Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Р. Алеева, О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 323–339

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:54:24

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ С МНОЖЕСТВОМ ПОРЯДКОВ ЭЛЕМЕНТОВ, КАК У ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА ИЛИ ДВОЙНОЙ ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА

М. Р. Алеева

Доказано, что конечная простая группа с множеством порядков элементов как у группы Фробениуса (соответственно двойной группы Фробениуса) изоморфна $L_3(3)$ или $U_3(3)$ (соответственно $U_3(3)$ или $S_4(3)$).

Библиография: 24 названия.

1. Введение. Пусть G – конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ множество всех порядков элементов группы G . Это множество частично упорядочено относительно делимости и потому однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ своих максимальных по делимости элементов. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n и положим $\pi(G) = \pi(|G|)$. Множество $\omega(G)$ определяет *граф Грюнберга–Кегеля* $GK(G)$, или *граф простых чисел* группы G , множеством вершин которого служит $\pi(G)$, и две вершины p, q из $\pi(G)$ соединены ребром, если G содержит элемент порядка pq . Обозначим через $\pi_i = \pi_i(G)$, где $i = 1, \dots, t(G)$, i -ю связную компоненту графа $GK(G)$. Для группы G четного порядка положим $2 \in \pi_1$. Обозначим через $\mu_i = \mu_i(G)$ множество тех $n \in \mu(G)$, для которых $\pi(n) \subseteq \pi_i$.

Грюнберг и Кегель доказали следующую структурную теорему для конечных групп с несвязным графом простых чисел.

ТЕОРЕМА ГРЮНБЕРГА–КЕГЕЛЯ (см. [1, теорема A]). *Если G – конечная группа с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, то верно одно из следующих утверждений:*

- (а) G – группа Фробениуса;
- (б) $G = ABC$, где A, AB – нормальные подгруппы группы G и AB, BC – группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно;
- (в) G является расширением $\pi_1(G)$ -группы N посредством группы A , где $P \leq A \leq \text{Aut}(P)$, P – простая неабелева группа с несвязным графом $GK(P)$, $A/P - \pi_1(G)$ -группа.

Естественно возникает

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00781.

ВОПРОС. Какие конечные простые группы имеют то же множество порядков элементов, как группы из пунктов (а) или (б) теоремы Грюнберга–Кегеля?

Используя классификацию конечных простых групп с несвязным графом Грюнберга–Кегеля (см. [1]–[3]), мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть G – конечная группа, $\omega(G) = \omega(S)$, где S – конечная простая неабелева группа. Тогда

- 1) если для группы G выполняется случай (а) теоремы Грюнберга–Кегеля, то S изоморфна $L_3(3)$ или $U_3(3)$;
- 2) если для группы G выполняется случай (б) теоремы Грюнберга–Кегеля, то S изоморфна $U_3(3)$ или $S_4(3)$.

Если группа S изоморфна $L_3(3)$ или $U_3(3)$, то построены примеры групп Фробениуса G таких, что $\omega(G) = \omega(S)$ (см. примеры 1 и 2). Вопрос о существовании двойных групп Фробениуса G с $\omega(G) = \omega(S)$, где S изоморфна $U_3(3)$ или $S_4(3)$, остается открытым.

Основные определения и обозначения, принятые в работе, стандартны; их можно найти в [4] или [5].

Везде далее q обозначает некоторую степень простого числа p , а p' – некоторое нечетное простое число.

Пусть $\delta \in \{-1, 1\}$. Положим

$$SL_3^\delta(q) = \begin{cases} SL_3(q), & \text{если } \delta = 1, \\ SU_3(q), & \text{если } \delta = -1, \end{cases} \quad L_3^\delta(q) = \begin{cases} L_3(q), & \text{если } \delta = 1, \\ U_3(q), & \text{если } \delta = -1. \end{cases}$$

2. Предварительные результаты.

ЛЕММА 1 (см. [6]–[8]). Пусть G – группа Фробениуса с ядром N и дополнением H . Тогда верны следующие утверждения:

- (1) N – нильпотентная группа; в частности, $|\mu(N)| = 1$ и $GK(N)$ – полный граф;
- (2) если U – подгруппа порядка rs из H , где r и s – простые числа (не обязательно различные), то U – циклическая группа; в частности, силовские r -подгруппы группы H для нечетных простых чисел r циклические;
- (3) если порядок группы H четен, то в H есть единственный элемент z порядка 2; в частности, силовская 2-подгруппа группы H является циклической группой или (обобщенной) группой кватернионов, подгруппа N коммутативна и $n^z = n^{-1}$ для любого элемента n из N ;
- (4) если H содержит элемент порядка 16, то H имеет нормальное 2-дополнение;
- (5) либо группа H разрешима и граф $GK(H)$ полный, либо H содержит нормальную подгруппу $L \cong SL_2(5)$ такую, что $(|L|, |H : L|) \leq 2$ и $GK(H)$ может быть получен из полного графа на $\pi(H)$ удалением ребра $\{3, 5\}$.

ЛЕММА 2 (см. [9, лемма 3]). В случае (б) теоремы Грюнберга–Кегеля B является циклической группой нечетного порядка, C – циклическая группа и G содержит элемент порядка

$$|C| \cdot \prod_{r \in \pi(A)} r.$$

В частности, $GK(B)$, $GK(AC)$ – связные компоненты графа $GK(G)$ и обе являются полными графами.

ЛЕММА 3 (см. [3, лемма 4]). Пусть H – конечная простая группа с $t(H) = 2$. Тогда $|\mu_2(H)| = 1$. Пусть n_2 означает единственный элемент из $\mu_2(H)$. Тогда H , $\pi_1(H)$, n_2 таковы, как показано в таблице 1.

ЛЕММА 4. Пусть G – конечная группа с $\omega(G) = \omega(S)$, где S изоморфна одной из следующих групп: $S_4(3^f)$, $f > 1$, $L_3^\delta(q)$ для четного q , $L_4(3)$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^3D_4(2)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, M_{12} , Ru , He , McL , Co_1 , Co_3 , Fi_{22} , F_5 , A_n , где $6 < n = p'$, $p' + 1$, $p' + 2$. Тогда G не является группой Фробениуса или двойной группой Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $S \cong S_4(3^f)$, $f > 1$, то см. лемму 13 в [9]. Если $S \cong L_3^\delta(q)$, q четно, то см. лемму 9 в [10]. Если S изоморфна одной из групп $L_4(3)$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^3D_4(2)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, то см. теорему 2 в [11], предложение 5 в [9] и [12]. Если S – спорадическая группа, то см. [13]–[15]. Если $S \cong A_n$, $6 < n = p'$, $p' + 1$, $p' + 2$, то см. лемму 3 в [3] и лемму 8 в [16].

ЛЕММА 5. Пусть $\omega(G) = \omega(L_3^\delta(q))$, где q нечетно. Тогда

$$\begin{aligned}\omega(G) &= \{p(q - \delta), q^2 - 1, q^2 + \delta q + 1\} && \text{при } (3, q - \delta) = 1, \\ \omega(G) &= \left\{q - \delta, \frac{p(q - \delta)}{3}, \frac{q^2 - 1}{3}, \frac{q^2 + \delta q + 1}{3}\right\} && \text{при } (3, q - \delta) = 3.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 9 в [17] и использует матричные представления элементов группы $SL_3^\delta(q)$ из [18].

ЛЕММА 6 (теорема Жигмонди, см. [19]). Пусть p – простое число, n – натуральное число, $n \geq 2$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (а) существует простое число s такое, что s делит $p^n - 1$, но s не делит $p^t - 1$ для всех натуральных чисел $t < n$;
- (б) $n = 6$ и $p = 2$;
- (в) $n = 2$ и $p = 2^l - 1$ для некоторого простого числа l .

Простое число s со свойством (а) называется примитивным простым делителем числа $p^n - 1$.

