Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, О проблеме М. Дзя об неэлементарных аменабельных группах в классе конечно-определенных групп, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 774–775

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:30:04

О ПРОБЛЕМЕ М. ДЭЯ ОБ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ АМЕНАБЕЛЬНЫХ ГРУППАХ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ ГРУПП

Р. И. Григорчук

Понятие аменабельной группы было введено фон Нейманом в 1929 г. Им было также установлено, что конечные и коммутативные группы аменабельны, а также, что класс AG аменабельных групп замкнут относительно операций перехода к подгруппе, факторгруппе, группового расширения и индуктивного предела.

Класс EG элементарных (аменабельных) групп был определен М. Дэем в 1957 г. поставив следующий вопрос: наименьший класс групп, содержащий конечные и коммутативные группы и замкнутый относительно перечисленных выше операций.

Долгое время группы из класса EG составляли единственно известные примеры аменабельных групп, что позволило М. Дэю в 1957 г. поставить следующий вопрос: верно ли, что классы AG и EG совпадают?

Отрицательный ответ на этот вопрос был дан в [2] (см. также [3]), где построена континуальная серия групп промежуточного роста между степенным и экспоненциальным, каждая из которых принадлежит разности $AG \setminus EG$.

В настоящее время понятие аменабельной группы начало широко использоваться в различных разделах математики и, в частности, в топологии. В связи с этим возник естественный вопрос о справедливости соотношения $AG = EG$, если ограничиться рассмотрением только конечно-определенных групп. Например, внимание к этому вопросу было недавно привлечено В. Люком на школе “Гипотеза о наличии нуля в спектре оператора Лапласа”, проходившей в Деаблоре (Швейцария) в марте 1996 г., причем кандидатом на контрпример к указанному выше равенству называлась группа Р. Томпсона, хорошо известная среди специалистов по теории групп и ее приложений.

Мы анонсируем отрицательное решение проблемы в классе конечно-определенных групп с помощью другого примера.

ТЕОРЕМА. Группа

$$G = \langle a, b, c, d, t \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = (ad)^4 = (adacac)^4 = 1, \\ t^{-1}at = aca, t^{-1}bt = d, t^{-1}ct = b, t^{-1}dt = c \rangle$$

является аменабельной, но неэлементарной аменабельной группой.

Доказательство этого утверждения основано на следующих соображениях. Пусть Γ есть α -группа из [4], порожденная элементами a, b, c, d порядка 2. В [3] доказано, что она, как и другие группы из конструкции, предложенной в этой работе, является группой промежуточного роста, а, следовательно, и аменабельной группой. В то же время из результатов работы [5] вытекает, что $\Gamma \notin EG$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00974, и фонда INTAS, грант № 94-3420.

Кроме того, в [3] доказано, что Γ является рекурсивно представимой группой, т.е. может быть задана с помощью рекурсивного множества определяющих соотношений. Тем самым, по теореме Хигмана Γ допускает вложение в конечно-определенную группу.

Более того, такая группа может быть предъявлена непосредственно, а именно, ею является группа G , описанная в теореме, ибо имеет место

Предложение. *Группа G изоморфна HNN-расширению*

$$\langle \Gamma, t \mid t^{-1}\Gamma t = \sigma(\Gamma) \rangle,$$

где $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$ — инъективный гомоморфизм, $\sigma: a \mapsto asa, b \mapsto d, c \mapsto b, d \mapsto c$.

Возможность представления G в виде указанного HNN-расширения вытекает из специального вида задания группы Γ образующими и соотношениями, найденного И. Г. Лысенком в [6].

Кроме того, имеет место точная последовательность $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Z \rightarrow 1$, где $N \triangleleft G$ — нормальная подгруппа, состоящая из элементов с ненулевой суммой показателей у порождающего t .

Аменабельность группы G вытекает из того, что всякая конечно-порожденная подгруппа N вкладывается в Γ , а ее неэлементарность следует из того, что G содержит подгруппу промежуточного роста.

Для конечно-определенных групп остается открытым вопрос Дэя о совпадении классов AG и NF (NF — класс групп, не содержащих свободной подгруппы с двумя образующими).

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: grigorich@class.mi.ras.ru

Поступило
05.07.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Day M. // J. Math. 1957. V. 1. P. 509–544.
2. Григорчук Р. И. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 28 № 1. № 1. С. 23–26.
3. Григорчук Р. И. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48 № 5. С. 939–985.
4. Григорчук Р. И. // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 53–54.
5. Chou C. // J. Math. 1980. V. 24. № 3. P. 396–406.
6. Лысенко И. Г. О системе определяющих соотношений группы Григорчука // Матем. заметки (в печати).