Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Иванович, Замечание о сильно выпуклых и квазивыпуклых функциях, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 778–779

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1892>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 07:37:18

ЗАМЕЧАНИЕ О СИЛЬНО ВЫПУКЛЫХ И КВАЗИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

М. В. Иванович

В настоящей заметке показано, как исследование сильной (квази) выпуклости функции многих переменных сводится к исследованию сильной (квази) выпуклости функции одной переменной.

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – непустое выпуклое множество, $J(u)$ – действительная функция, определенная на U . Обозначим

$$V_J(u, v; \lambda) = \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v) - J(\lambda u + (1 - \lambda)v),$$

$$Q_J(u, v; \lambda) = \max\{J(u), J(v)\} - J(\lambda u + (1 - \lambda)v),$$

$$\tau(u, v; \lambda) = \lambda(1 - \lambda)\|u - v\|^2,$$

где $u, v \in U$, $\lambda \in [0, 1]$.

Как известно, функция $J(u)$ (квази) выпукла на U , если $(Q_J(u, v; \lambda) \geq 0)$ $V_J(u, v; \lambda) \geq 0$ при всех $u, v \in U$, всех $\lambda \in [0, 1]$.

Выпуклая функция, очевидно, квазивыпукла. Важные подклассы образуют сильно выпуклые (СВ) и сильно квазивыпуклые функции (СКВ) [1], [2]. Функция $J(u)$ называется *сильно (квази) выпуклой* на U , если существует постоянная ($s > 0$) $r > 0$ такая, что для любых $u, v \in U$, $\lambda \in [0, 1]$ выполняется

$$(Q_J(u, v; \lambda) \geq s\tau(u, v; \lambda)) \quad V_J(u, v; \lambda) \geq r\tau(u, v; \lambda).$$

Класс СКВ функций является расширением класса СВ функций.

ПРИМЕР 1. Функция $g_1(t) = \sqrt{(t+a)^2 + b - a^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a^2 > 0$, будет СВ на $[0, c]$, $c > 0$, с постоянной

$$r = \frac{b - a^2}{2(\max\{g_1(0), g_1(c)\})^3},$$

так как $g_1''(t) \geq 2r$ [3, с. 185]. Следовательно, $g_1(t)$ СКВ с постоянной $s = r$. Непосредственно проверяется, что $g_1(t)$ СКВ с постоянной

$$s_1 = \frac{1}{2 \max\{g_1(0), g_1(c)\}}.$$

ПРИМЕР 2. Функция $g_2(t) = |t + a|$ СКВ на $[0, c]$, $c > 0$, с постоянной $s_2 = 1/c$, но не СВ.

Как известно, $J(u)$ тогда и только тогда (квази) выпукла на $U \subseteq \mathbb{R}^n$, когда для произвольных фиксированных $u, v \in U$ функция $f(\lambda) = J(v + \lambda(u - v))$ (квази) выпукла на $[0, 1]$.

В [3, с. 188] предлагается доказать, что функция $J(u)$ СВ на U тогда и только тогда, когда $f(\lambda)$ является СВ на $[0, 1]$ с одной и той же для всех $u, v \in U$ постоянной сильной выпуклости. Это утверждение не имеет места. Так, например, функция $J(u) = \|u\|^2$ СВ на $\mathbb{R}^n$ с константой сильной выпуклости $r = 1$, а функция $f(\lambda) = \|v + \lambda(u - v)\|^2$ СВ с константой $r = \|u - v\|^2$, зависящей от u, v .

Однако, нетрудно показать, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Функция $J(u)$ сильно (квази) выпукла на U тогда и только тогда, когда функция

$$g(t) = J\left(v + \frac{t}{\|u - v\|}(u - v)\right)$$

является сильно (квази) выпуклой на $[0, \|u - v\|]$ с одной и той же для всех $u, v \in U$, $u \neq v$, постоянной.

ТЕОРЕМА 2. Евклидова норма $J(u) = \|u\|$ СКВ на всяком ограниченном выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$.

Действительно, пусть $d/2$ – радиус шара с центром в нуле, который содержит U , и пусть $u, v \in U$, $u \neq v$. Полагая $c = \|u - v\|$, $a = \langle v, u - v \rangle / \|u - v\|$, $b = \|v\|^2$, имеем

$$g(t) = \sqrt{(t + a)^2 + b - a^2}, \quad t \in [0, c].$$

По неравенству Коши–Буняковского $b - a^2 \geq 0$. Тогда если $b - a^2 > 0$, то функция $g(t) = g_1(t)$ СКВ на $[0, c]$ с постоянной $s_1(u, v) = 1/(2 \max\{\|u\|, \|v\|\})$ (пример 1). Если $b - a^2 = 0$, то в силу примера 2 $g(t) = g_2(t)$ СКВ на $[0, c]$ с постоянной $s_2(u, v) = 1/\|u - v\|$. Поскольку $s_1(u, v) \geq 1/d$, $s_2(u, v) \geq 1/d$, то $g(t)$ СКВ с постоянной $s = 1/d$ на $[0, \|u - v\|]$, $u \neq v$. Итак, по теореме 1 норма СКВ на U с постоянной $s = 1/d$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Евклидова норма не СВ на U ($\text{int } U \neq \emptyset$) и не СКВ, если U – неограниченное множество. Другим способом СКВ нормы на ограниченном множестве доказана в [4].

Университет Банья Лука

Поступило
13.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б. Т. // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 2. С. 287–290.
2. Кораблев А. И. // Исслед. по прикл. матем. № 8. Казань, 1980. С. 3–8.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
4. Jovanović M. V. // Radovi Matematički. 1990. V. 6. P. 215–220.