ЛЕММА 7 (см. [2, лемма 3 а)). Пусть a , m и n – натуральные числа. Тогда

$$(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(m, n)} - 1.$$

ЛЕММА 8. Пусть p и r – простые числа и $p^2 + 1 = 2r$. Тогда

- (а) если $p = 2^l - 1$, где l – простое число, то $p = 3$, $r = 5$;
- (б) если $p = 2^{2^n} + 1$, где $n \geq 0$, то либо $p = 3$, $r = 5$, либо $p = 5$, $r = 13$.

ТАБЛИЦА 1. Конечные простые группы H с $t(H) = 2$

H	Ограничения на H	$\pi_1(H)$	n_2
A_n	$6 < n = p', p' + 1, p' + 2$; одно из $n, n - 2$ не простое	$\pi((n - 3)!)^1$	p'
$A_{p'-1}(q)$	$(p', q) \neq (3, 2), (3, 4)$	$\pi(q \prod_{i=1}^{p'-1} (q^i - 1))$	$\frac{q^{p'} - 1}{(q-1)(p', q-1)}$
$A_{p'}(q)$	$(q - 1) \mid (p' + 1)$	$\pi(q(q^{p'+1} - 1) \prod_{i=1}^{p'-1} (q^i - 1))$	$\frac{q^{p'} - 1}{q-1}$
${}^2A_{p'-1}(q)$		$\pi(q \prod_{i=1}^{p'-1} (q^i - (-1)^i))$	$\frac{q^{p'} + 1}{(q+1)(p', q+1)}$
${}^2A_{p'}(q)$	$(q + 1) \mid (p' + 1)$ $(p', q) \neq (3, 3), (5, 2)$	$\pi(q(q^{p'+1} - 1) \prod_{i=1}^{p'-1} (q^i - (-1)^i))$	$\frac{q^{p'} + 1}{q+1}$
${}^2A_3(2)$		$\{2, 3\}$	5
$B_n(q)$	$n = 2^m \geq 4, q$ нечетно	$\pi(q \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^n + 1}{2}$
$B_{p'}(3)$		$\pi(3(3^{p'} + 1) \prod_{i=1}^{p'-1} (3^{2^i} - 1))$	$\frac{3^{p'} - 1}{2}$
$C_n(q)$	$n = 2^m \geq 2$	$\pi(q \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^{n-1} + 1}{(2, q-1)}$
$C_{p'}(q)$	$q = 2, 3$	$\pi(q(q^{p'} + 1) \prod_{i=1}^{p'-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^{p'} - 1}{(2, q-1)}$
$D_{p'}(q)$	$p' \geq 5, q = 2, 3, 5$	$\pi(q \prod_{i=1}^{p'-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^{p'} - 1}{q-1}$
$D_{p'+1}(q)$	$q = 2, 3$	$\pi(q(q^{p'} + 1) \prod_{i=1}^{p'-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^{p'} - 1}{(2, q-1)}$
${}^2D_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$	$\pi(q \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2^i} - 1))$	$\frac{q^n + 1}{(2, q+1)}$
${}^2D_n(2)$	$n = 2^m + 1, m \geq 2$	$\pi(2(2^n + 1) \prod_{i=1}^{n-2} (2^{2^i} - 1))$	$2^{n-1} + 1$
${}^2D_{p'}(3)$	$5 \leq p' \neq 2^m + 1$	$\pi(3 \prod_{i=1}^{p'-1} (3^{2^i} - 1))$	$\frac{3^{p'} + 1}{4}$
${}^2D_n(3)$	$n = 2^m + 1 \neq p', m \geq 2$	$\pi(3(3^n + 1) \prod_{i=1}^{n-2} (3^{2^i} - 1))$	$\frac{3^{n-1} + 1}{2}$
$G_2(q)$	$2 < q \equiv \varepsilon \pmod{3}, \varepsilon = \pm 1$	$\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - \varepsilon))$	$q^2 - \varepsilon q + 1$
${}^3D_4(q)$		$\pi(q(q^6 - 1))$	$q^4 - q^2 + 1$
$F_4(q)$	q нечетно	$\pi(q(q^6 - 1)(q^8 - 1))$	$q^4 - q^2 + 1$
${}^2F_4(2)'$		$\{2, 3, 5\}$	13
$E_6(q)$		$\pi(q(q^5 - 1)(q^8 - 1)(q^{12} - 1))$	$\frac{q^6 + q^3 + 1}{(3, q-1)}$
${}^2E_6(q)$	$q > 2$	$\pi(q(q^5 + 1)(q^8 - 1)(q^{12} - 1))$	$\frac{q^6 - q^3 + 1}{(3, q+1)}$
M_{12}		$\{2, 3, 5\}$	11
J_2		$\{2, 3, 5\}$	7
Ru		$\{2, 3, 5, 7, 13\}$	29
He		$\{2, 3, 5, 7\}$	17
McL		$\{2, 3, 5, 7\}$	11
Co_1		$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	23
Co_3		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	23
Fi_{22}		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	13
F_5		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	19

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $l = 4k + 3$, где k – целое число. Тогда $2^l = 2^{4k+3} = 2^{4k} \cdot 2^3 \equiv 3 \pmod{5}$, $p = 2^l - 1 \equiv 2 \pmod{5}$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $r \equiv 0 \pmod{5}$, $r = 5$, $p = 3$.

Пусть $l = 4k + 1$, где k – целое число. Тогда $p - 1 = 2^l - 2 = 2(2^{4k} - 1) = 30t_1$, где t_1 – целое число, поэтому $r - 1 = (p - 1) \cdot 2^{l-1} = 30t$, где t – целое число. По теореме Ферма

$2^l \equiv 2 \pmod{l}$, $p = 2^l - 1 \equiv 1 \pmod{l}$, $r = (p^2 + 1)/2 \equiv 1 \pmod{l}$, т.е. $r = 1 + 2ls$, где s – целое число. Следовательно, $30t = 2ls$, $l = 15t/s$ – простое число. Ввиду простоты l либо $l = 3$, либо $l = 5$, либо t – простое число. Если $l = 3$, то $p = 7$, $r = 25$ – не простое число; противоречие. Если $l = 5$, то $p = 31$, $r = 481 = 13 \cdot 37$ – не простое число; противоречие. Значит, t – простое число. Так как $2^{4k+1}(2^{4k} - 1) = (p - 1) \cdot 2^{l-1} = 30t$, то $t = 2^{4k}(2^{4k} - 1)/15$ – не простое число; противоречие.

(б) Так как $p = 2^{2^n} + 1$, то

$$\frac{p^2 + 1}{2} = 2^{2^{n+1}-1} + 2^{2^n} + 1 = 2^{2^n-1}(2^{2^n} - 1) + 3 \cdot 2^{2^n-1} + 1.$$

Если $n = 0$, то $p = 3$, $r = 5$. Если $n = 1$, то $p = 5$, $r = 13$. Пусть теперь $n \geq 2$. Тогда 2^n делится на 4. Отсюда $2^{2^n} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $2^{2^n-1} \equiv 3 \pmod{5}$, $3 \cdot 2^{2^n-1} \equiv 4 \pmod{5}$, т.е. $(p^2 + 1)/2 \equiv 0 \pmod{5}$, $r \equiv 0 \pmod{5}$, $r = 5$, $p = 3$.

3. Доказательство теоремы. Пусть S – конечная простая неабелева группа и G – конечная группа с $\omega(G) = \omega(S)$, для которой выполняется случай (а) или (б) теоремы Грюнберга–Кегеля. Ввиду лемм 1 (1), 1 (5) и 2 имеем $t(S) = 2$ и, следовательно, по лемме 3 группа S такова, как в таблице 1.

ЛЕММА 9. *Группа S изоморфна группе лиева типа из таблицы 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. По лемме 4 имеем $S \cong J_2$. По [5] $\omega(G) = \{15, 12, 10, 8, 7\}$.

