Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрин, О затягивании максимально комплексных циклов CR -подмногообразиями, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 776–777

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1891>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:10:15

О ЗАТЯГИВАНИИ МАКСИМАЛЬНО КОМПЛЕКСНЫХ ЦИКЛОВ CR-ПОДМНОГООБРАЗИЯМИ

А. В. Домрин

Хорошо известно, что в $\mathbb{C}^2$ существует вполне вещественный диск, граница которого совпадает с единичной окружностью $\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |w_1| = 1, w_2 = 0\}$. В качестве такого диска можно взять, например, график $\{(z, g(z)) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| \leq 1\}$ функции $g(z) = (1 - z\bar{z})\bar{z}(1 + iz\bar{z})$. В связи с теоремой единственности для CR-функций недавно был поставлен вопрос о существовании подобных примеров в $\mathbb{C}^{m+1}$, $m \geq 2$. А именно, существует ли диффеоморфное замкнутому $2m$ -мерному шару CR-подмногообразие (CR-размерности $m - 1$) в $\mathbb{C}^{m+1}$, граница которого совпадала бы с единичной сферой

$$\{(w_1, \dots, w_{m+1}) \in \mathbb{C}^{m+1} \mid |w_1|^2 + \dots + |w_m|^2 = 1, w_{m+1} = 0\}?$$

Основная цель настоящей заметки – дать (отрицательный) ответ на этот вопрос. Фактически будет доказано следующее более общее утверждение (где, как обычно, B^k и S^k обозначают k -мерный замкнутый шар и k -мерную сферу).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $m \geq 2$. Пусть $M^{2m} \subset \mathbb{C}^{m+1}$ есть $2m$ -мерное CR-многообразие (CR-размерности $m - 1$) и $D \in M$ – область, замыкание $\bar{D}$ которой диффеоморфно B^{2m} . Тогда $(2m - 1)$ -мерное подмногообразие $\partial D \subset \mathbb{C}^{m+1}$ не является максимально комплексным.

Напомним, что гладкое $(2m - 1)$ -мерное многообразие $\Gamma \subset \mathbb{C}^{m+1}$ называется *максимально комплексным*, если комплексная касательная плоскость $T_p^{\mathbb{C}}\Gamma = T_p\Gamma \cap iT_p\Gamma$ имеет комплексную размерность $m - 1$ в каждой точке $p \in \Gamma$. Ясно, что если Γ лежит на некоторой комплексной гиперповерхности в $\mathbb{C}^{m+1}$, то Γ максимально комплексно. Таким образом, утверждение 1 дает отрицательный ответ на поставленный выше вопрос.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Допустим, что подмногообразие ∂D максимально комплексно. Тогда $T_p^{\mathbb{C}}M = T_p^{\mathbb{C}}\partial D$ для всех $p \in \partial D$. Обозначим через n_p единичный вектор внешней нормали к ∂D (как подмногообразию M) в точке $p \in \partial D$, а через E – расслоение со слоем S^1 над M , слоем которого в точке $x \in M$ служит множество всех векторов единичной длины в пространстве $T_x M / T_x^{\mathbb{C}}M$. Расслоение E тривиально над $\bar{D}$ и $p \mapsto n_p$ есть его сечение над ∂D . Поскольку при $m \geq 2$ имеем $\pi_{2m-1}(S^1) = 0$, это сечение гладко продолжается на $\bar{D}$. Тем самым, получаем всюду отличное от 0 векторное поле на замкнутом $2m$ -мерном шаре $B^{2m} \subset \mathbb{R}^{2m}$ (диффеоморфном $\bar{D}$), которое направлено наружу на границе. Но, как хорошо известно (см., например, [1, § 6, лемма 3]), такого поля не существует. Полученное противоречие доказывает утверждение 1.

Следующее утверждение показывает, что топологически неэквивалентная шару область на CR-многообразии $M^{2m} \subset \mathbb{C}^{m+1}$ может быть ограничена максимально комплексным циклом. Мы построим пример с $m = 2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01218.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Существуют CR-многообразие $M^4 \subset \mathbb{C}^3$ (CR-размерности 1) и область $D \Subset M$, замыкание которой диффеоморфно $S^1 \times B^3$, такие, что ∂D является максимально комплексным подмногообразием в $\mathbb{C}^3$ (диффеоморфным $S^1 \times S^2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве M график

$$\{(z_1, z_2, f(z_1, z_2)) \in \mathbb{C}^3 \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \neq 0\}$$

некоторой функции f вида

$$f(z_1, z_2) = Q(|z_1|^2) \cdot \left((|z_1|^2 - 1)^2 + |z_2|^2 - \varepsilon^2 \right),$$

а в качестве D – часть этого графика, лежащую над областью

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid (|z_1|^2 - 1)^2 + |z_2|^2 - \varepsilon^2 < 0\},$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда подмногообразие $\partial D \subset \mathbb{C}^3$ лежит в плоскости $z_3 = 0$ и, следовательно, является максимально комплексным. Функцию $Q: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, входящую в определение f , будем считать C^∞ -гладкой и подберем ее так, что

(i) $Q \neq 0$ на $(0, +\infty)$,

(ii) функция $\gamma(t) = Q(t)\rho(t)$, где $\rho(t) = (t - 1)^2 - \varepsilon^2$, удовлетворяет $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in (0, +\infty)$

(ясно, что такие функции $Q(t)$ существуют).

Чтобы проверить, что M есть CR-многообразие, достаточно доказать, что вектор $(f_{\overline{z_1}}(z_1, z_2), f_{\overline{z_2}}(z_1, z_2))$ отличен от 0 в каждой точке $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ с $z_1 \neq 0$. (Здесь $f_{\overline{z_j}}$ есть частная производная f по $\overline{z_j}$). Но $f_{\overline{z_2}}(z_1, z_2) = Q(|z_1|^2) \cdot z_2 \neq 0$ всюду, где $z_2 \neq 0$ (согласно свойству (i) функции $Q(t)$), а для $z_2 = 0$ прямое вычисление дает, что $f_{\overline{z_1}}(z_1, 0) = z_1 \cdot \gamma'(|z_1|^2)$. Эта величина отлична от 0 при $z_1 \neq 0$ в силу свойства (ii) функции $Q(t)$.

Наконец, утверждения о том, что D и ∂D диффеоморфны $S^1 \times B^3$ и $S^1 \times S^2$ соответственно, вытекают из того, что область Ω диффеоморфна метрической ε -окрестности окружности $S^1 = \{(z_1, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = 1\}$ в $\mathbb{C}^2$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: domrin@mian.su

Поступило
28.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милнор Дж. Топология с дифференциальной точки зрения // Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.