - \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} [Q(z_0)]_{\gamma, \gamma'}^{-1} \varphi(\gamma') g_\gamma(z_0), \varphi \in \mathcal{D}(H_0) \right\}. \quad (12)$$

Сумма в формуле (12) корректно определена, так как семейство $(\varphi(\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ принадлежит $\ell^2(\Gamma)$ [3]. Из этой формулы сразу вытекает импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказываемой леммы. Пусть теперь выполнено условие 2) и пусть ψ определено согласно (9). Тогда из (10) получаем: $(H - z_0)\psi = (H_0 - z_0)\varphi$. Тем самым, $\psi = \varphi$ и в силу формулы (12)

$$\sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} [Q(z_0)]_{\gamma, \gamma'}^{-1} \varphi(\gamma') g_\gamma(z_0) = 0.$$

Так как $(g_\gamma(z_0))_{\gamma \in \Gamma}$ – базис Рисса, то для всех $\gamma \in \Gamma$

$$\sum_{\gamma' \in \Gamma} [Q(z_0)]_{\gamma, \gamma'}^{-1} \varphi(\gamma') = 0.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $Q(z_0)$, получаем, что $\varphi(\gamma') = 0 \quad \forall \gamma' \in \Gamma$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Состоянием Ландау–Андо уровня $\varepsilon_l(\xi)$ назовем ненулевую функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, такую что*

- 1) $\psi = (a^+(\xi))^l \varphi$ для некоторой ограниченной функции φ из пространства $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющей уравнению (6);
- 2) $\psi(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$.

Подчеркнем, что в силу леммы 1 состояние Ландау–Андо уровня $\varepsilon_l(\xi)$ удовлетворяет уравнению (7).

Теперь сформулируем и докажем основной результат заметки.

ТЕОРЕМА. *Пусть $|\eta| > k$. Тогда для любого $l = 0, 1, \dots$ существует состояние Ландау–Андо уровня $\varepsilon_l(\xi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем опираться на следующее утверждение, доказанное в [2], [5]: если поток η рационален и $|\eta| > k$, то для любого $l \in \mathbb{N}$ существует собственная функция ψ оператора H_0 , соответствующая собственному числу ε_l , которая одновременно является собственной функцией оператора H с тем же самым собственным числом ε_l .

Пусть теперь число η не обязательно рационально. Зафиксируем номер уровня Ландау l и выберем последовательность рациональных чисел $(\eta_n)_{n \geq 0}$, сходящуюся к числу η и удовлетворяющую неравенствам $k < |\eta_n| < |\eta|$. С учетом леммы 4 для каждого $n \geq 0$ мы можем найти такую нормированную собственную функцию ψ_n оператора $H_0(\xi_n)$, принадлежащую собственному числу $\varepsilon_l = \varepsilon_l(\xi_n)$, что

$$\psi_n(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (13)$$

В силу свойств оператора рождения можно записать $\psi_n = (a^+(\xi))^l \varphi_n$, где $\varphi_n \in L_0$ и $\|\varphi_n\| \leq c$, $c = \text{const}$. Обозначим $c_n = \sup_{z \in \mathbb{C}} |\varphi_n(z)|$. Далее, будем различать два случая: (I) $\overline{\lim} c_n > 0$; (II) $\overline{\lim} c_n = \lim c_n = 0$.

В случае (I), переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $\sup c_n > r$, где $r > 0$. Найдем такие $\lambda_n \in \Lambda$, что

$$\sup_{z \in \Omega_\Lambda} |\tilde{\varphi}_n(z)| > r, \quad (14)$$

где $\tilde{\varphi}_n = [\lambda_n](\xi_n) \varphi_n$. Из леммы 3 и инвариантности множества Γ относительно трансляций на элементы решетки Λ вытекает, что для всех $\gamma \in \Gamma$ выполнено равенство $((a^+(\xi_n))^l \tilde{\varphi}_n)(\gamma) = 0$. Очевидно также, что

$$\|\tilde{\varphi}_n\| \leq c \quad (15)$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$. Тем самым, в пространстве $\mathcal{A}_{\xi_n}(\mathbb{C})$ выполнено неравенство $\|f_n\| \leq c$, где $f_n(z) = \exp(\pi|\xi| \cdot |z|^2/2) \tilde{\varphi}_n(z)$. Легко видеть, что тождественное вложение пространства $\mathcal{A}_{\xi_n}(\mathbb{C})$ в пространство $\mathcal{A}_\xi(\mathbb{C})$ при $|\xi_n| < |\xi|$ имеет норму,