Пусть $G = FC$ – группа Фробениуса. Из леммы 1 (1) следует, что F – 7-группа, C – группа четного порядка. По лемме 1 (3) в C есть центральный элемент порядка 2, поэтому $2 \cdot 15 = 30 \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $G = ABC$ – двойная группа Фробениуса. Из леммы 2 следует, что B – циклическая группа порядка 7, $|C|$ делит 6, поэтому $4, 5 \in \omega(A)$. Так как по лемме 1 (1) A нильпотентна, то $20 \in \omega(G)$; противоречие.

ЛЕММА 10. *Группа S изоморфна $L_3^5(q)$ для нечетного q , или $S_4(q)$ для $(3, q) = 1$, или $S_4(3)$. Более того, существуют числа $p_1, p_2 \in \pi_1(S) \setminus \{p\}$ такие, что $\{p_1, p_2\} \neq \{3, 5\}$, $p_1 p_2 \notin \omega(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9 группа S изоморфна группе лиева типа из таблицы. Используем классификацию и формулы для порядков максимальных торov в конечных простых группах лиева типа (см. [20, Е], [21], [22, лемма 2], [23]).

1) Случай $S \cong A_{p'-1}(q)$. Порядки максимальных торov T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{r=1}^m \frac{q^{n_r} - 1}{q - 1},$$

где $\sum_{r=1}^m n_r = p'$, $d = (p', q - 1)$.

Если $p' = 3$, то утверждение леммы следует из леммы 4.

Пусть $p' \geq 5$, $(p', q) \neq (7, 2), (5, 4)$. По лемме 6 числа $q^{p'-1} - 1$ и $q^{p'-2} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно. Если $q = 3^f$, то $p_1 \neq 3$, $p_2 \neq 3$. Если $q \neq 3^f$, то $3 \mid (q^2 - 1)$ и 3 не может быть примитивным делителем чисел $q^{p'-1} - 1$ и $q^{p'-2} - 1$ при $p' \geq 5$. Поэтому $\{p_1, p_2\} \neq \{3, 5\}$. Если в S есть элемент порядка $p_1 p_2$, то

он по [20, E] содержится в максимальном торе T из S . Так как p_1, p_2 не делят $\prod_{i=1}^{p'-3} (q^i - 1)$, то порядок тора T должен содержать множители $(q^{p'-1} - 1)/(q - 1)$ и $(q^{p'-2} - 1)/(q - 1)$. По лемме 7 имеем $(q^{p'-1} - 1, q^{p'-2} - 1) = q^{(p'-1, p'-2)} - 1 = q - 1$. Отсюда

$$\left(\frac{q^{p'-1} - 1}{q - 1}, \frac{q^{p'-2} - 1}{q - 1} \right) = 1,$$

поэтому порядок тора T делится на

$$\frac{(q^{p'-1} - 1)(q^{p'-2} - 1)}{(q - 1)^2 d},$$

но $2p' - 3 > p'$ при $p' > 3$ в противоречии с тем, что $\sum n_r = p'$. Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

Если $(p', q) = (7, 2)$, то $\pi_1(S) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$. Пусть в S есть элемент порядка $7 \cdot 31$. Тогда он содержится в максимальном торе T , порядок которого делится на $2^3 - 1$ и $2^5 - 1$, но $3 + 5 = 8 > 7 = p'$; противоречие с описанием порядков максимальных торов. Значит, в S нет элемента порядка $7 \cdot 31$; противоречие с леммой 1 (5).

Если $(p', q) = (5, 4)$, то $\pi_1(S) = \{2, 3, 5, 7, 17\}$. Пусть в S есть элемент порядка $7 \cdot 17$. Тогда он содержится в максимальном торе T , порядок которого делится на $2^3 - 1$ и $2^8 - 1$, но $3 + 8 = 11 > 5 = p'$; противоречие с описанием порядков максимальных торов. Значит, в S нет элемента порядка $7 \cdot 17$; противоречие с леммой 1 (5).

2) Случай $S \cong A_{p'}(q)$, $(q - 1) \mid (p' + 1)$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{r=1}^m \frac{q^{n_r} - 1}{q - 1},$$

где $\sum_{r=1}^m n_r = p' + 1$ и $d = (p' + 1, q - 1) = q - 1$.

Пусть $p' \geq 5$, $(p', q) \neq (5, 2), (7, 2)$. По лемме 6 числа $q^{p'+1} - 1$ и $q^{p'-1} - 1$ имеют примитивные делители p_1 и p_2 соответственно. Если в S есть элемент порядка $p_1 p_2$, то он содержится в максимальном торе T и порядок этого максимального тора делится на

$$\frac{(q^{p'+1} - 1)(q^{p'-1} - 1)}{(q - 1)^2 d},$$

но $(p' + 1) + (p' - 1) = 2p' > p' + 1$; противоречие. Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

При $(p', q) = (5, 2)$ имеем $\pi_1(S) = \{2, 3, 5, 7\}$. Если в S есть элемент порядка $5 \cdot 7$, то он содержится в максимальном торе T группы G и $|T|$ делится на $(2^3 - 1)(2^4 - 1)$, но $3 + 4 = 7 > 5$; противоречие. Значит, в S нет элемента порядка $5 \cdot 7$; противоречие с леммой 1 (5).

При $(p', q) = (7, 2)$ имеем $\pi_1(S) = \{2, 3, 5, 7, 17, 31\}$. Если в S есть элемент порядка $17 \cdot 31$, то он содержится в максимальном торе T группы S и $|T|$ делится на $(2^5 - 1)(2^8 - 1)$, но $5 + 8 = 13 > 7$; противоречие. Значит, в S нет элемента порядка $17 \cdot 31$; противоречие с леммой 1 (5).

Значит, $p' = 3$ и $(q - 1) \mid (p' + 1) = 4$, т.е. $q = 2, 3, 5$. По лемме 4 имеем $q \neq 3$. Если $q = 2$, то $S \cong L_4(2)$; в частности, 2 и 5 не смежны, что противоречит лемме 1 (5).

Поэтому $q = 5$, $S \cong L_4(5)$. По лемме 1 (5) $13 \cdot 5 \in \omega(G)$, но в группе $L_4(5)$ нет элемента такого порядка; противоречие.

3) Случай $S \cong {}^2A_{p'-1}(q)$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{r=1}^m \frac{q^{n_r} - (-1)^{n_r}}{q + 1},$$

где $\sum_{r=1}^m n_r = p'$ и $d = (p', q + 1)$.

Если $p' = 3$, то утверждение леммы следует из леммы 4.

Пусть $p' \geq 11$. Тогда $2(p' - 4) > p' - 1$. По лемме 6 числа $q^{2(p'-2)} - 1$ и $q^{2(p'-4)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^{p'-2} + 1$, p_2 делит $q^{p'-4} + 1$. Если в S есть элемент порядка $p_1 p_2$, то он содержится в максимальном торе T . Так как p_1, p_2 не делят

$$\prod_{i=1}^{p'-5} (q^i - (-1)^i)(q^{p'-3} - 1)(q^{p'-1} - 1),$$

то порядок тора T должен содержать множители $(q^{p'-2} + 1)/(q + 1)$ и $(q^{p'-4} + 1)/(q + 1)$. По лемме 7 имеем

$$(q^{2(p'-2)} - 1, q^{2(p'-4)} - 1) = q^{2(p'-2, p'-4)} - 1 = q^2 - 1,$$

поэтому порядок тора T делится на

$$\frac{(q^{p'-2} + 1)(q^{p'-4} + 1)}{(q + 1)^2 d},$$

но $(p' - 2) + (p' - 4) = 2p' - 6 > p'$ при $p' \geq 7$; противоречие. Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

Пусть $p' = 7$, $q \neq 2$. Тогда $\pi_1(S) = \pi(q(q^6 - 1)(q^5 + 1)(q^4 - 1))$. По лемме 6 числа $q^{10} - 1$ и $q^6 - 1$ имеют примитивные делители p_1 и p_2 соответственно. Если $p_2 \mid (q^{10} - 1)$, то по лемме 7 получаем, что p_2 делит $(q^6 - 1, q^{10} - 1) = q^2 - 1$, что противоречит определению p_2 . Значит, p_2 не делит $q^{10} - 1$. Пусть в S есть элемент порядка $p_1 p_2$. Тогда он содержится в максимальном торе T группы S . Так как p_1, p_2 не делят $(q^2 - 1)(q^4 - 1)$, то порядок тора T должен содержать множители $(q^3 + 1)/(q + 1)$ и $(q^5 + 1)/(q + 1)$. По лемме 7 имеем $(q^6 - 1, q^{10} - 1) = q^2 - 1$, поэтому порядок тора T делится на

$$\frac{(q^3 + 1)(q^5 + 1)}{(q + 1)^2 d},$$

но $3 + 5 = 8 > 7 = p'$; противоречие с описанием порядков максимальных торов. Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

Если $(p', q) = (7, 2)$, то $\pi_1(S) = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Предположим, что в S есть элемент порядка $5 \cdot 11$. Тогда он содержится в максимальном торе T и порядок T делится на $(2^4 - 1)(2^5 + 1)/9$, но $4 + 5 = 9 > 7$; противоречие. Значит, в S нет элемента порядка $5 \cdot 11$; противоречие с леммой 1 (5).

Пусть $p' = 5, q \neq 2$. Тогда $\pi_1(S) = \pi(q(q^4 - 1)(q^3 + 1))$. По лемме 6 числа $q^6 - 1$ и $q^4 - 1$ имеют примитивные делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^3 + 1$. Если в S есть элемент порядка $p_1 p_2$, то он содержится в максимальном торе T . Порядок тора T должен содержать множители $(q^3 + 1)/(q + 1)$ и $(q^4 - 1)/(q + 1)$. По лемме 7 имеем $(q^4 - 1, q^6 - 1) = q^2 - 1$, поэтому порядок тора T делится на

$$\frac{(q^3 + 1)(q^4 - 1)}{(q + 1)^2 d},$$

но $3 + 4 = 7 > 5 = p'$; противоречие с описанием порядков максимальных торов. Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

Если $(p', q) = (5, 2)$, то по [5] $\mu_1(U_5(2)) = \{18, 15, 8\}$, поэтому $2 \cdot 5 = 10 \notin \omega(G)$; противоречие с леммой 1 (5).

4) Случай $S \cong {}^2A_{p'}(q), (q + 1) \mid (p' + 1), (p', q) \neq (3, 3), (5, 2)$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{r=1}^m \frac{q^{n_r} - (-1)^{n_r}}{q + 1},$$

где $\sum_{r=1}^m n_r = p' + 1$ и $d = (p' + 1, q + 1) = q + 1$.

Пусть $p' \geq 11$. Тогда $2(p' - 4) > p' + 1$. По лемме 6 числа $q^{2(p'-2)} - 1$ и $q^{2(p'-4)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^{p'-2} + 1$, p_2 делит $q^{p'-4} + 1$. Если в S есть элемент порядка $p_1 p_2$, то он содержится в максимальном торе T из S . Так как p_1, p_2 не делят

$$(q^{p'+1} - 1) \prod_{i=1}^{p'-5} (q^i - (-1)^i)(q^{p'-3} - 1)(q^{p'-1} - 1),$$

то порядок тора T должен содержать множители $(q^{p'-2} + 1)/(q + 1)$ и $(q^{p'-4} + 1)/(q + 1)$. По лемме 7 имеем $(q^{2(p'-2)} - 1, q^{2(p'-4)} - 1) = q^2 - 1$, поэтому порядок тора T делится на

$$\frac{(q^{p'-2} + 1)(q^{p'-4} + 1)}{(q + 1)^2 d},$$

но $(p' - 2) + (p' - 4) = 2p' - 6 > p'$ при $p' \geq 7$; противоречие с описанием порядков максимальных торов. Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

Пусть $p' = 7$. Так как $(q + 1) \mid (p' + 1) = 8$, то $q = 3, 7$. Имеем

$$\pi_1(S) = \pi(q(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^5 + 1)).$$

По лемме 6 числа $q^{10} - 1$ и $q^8 - 1$ имеют примитивные делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^5 + 1$. Пусть в S есть элемент порядка $p_1 p_2$. Тогда он содержится в максимальном торе T группы S . Так как p_1, p_2 не делят $(q^6 - 1)(q^4 - 1)$, то порядок тора T должен содержать множители $(q^5 + 1)/(q + 1)$ и $(q^8 - 1)/(q + 1)$. По лемме 7 имеем $(q^8 - 1, q^{10} - 1) = q^2 - 1$, поэтому порядок тора T делится на

$$\frac{(q^5 + 1)(q^8 - 1)}{(q + 1)^2 d},$$

но $5 + 8 = 13 > 7 = p'$; противоречие с описанием порядков максимальных торов. Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

Пусть $p' = 5$. Тогда $(q + 1) \mid (p' + 1) = 6$, т.е. $q = 5$. Имеем $\pi_1(S) = \{2, 3, 5, 7, 13, 31\}$. Пусть в S есть элемент порядка $7 \cdot 13$. Тогда он содержится в максимальном торе T из S . Порядок T делится на $(5^3 + 1)/(5 + 1) = 21$ и $(5^4 - 1)/(5 + 1) = 4 \cdot 26$, поэтому $|T|$ делится на $(5^3 + 1)(5^4 - 1)/6$, но $3 + 4 = 7 > 5$; противоречие. Значит, в S нет элемента порядка $7 \cdot 13$; противоречие с леммой 1 (5).

Пусть $p' = 3$ и $(q + 1) \mid (p' + 1) = 4$, т.е. $q = 3$, что противоречит ограничению на q .

5) Случай $S \cong B_n(q)$, $n = 2^m \geq 4$, q нечетно. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{i_r} \frac{q^{i_r} - 1}{q - 1} \prod_{j_r} (q^{j_r} + 1),$$

где $\sum i_r + \sum j_r = n$ и $d = (2, q - 1)$.

По лемме 6 числа $q^{2(n-1)} - 1$ и $q^{2(n-2)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^{n-1} + 1$, p_2 делит $q^{n-2} + 1$. Так как $(n - 1) + (n - 2) = 2n - 3 > n$ при $n > 3$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S . Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

6) Случай $S \cong B_{p'}(3)$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{2} \prod_{i_r} \frac{3^{i_r} - 1}{2} \prod_{j_r} (3^{j_r} + 1),$$

где $\sum i_r + \sum j_r = p'$.

По лемме 6 числа $3^{2p'} - 1$ и $3^{2(p'-1)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $3^{p'} + 1$, p_2 делит $3^{p'-1} + 1$. Так как $p' + (p' - 1) = 2p' - 1 > p'$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S . Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

7) Случай $S \cong C_n(q)$, $n = 2^m \geq 2$. Если $n = 2$, $q = 3^f$, $f > 1$, то утверждение леммы следует из леммы 4.

Пусть теперь $n \geq 4$.

Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{i_r} \frac{q^{i_r} - 1}{q - 1} \prod_{j_r} (q^{j_r} + 1),$$

где $\sum i_r + \sum j_r = n$ и $d = (2, q - 1)$.

Пусть $(n, q) \neq (4, 2)$. По лемме 6 числа $q^{2(n-1)} - 1$ и $q^{2(n-2)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^{n-1} + 1$, p_2 делит $q^{n-2} + 1$. Так как $(n - 1) + (n - 2) = 2n - 3 > n$ при $n > 3$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S ; противоречие с леммой 1 (5).