не превосходящую единицы. Тем самым, последовательность (f_n) ограничена в пространстве $\mathcal{A}_\xi(\mathbb{C})$. В силу теоремы о замкнутом графике тождественное вложение пространства $\mathcal{A}_\xi(\mathbb{C})$ в пространство Фреше $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ всех целых функций непрерывно, следовательно, последовательность (f_n) ограничена и в пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Пользуясь теоремой Монтеля, мы можем теперь извлечь из последовательности (f_n) подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, т.е. сходящуюся равномерно на каждом компакте из $\mathbb{C}$. Удобства ради считаем, что сама последовательность (f_n) сходится. Пусть $f = \lim f_n$. Очевидно, последовательность $(\tilde{\varphi}_n)$ локально равномерно сходится к функции $\varphi(z) = \exp(-\pi|\xi| \cdot |z|^2/2)f(z)$. В силу неравенства (15) и леммы Фату $\|\varphi\| \leq c$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$, поэтому $\varphi \in L_0$. При этом ввиду (14) $\varphi \neq 0$. Положим $\psi = (a^+(\xi))^l \varphi$; тогда в силу леммы 2 $\psi(z, \bar{z}) = \lim([\lambda_n](\xi_n)\psi_n)(z, \bar{z})$, поэтому $\psi(\gamma) = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$ ввиду (13). По лемме 1 φ удовлетворяет уравнению (6). Для завершения доказательства теоремы в случае (I) осталось сослаться на то, что все функции из пространства $L_0(\xi)$ ограничены [10].

В случае (II) полагаем $\tilde{\varphi} = c_n^{-1}\varphi$ и далее рассуждаем, как при доказательстве случая (I). Единственное отличие состоит лишь в том, что мы не можем теперь утверждать, что $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, и ограниченность функции φ непосредственно усматриваем из определения функций $\tilde{\varphi}_n$. Теорема полностью доказана.

Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарёва

Поступило
27.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гейлер В. А., Маргулис В. А. // ТМФ. 1984. Т. 58. № 3. С. 461–472.
2. Гейлер В. А., Маргулис В. А. // ТМФ. 1984. Т. 61. № 1. С. 140–149. **3.** Гейлер В. А., Маргулис В. А. // ТМФ. 1987. Т. 70. № 2. С. 461–472. **4.** Гейлер В. А., Маргулис В. А. // Ж. эксперимент. и теор. физики. 1989. Т. 95. № 3. С. 1134–1145. **5.** Гейлер В. А. // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 3. С. 1–48.
- 6.** Р. Прендж, С. Гирвин (ред.) Квантовый эффект Холла. М.: Мир, 1989. **7.** Павлов В. С. // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 99–131. **8.** Альбеверьо С., Гестези Ф., Холден Х., Хёгг-Крон Р. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. **9.** Ando T. // J. Phys. Soc. Japan. 1983. V. 52. № 5. P. 1740–1749. **10.** Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. **11.** Azbel M. Ya. // Phys. Rev. Ser. B. 1994. V. 49. № 8. P. 5463–5475. **12.** Avishai Y., Redheffer R. M., Band Y. B. // J. Phys. Ser. A. Math. Gen. 1992. V. 25. № 13. P. 3883–3889. **13.** Avishai Y., Redheffer R. M. // Phys. Rev. Ser. B. 1993. V. 47. № 4. P. 2089–2100. **14.** Avishai Y., Azbel M. Ya., Gredeskul S. A. // Phys. Rev. Ser. B. 1993. V. 48. № 23. P. 17280–17295. **15.** Новиков С. П. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3–23. **16.** Avron J. E., Herbst I. W., Simon B. // Ann. Phys. 1978. V. 114. № 1–2. P. 431–452. **17.** Jannussis A., Skuras E. // Lett. Nuovo cimento. 1985. V. 44. № 2. P. 91–98. **18.** Simon B. // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. № 3. P. 447–526. **19.** Avron J., Simon B. // J. Phys. Ser. A. Math. Gen. 1985. V. 18. № 12. P. 2199–2205.