Если $(n, q) = (4, 2)$, то $\pi_1(S) = \{2, 3, 5, 7\}$. Если есть элемент порядка $5 \cdot 7$, то он содержится в максимальном торе T из S и порядок этого максимального тора делится на $2^3 - 1$ и $2^2 + 1$. Но $3 + 2 = 5 > 4 = n$; противоречие. Значит, в S нет элемента порядка $5 \cdot 7$; противоречие с леммой 1 (5).

8) Случай $S \cong C_{p'}(q)$, $q = 2, 3$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{i_r} \frac{q^{i_r} - 1}{q - 1} \prod_{j_r} (q^{j_r} + 1),$$

где $\sum i_r + \sum j_r = p'$ и $d = (2, q - 1)$.

По лемме 4 получаем $(p', q) \neq (3, 2)$. По лемме 6 числа $q^{2p'} - 1$ и $q^{2(p'-1)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^{p'} + 1$, p_2 делит $q^{p'-1} + 1$. Так как $p' + (p' - 1) = 2p' - 1 > p'$ при $n > 3$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S ; противоречие с леммой 1 (5).

9) Случай $S \cong D_{p'}(q)$, $p' \geq 5$, $q = 2, 3, 5$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{i_r} \frac{q^{i_r} - 1}{q - 1} \prod_{j_r, k_r} (q^{j_r} + 1)(q^{k_r} + 1),$$

где $\sum i_r + \sum (j_r + k_r) = p'$ и $d = (4, q^{p'} - 1)$.

Пусть $(p', q) \neq (5, 2)$. По лемме 6 числа $q^{2(p'-1)} - 1$ и $q^{2(p'-2)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^{p'-1} + 1$, p_2 делит $q^{p'-2} + 1$. Так как $(p' - 1) + (p' - 2) = 2p' - 3 > p'$ при $p' > 3$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S ; противоречие с леммой 1 (5).

Если $(p', q) = (5, 2)$, то $\pi_1(S) = \{2, 3, 5, 7, 17\}$. Если есть элемент порядка $7 \cdot 17$, то он содержится в максимальном торе T из S и порядок этого максимального тора делится на $2^3 - 1$ и $2^4 + 1$. Но $3 + 4 = 7 > 5 = p'$; противоречие. Значит, в S нет элемента порядка $7 \cdot 17$; противоречие с леммой 1 (5).

10) Случай $S \cong D_{p'+1}(q)$, $q = 2, 3$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{i_r} \frac{q^{i_r} - 1}{q - 1} \prod_{j_r, k_r} (q^{j_r} + 1)(q^{k_r} + 1),$$

где $\sum i_r + \sum (j_r + k_r) = p' + 1$ и $d = (4, q^{p'+1} - 1)$.

По лемме 4 $(p', q) \neq (3, 2)$. По лемме 6 числа $q^{2p'} - 1$ и $q^{2(p'-1)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^{p'} + 1$, p_2 делит $q^{p'-1} + 1$. Так как $p' + (p' - 1) = 2p' - 1 > p' + 1$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S . Значит, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

11) Случай $S \cong {}^2D_n(q)$, $n = 2^m \geq 4$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{i_r} \frac{q^{i_r} - (-1)^{i_r}}{q + 1} \prod_{j_r, k_r} (q^{j_r} + (-1)^{j_r})(q^{k_r} + (-1)^{k_r}),$$

где $\sum i_r + \sum (j_r + k_r) = n$ и $d = (4, q^n + 1)$.

Пусть $(n, q) \neq (4, 2)$. По лемме 6 числа $q^{2(n-1)} - 1$ и $q^{2(n-2)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $q^{n-1} + 1$, p_2 делит $q^{n-2} + 1$. Так как $(n - 1) + (n - 2) = 2n - 3 > n$ при $n > 3$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S ; противоречие с леммой 1 (5).

Если $(n, q) = (4, 2)$, то по [5] $\mu_1(S) = \{30, 21, 12, 9, 8\}$, поэтому в S нет элемента порядка $7 \cdot 5$; противоречие с леммой 1 (5).

12) Случай $S \cong {}^2D_n(2)$, $n = 2^m + 1$, $m \geq 2$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \prod_{i_r} \frac{2^{i_r} - (-1)^{i_r}}{3} \prod_{j_r, k_r} (2^{j_r} + (-1)^{j_r})(2^{k_r} + (-1)^{k_r}),$$

где $\sum i_r + \sum(j_r + k_r) = n$.

Пусть $(n, q) \neq (5, 2)$. По лемме 6 числа $2^{2n} - 1$ и $2^{2(n-2)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $2^n + 1$, p_2 делит $2^{n-2} + 1$. Так как $n + (n-2) = 2n-2 > n$ при $n > 2$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S ; противоречие с леммой 1 (5).

Если $(n, q) = (5, 2)$, то по [5] $\mu_1(S) = \{35, 33, 30, 24, 21, 20, 18, 14, 8\}$, поэтому в S нет элемента порядка $7 \cdot 11$; противоречие с леммой 1 (5).

13) Случай $S \cong {}^2D_{p'}(3)$, $5 \leq p' \neq 2^m + 1$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{d} \prod_{i_r} \frac{3^{i_r} - (-1)^{i_r}}{4} \prod_{j_r, k_r} (3^{j_r} + (-1)^{j_r})(3^{k_r} + (-1)^{k_r}),$$

где $\sum i_r + \sum(j_r + k_r) = p'$ и $d = (4, 3^{p'} + 1)$.

По лемме 6 числа $3^{2(p'-1)} - 1$ и $3^{2(p'-2)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $3^{p'-1} + 1$, p_2 делит $3^{p'-2} + 1$. Так как $(p'-1) + (p'-2) = 2p'-3 > p'$ при $p' > 3$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S ; противоречие с леммой 1 (5).

14) Случай $S \cong {}^2D_n(3)$, $n = 2^m + 1 \neq p'$, $m \geq 2$. Порядки максимальных торов T в S имеют вид

$$|T| = \frac{1}{4} \prod_{i_r} \frac{3^{i_r} - (-1)^{i_r}}{4} \prod_{j_r, k_r} (3^{j_r} + (-1)^{j_r})(3^{k_r} + (-1)^{k_r}),$$

где $\sum i_r + \sum(j_r + k_r) = n$.

По лемме 6 числа $3^{2n} - 1$ и $3^{2(n-2)} - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 делит $3^n + 1$, p_2 делит $3^{n-2} + 1$. Так как $n + (n-2) = 2n-2 > n$ при $n > 2$, то $p_1 p_2$ не может быть порядком полупростого элемента в S ; противоречие с леммой 1 (5).

15) Случай $S \cong G_2(q)$, $2 < q \equiv \varepsilon \pmod{3}$, $\varepsilon = \pm 1$. Максимальные торы T в S имеют следующие порядки:

$$(q-1)^2, \quad q^2-1, \quad q^2-q+1, \quad q^2+q+1, \quad (q+1)^2.$$

Пусть $q \neq 4$, $\varepsilon = 1$. По лемме 6 числа $q^2 - 1$ и $q^3 - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно. Так как $p_1 p_2$ не делит порядок максимального тора T , то в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

Если $q = 4$, то по [5] $\mu_1(S) = \{7 \cdot 3, 5 \cdot 3, 5 \cdot 2, 3 \cdot 4, 8\}$, поэтому в S нет элемента порядка $5 \cdot 7$; противоречие с леммой 1 (5).

Пусть $\varepsilon = -1$, $p_1 \in \pi(q-1)$. По лемме 6 число $q^6 - 1$ имеет примитивный простой делитель p_2 . Так как $p_1 p_2$ не делит порядок максимального тора T , то в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

16) Случай $S \cong {}^3D_4(q)$. Максимальные торы T в S имеют следующие порядки:

$$(q^3 + 1)(q + 1), \quad (q^3 - 1)(q + 1), \quad (q^3 - 1)(q - 1), \quad (q^3 + 1)(q - 1), \\ (q^2 + q + 1)^2, \quad (q^2 - q + 1)^2, \quad q^4 - q^2 + 1.$$

По лемме 4 имеем $q \neq 2$. Пусть $q \neq 4$. По лемме 6 числа $q^3 - 1$ и $q^6 - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно; в частности, p_1 не делит $q^2 - 1$, p_2 делит $q^3 + 1$, поэтому в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

Если $q = 4$, то $q^3 + 1 = 65$, $q^3 - 1 = 63$, поэтому в S нет элемента порядка $7 \cdot 13$; противоречие с леммой 1 (5).

17) Случай $S \cong F_4(q)$, q нечетно. Максимальные торы T в S имеют следующие порядки:

$$(q-1)^4, \quad (q^2 \pm 1)(q \pm 1)^2, \quad (q^2 - 1)^2, \quad (q^3 \pm 1)(q \pm 1), \quad (q+1)^4, \quad q^4 - 1, \quad q^4 + 1, \quad (q^2 + 1)^2.$$

По лемме 6 числа $q^6 - 1$ и $q^8 - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно, поэтому p_1 делит $q^3 + 1$, p_2 делит $q^4 + 1$. Таким образом, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

18) Случай $S \cong {}^2F_4(2)'$. По лемме 4 этот случай невозможен.

19) Случай $S \cong E_6(q)$. Пусть $d = (3, q - 1)$. Тогда максимальные торы T в S имеют следующие порядки:

$$\frac{(q-1)^6}{d}, \quad \frac{(q+1)(q-1)^5}{d}, \quad \frac{(q+1)^2(q-1)^4}{d}, \quad \frac{(q-1)^3(q^3-1)}{d}, \quad \frac{(q^2-1)^3}{d}, \\ \frac{(q^3-1)(q^2-1)(q \pm 1)}{d}, \quad \frac{(q^4-1)(q \pm 1)^2}{d}, \quad \frac{(q^2-1)^2(q+1)^2}{d}, \quad \frac{(q^3-1)^2}{d}, \\ \frac{(q^4 \pm 1)(q^2-1)}{d}, \quad \frac{(q^5-1)(q \pm 1)}{d}, \quad \frac{(q^3+1)(q^2 \pm 1)(q-1)}{d}, \quad \frac{(q^2+1)^2(q-1)^2}{d}, \\ \frac{(q^2+q+1)^2(q^2-1)}{d}, \quad \frac{(q^6-1)}{d}, \quad \frac{(q^2+q+1)^3}{d}, \quad \frac{(q^3+1)(q^2+q+1)(q+1)}{d}, \\ \frac{(q^4-q^2+1)(q^2+q+1)}{d}, \quad \frac{(q^6+q^3+1)}{d}, \quad \frac{(q^2+q+1)(q^2-q+1)^2}{d}.$$

По лемме 6 числа $q^{12} - 1$ и $q^8 - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно. Таким образом, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

20) Случай $S \cong {}^2E_6(q)$, $q > 2$. Пусть $d = (3, q + 1)$. Тогда максимальные торы T в S имеют следующие порядки:

$$\frac{(q+1)^6}{d}, \quad \frac{(q^2-1)(q+1)^4}{d}, \quad \frac{(q^2 \pm 1)^2(q+1)^2}{d}, \quad \frac{(q^3+1)(q+1)^3}{d}, \\ \frac{(q^2-1)^3}{d}, \quad \frac{(q^3+1)(q^2-1)(q \pm 1)}{d}, \quad \frac{(q^4-1)(q \pm 1)^2}{d}, \quad \frac{(q^2-1)^2(q-1)^2}{d}, \\ \frac{(q^3+1)^2}{d}, \quad \frac{(q^4 \pm 1)(q^2-1)}{d}, \quad \frac{(q^5+1)(q \pm 1)}{d}, \quad \frac{(q^3-1)(q^2 \pm 1)(q+1)}{d},$$

$$\frac{(q^2 - q + 1)^2(q^2 - 1)}{d}, \quad \frac{(q^6 - 1)}{d}, \quad \frac{(q^2 - q + 1)^3}{d}, \quad \frac{(q^3 - 1)(q^2 - q + 1)(q - 1)}{d},$$

$$\frac{(q^4 - q^2 + 1)(q^2 - q + 1)}{d}, \quad \frac{(q^6 - q^3 + 1)}{d}, \quad \frac{(q^2 + q + 1)^2(q^2 - q + 1)}{d}.$$

По лемме 6 числа $q^{12} - 1$ и $q^8 - 1$ имеют примитивные простые делители p_1 и p_2 соответственно. Таким образом, в S нет элемента порядка $p_1 p_2$; противоречие с леммой 1 (5).

ЛЕММА 11. Если $S \cong L_3(q)$ для нечетного q , то $q = 3$ и G – группа Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = FC$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением C . Предположим, что F – π_1 -группа. По лемме 1 (1) имеем $|\mu(F)| = 1$, что противоречит лемме 5. Значит, F – π_2 -группа, C – π_1 -группа.

Предположим сначала, что C разрешима. Тогда по лемме 1 (5) граф $GK(C)$ полный. Если $t \in \pi(q+1) \setminus \{2\}$, то по лемме 5 вершины p и t не смежны в $\pi_1(C)$, что противоречит лемме 1 (5). Значит, $\pi(q+1) = \{2\}$, откуда $q = 2^n - 1 = p$, n – простое число. При $n = 2$ имеем $q = 3$. Пусть $n \geq 3$. Тогда $(3, p-1) = 3$. При $n = 3$ имеем $q = 7$, что противоречит [12]. Поэтому можно считать, что $n \geq 5$. Тогда $p+1$ делится на 32 и по лемме 1 (4) C имеет нормальное 2-дополнение $O(C)$. Пусть $P \in \text{Syl}_3(O(C))$, $|P| = 3^m$. По лемме 1 (2) P циклическая. По аргументу Фраттини $C = O(C)N_C(P)$, откуда по лемме 5 порядок $|N_C(P)|$ делится на 2^{n+1} . Так как $N_C(P)/C_C(P)$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(P)$ и по теореме (23.3) из [4] $|\text{Aut } P| = 2 \cdot 3^{m-1}$, то $|C_C(P)|$ делится на 2^n . По лемме 1 (3) силовская 2-подгруппа в C циклическая или (обобщенная) группа кватернионов. Если силовская 2-подгруппа в C циклическая, то в C есть элемент порядка $2^n \cdot 3^m$, что противоречит лемме 5. Если силовская 2-подгруппа (обобщенная) кватернионная, то в C есть элемент порядка $2^{n-1} \cdot 3^m$, откуда $n = 2$; противоречие.

Предположим теперь, что C неразрешима. Из леммы 1 (5) следует, что 3 и 5 – единственная пара несмежных вершин в графе $GK(C)$. По лемме 5 либо $p = 3$ и $5 \mid (q+1)$, либо $p = 5$ и $3 \mid (q+1)$. Если $p = 3$ и $5 \mid (q+1)$, то $\pi(q+1) = \{2, 5\}$. По лемме 1 (5) либо $q+1 = 5 \cdot 4$, $q = 19$, либо $q+1 = 5 \cdot 8$, $q = 39$. Противоречие с тем, что q – степень 3. Если $p = 5$ и $3 \mid (q+1)$, то $\pi(q+1) = \{2, 3\}$. По лемме 1 (5) либо $q = 3 \cdot 4$, $q = 11$, либо $q+1 = 3 \cdot 8$, $q = 23$. Противоречие с тем, что q – степень 5.

Пусть $G = ABC$, где A, AB – нормальные подгруппы группы G , AB, BC – группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно. Из лемм 2, 3 следует, что B – циклическая группа порядка $(q^2 + q + 1)/(3, q-1)$, $GK(AC)$ – полный граф. По лемме 5 получаем, что $q = 2^n - 1 = p$, где n – простое число. Если $n = 2$, то $q = 3$. Тогда $\mu(G) = \{13, 3 \cdot 2, 8\}$, поэтому $\text{Exp } A = 8$, B – циклическая группа порядка 13, C – циклическая группа порядка 3, $C_A(C)$ элементарная абелева. По лемме 7.3 из [9] класс-nilпотентности A не больше 2. Отсюда по лемме 2 экспонента A не превосходит 4; противоречие. Значит, $n \geq 3$. Пусть $p \in \pi(C)$. Поскольку подгруппа C действует полурегулярно на $B \setminus \{1\}$, то $p^2 + p + 1 \equiv 3 \pmod{p}$, $p = 2$, что противоречит нечетности p . Поэтому $p \in \pi(A)$. Тогда по лемме 5 получаем, что $p+1 = 2^n \in \omega(C)$. По лемме 2 имеем $p(p+1) \in \omega(G)$; противоречие с леммой 5.

ПРИМЕР 1 (см. [9, предложение 3]). Существует конечная группа Фробениуса G с $\omega(G) = \omega(L_3(3))$. Действительно, пусть H – расширение группы порядка 2 при помощи S_4 такое, что силовская 2-подгруппа в H является обобщенной группой кватерни-

онов. Тогда $\mu(H) = \{6, 8\}$. По лемме 8 из [9] существует расширение G элементарной абелевой 13-группы при помощи H , которая является группой Фробениуса. Тогда $\mu(G) = \{6, 8, 13\} = \mu(L_3(3))$.

ЛЕММА 12. Если $S \cong U_3(q)$ для нечетного q , то $q = 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = FC$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением C . Предположим, что F – π_1 -группа. По лемме 1 (1) имеем $|\mu(F)| = 1$, что противоречит лемме 5. Значит, F – π_2 -группа, C – π_1 -группа.

Предположим сначала, что C разрешима. Тогда по лемме 1 (5) граф $GK(C)$ полный. Если $t \in \pi(q-1) \setminus \{2\}$, то по лемме 5 вершины p и t не смежны в $GK(C)$; противоречие. Значит, $\pi(q-1) = \{2\}$, откуда $q = 9$ или $q = 2^{2^n} + 1 = p$, $(3, p+1) = 3$. По предложению 4 из [9] $q \neq 9$. Если $q = 5$, то $\mu_1(G) = \{10, 8, 6\}$, откуда $15 \notin \omega(C)$, что противоречит полноте графа $GK(C)$. Итак, $q = 2^{2^n} + 1$, где $n \geq 2$. Тогда $q-1 = 2^{2^n}$ делится на 16 и лемма 1 (4) влечет, что C имеет нормальное 2-дополнение $O(C)$. Пусть $P \in \text{Syl}_3(O(C))$, $|P| = 3^m$. Из леммы 1 (2) следует, что P циклическая. По аргументу Фраттини $C = O(C)N_C(P)$, поэтому $|N_C(P)|$ делится на 2^{2^n+1} . Так как $N_C(P)/C_C(P)$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut } P$ и по теореме (23.3) из [4] $|\text{Aut } P| = 2 \cdot 3^{m-1}$, то $|C_C(P)|$ делится на 2^{2^n} . По лемме 1 (3) силовская 2-подгруппа из C циклическая или (обобщенная) группа кватернионов. Если силовская 2-подгруппа из C циклическая, то в C есть элемент порядка $2^{2^n} \cdot 3^m$, что противоречит лемме 5. Если силовская 2-подгруппа из C (обобщенная) кватернионная, то в C есть элемент порядка $2^{2^n-1} \cdot 3^m$, откуда $2^n = 2$, $n = 1$, но $n \geq 2$; противоречие.

Предположим теперь, что C неразрешима. Из леммы 1 (5) следует, что 3 и 5 – единственная пара несмежных вершин в графе $GK(C)$. По лемме 5 либо $p = 3$ и $5 \mid (q-1)$, либо $p = 5$ и $3 \mid (q-1)$. Если $p = 3$ и $5 \mid (q-1)$, то $\pi(q-1) = \{2, 5\}$. По лемме 1 (5) либо $q-1 = 5 \cdot 4$, $q = 21$, либо $q-1 = 5 \cdot 8$, $q = 41$. Противоречие с тем, что q – степень 3. Если $p = 5$ и $3 \mid (q-1)$, то $\pi(q-1) = \{2, 3\}$. По лемме 1 (5) либо $q-1 = 3 \cdot 4$, $q = 13$, либо $q-1 = 3 \cdot 8$, $q = 25$. Таким образом, $q = 25$. По лемме 5 имеем $\mu(C) = \{2 \cdot 5 \cdot 13, 16 \cdot 3 \cdot 13\}$, поэтому $16 \in \omega(C)$, что противоречит лемме 1 (5).

Пусть $G = ABC$, где A, AB – нормальные подгруппы группы G , AB, BC – группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно. Из лемм 2, 3 следует, что B – циклическая группа порядка $(q^2 - q + 1)/(3, q + 1)$, $GK(AC)$ – полный граф. По лемме 5 либо $q = 9$, либо $q = 2^{2^n} + 1 = p$. По предложению 4 из [9] $q \neq 9$. Пусть $p \in \pi(C)$. Поскольку подгруппа C действует полурегулярно на $B \setminus \{1\}$, имеем $p^2 - p + 1 \equiv 3 \pmod{p}$, $p = 2$, что противоречит нечетности p . Поэтому $p \in \pi(A)$. Тогда $p-1 = 2^{2^n} \in \omega(C)$. По лемме 2 имеем $p(p-1) \in \omega(G)$; противоречие с леммой 5.

ПРИМЕР 2 (В. Д. Мазуров). Существует конечная группа Фробениуса G с $\omega(G) = \omega(U_3(3))$. Действительно, пусть W – векторное пространство размерности 2 над полем F из 49 элементов, H – группа, порожденная матрицами

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

где α, β – элементы из F^* порядка 3 и 8 соответственно. Тогда H – неабелево полупрямое произведение $\langle a \rangle$ на $\langle b \rangle$. Группа $G = WH$ – группа Фробениуса с ядром W и дополнением H , причем $\omega(G) = \omega(U_3(3))$.

ЛЕММА 13. *Группа S не изоморфна $S_4(2^f)$ при $f > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $S \cong S_4(q)$, где q четно, $q > 2$. Пусть $G = FC$ – группа Фробениуса. Из леммы 1 (1) следует, что F нильпотентна, поэтому по лемме 7 из [10] $\mu(F) = \{q^2 + 1\}$, $\mu(C) = \{4, 2(q-1), 2(q+1), q^2 - 1\}$. По лемме 1 (3) имеем $2(q^2 - 1) \in \omega(C)$; противоречие со строением $\mu(C)$.

Пусть $G = ABC$ – двойная группа Фробениуса. Тогда леммы 2, 3 влекут, что B – циклическая группа порядка $q^2 + 1$, C – циклическая группа порядка, делящего $|B| - 1 = q^2$. Отсюда по лемме 7 из [10] $|C|$ делит 4 и $\mu(A) = \{q^2 - 1\}$. Если $|C| = 4$ и $t \in \pi(q-1)$, то по лемме 2 имеем $4t \in \omega(G)$; противоречие со строением $\mu(G)$. Пусть $|C| = 2$, $t_1 \in \pi(q-1)$, $t_2 \in \pi(q+1)$. Тогда по лемме 2 имеем $2t_1t_2 \in \omega(G)$; противоречие со строением $\mu(G)$.

ЛЕММА 14. *Группа S не изоморфна $S_4(q)$ при $(6, q) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $G = FC$ – группа Фробениуса. Из леммы 1 (1) следует, что F нильпотентна, поэтому по лемме 3 из [24] $\mu(F) = \{(q^2 + 1)/2\}$, $\mu(C) = \{(q^2 - 1)/2, p(q+1), p(q-1)\}$. Группа C действует полурегулярно на $F \setminus \{1\}$. Поэтому $|C|$ делит $|F \setminus \{1\}| = (q^2 - 1)/2$; противоречие со строением $\mu(C)$.

Пусть $G = ABC$ – двойная группа Фробениуса. По лемме 3 из [24] и леммам 2, 3 имеем $\mu(B) = \{(q^2 + 1)/2\}$, $\mu(AC) = \{(q^2 - 1)/2, p(q+1), p(q-1)\}$. Так как $|C|$ делит $|B| - 1$, то $|C|$ делит $(q^2 - 1)/2$, следовательно, $p \in \pi(A)$.

Пусть $p(q+1)/t \in \mu(A)$, где t – целое число. По описанию $\mu(C)$ и лемме 2 имеем $t(q-1)/2 \in \omega(C)$. По лемме 2 имеем

$$p \cdot \frac{q-1}{2} t \cdot \prod_{s \in \pi(A) \setminus \{p\}} s \in \omega(G),$$

откуда $t = 1, 2$. Если $t = 2$, то $\pi(A) = \{p\}$, $\mu(A) = \{p\}$, но $p(q+1)/2 \in \omega(A)$; противоречие. Итак, $t = 1$. Тогда $\pi(A) = \{2, p\}$, $q+1$ является степенью 2, поэтому $q = 2^n - 1 = p$, где n – натуральное число. Отсюда $\mu(A) = \{p(p+1)\}$, B – циклическая группа порядка $(p^2 + 1)/2$, C – циклическая группа порядка $(p-1)/2$. Докажем, что группа B простого порядка. Пусть это не так. Тогда p_1p_2 делит $|B|$, где p_1, p_2 – простые числа (возможно, одинаковые). Отсюда $|C|$ делит $p_1 - 1$, $|C|$ делит $p_2 - 1$, поэтому $p_1 - 1 = |C|k_1 = k_1(p-1)/2$, $p_2 - 1 = |C|k_2 = k_2(p-1)/2$, где k_1, k_2 – натуральные числа. Пусть $k_i = 1$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Тогда $p_i = (p+1)/2 = 2^{n-1}$, поэтому $|B|$ четен; противоречие. Итак, $k_1, k_2 \geq 2$. Тогда

$$\frac{p^2 + 1}{2} = |B| \geq p_1p_2 = \left(\frac{p-1}{2}k_1 + 1\right) \left(\frac{p-1}{2}k_2 + 1\right) \geq p^2;$$

противоречие. Таким образом, B простого порядка, т.е. $(p^2 + 1)/2$ – простое число. По лемме 8 (а) имеем $p = 3$; противоречие с условием.

Пусть $p(q-1)/t \in \mu(A)$, где t – целое число. По описанию $\mu(C)$ и лемме 2 имеем $t(q+1)/2 \in \omega(C)$. По лемме 2 имеем

$$p \cdot \frac{q+1}{2} t \cdot \prod_{s \in \pi(A) \setminus \{p\}} s \in \omega(G),$$

откуда $t = 1, 2$. Если $t = 2$, то $\pi(A) = \{p\}$, $\mu(A) = \{p\}$, но $p(q-1)/2 \in \omega(A)$; противоречие. Итак, $t = 1$. Тогда $\pi(A) = \{2, p\}$, $q-1$ является степенью 2, поэтому $q = 2^{2^n} + 1 = p$. Отсюда $\mu(A) = \{p(p-1)\}$, B – циклическая группа порядка $(p^2+1)/2$, C – циклическая группа порядка $(p+1)/2$. Докажем, что группа B простого порядка. Пусть это не так. Тогда $p_1 p_2$ делит $|B|$, где p_1, p_2 – простые числа (возможно, одинаковые). Отсюда $|C|$ делит $p_1 - 1$, $|C|$ делит $p_2 - 1$, поэтому $p_1 - 1 = |C|k_1 = k_1(p+1)/2$, $p_2 - 1 = |C|k_2 = k_2(p+1)/2$, где k_1, k_2 – натуральные числа. Пусть $k_i = 1$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Тогда $p_i = (p+3)/2 = 2(2^{2^n-2} + 1)$ – не простое число; противоречие. Итак, $k_1, k_2 \geq 2$. Тогда

$$\frac{p^2+1}{2} = |B| \geq p_1 p_2 = \left(\frac{p+1}{2}k_1 + 1\right) \left(\frac{p+1}{2}k_2 + 1\right) \geq p^2;$$

противоречие. Таким образом, B простого порядка, т.е. $(p^2+1)/2$ – простое число. По лемме 8(б) имеем $p = 3, 5$, поэтому по условию $p = 5$. Отсюда $\mu(A) = \{5 \cdot 4\}$, B – циклическая группа порядка 13, $C = \langle x \rangle$ – циклическая группа порядка 3. По [5] $\mu(AC) = \{12, 20, 30\}$. Из леммы 1(1) следует, что A нильпотентна, поэтому $A = O_2(A) \times O_5(A)$. Так как в AC есть элемент порядка 12, существует элемент $y \in O_2(A)$ такой, что $|y| = 4$, $xy = yx$. Так как в AC есть элемент порядка 15, существует элемент $z \in O_5(A)$ такой, что $|z| = 5$, $xz = zx$. Тогда $|xyz| = 60$, что противоречит строению $\mu(AC)$.

Теперь теорема следует из лемм 9–14.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69. № 2. P. 487–513.
- [2] Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 6. С. 787–797.
- [3] Кондратьев А. С., Мазуров В. Д. Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 41. № 2. С. 359–370.
- [4] Aschbacher M. Finite Group Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
- [5] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. An Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [6] Thompson J. G. Normal p -complements for finite groups // Math. Z. 1960. V. 72. № 2. P. 332–354.
- [7] Zassenhaus H. Kennzeichnung endlicher lineare Gruppen als Permutationsgruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. V. 11. P. 17–40.
- [8] Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. V. 11. P. 187–220.
- [9] Мазуров В. Д. Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по их множеству порядков элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41. С. 166–198.
- [10] Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Ч. П. Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 5. С. 567–586.
- [11] Мазуров В. Д. Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36. № 1. С. 36–53.
- [12] Lipschutz S., Shi W. Finite groups whose element orders do not exceed twenty // Progress in Natural Sci. 2000. V. 10. № 1. P. 11–21.
- [13] Shi W., Li H. L. A characteristic property of M_{12} and $PSU(6, 2)$ // Acta Math. Sin. 1989. V. 32. № 6. P. 758–764.
- [14] Shi W., Li H. L. A characteristic property of some sporadic simple groups // Chinese Ann. Math. Ser. A. 1993. V. 14. № 2. P. 144–151.

- [15] Shi W. The characterization of the sporadic simple groups by their element orders // Algebra Colloq. 1994. V. 1. № 2. P. 159–166.
- [16] Заварницин А. В. Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r + 1$ и $r + 2$ для простого r и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 6. С. 648–662.
- [17] Алеева М. Р. О композиционных факторах конечных групп с множеством порядков элементов как у группы $U_3(q)$ // Сиб. матем. ж. 2002. Т. 43. № 2. С. 249–268.
- [18] Белоногов В. А. Малые взаимодействия в группах $SL_3(q)$, $SU_3(q)$, $PSL_3(q)$ и $PSU_3(q)$ // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.
- [19] Zsigmondy H. Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3. P. 265–284.
- [20] Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1975.
- [21] Carter R. W. Conjugacy classes in the Weyl group // Compositio Math. 1972. V. 25. № 1. P. 1–59.
- [22] Seitz G. M. On the subgroup structure of classical groups // Commun. Algebra. 1982. V. 10. № 8. P. 875–885.
- [23] Deriziotis D. I. Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. Vorlesungen Fachb. Math. Univ. Essen., 1984. Heft 11.
- [24] Srinivasan B. The characters of the finite symplectic group $Sp(4, q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. № 2. P. 488–525.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail: aleeva@imm.uran.ru

Поступило
05.02.2002