Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Парфенов, Об одном подходе в теории интерполяции в гильбертовых пространствах аналитических функций, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 780–782

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1893>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:37:09

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ В ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

О. Г. Парфенов

1. Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, H^2 – класс Харди в $\mathbb{D}$. Напомним, что $f \in H^2$, если f аналитична в $\mathbb{D}$ и

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^2 dm(z) < \infty,$$

$\mathbb{T}$ – единичная окружность, m – мера Лебега на $\mathbb{T}$.

Шапиро и Шилдс в работе [1] доказали очень важный результат об интерполяции в H^2 . Напомним этот результат. Пусть $E = \{z_n\}_1^\infty$ – множество в $\mathbb{D}$, причем $\sum_{n=1}^\infty (1 - |z_n|) < \infty$. Тем самым определены произведения Бляшке:

$$B_n(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^\infty (z - z_k)(1 - z\bar{z}_k)^{-1} |z_k| z_k^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Множество E удовлетворяет условию Карлесона (C), если

$$\inf_n |B_n(z_n)| > 0. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть E удовлетворяет условию (C). Тогда для любой $f \in H^2$

$$\sum_{n=1}^\infty |f(z_n)|^2 (1 - |z_n|^2) < \infty. \quad (2)$$

Условие (2) называется *условием Карлесона–Ньюмена* (CN). Теорема Шапиро–Шилдса показывает, что (C) $\implies$ (CN).

В данной работе приводится новое доказательство этой теоремы, основанное на интерполяции на конечных подмножествах рациональными функциями. План работы такой: в п. 2 мы приводим краткие сведения об интерполяции рациональными функциями в H^2 , в п. 3 дано доказательство теоремы 1, п. 4 содержит некоторые обобщения.

2. Пусть $\{z_k\}_1^N$ – конечное множество в $\mathbb{D}$. Рассмотрим подпространство в H^2 , натянутое на функции

$$\varphi_k(z) = (1 - z\bar{z}_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Обозначим это подпространство L_N . Обозначим P_N ортогональный проектор в H^2 на подпространство L_N . Имеет место

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95–01–00348.

ТЕОРЕМА 2 (см. [2]). Оператор P_N является интерполяционным, т.е. для любой $f \in H^2$

$$(P_N f)(z_k) = f(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Приведем аналог формулы Лагранжа для интерполяции с помощью L_N . Вместо функций φ_k удобней взять систему функций

$$\psi_k(z) = \frac{(1 - |z_k|^2)^{1/2}}{1 - z\bar{z}_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{z - z_i}{1 - z\bar{z}_i} = \frac{(1 - |z_k|^2)^{1/2}}{1 - z\bar{z}_k} b_k(z).$$

Имеем

$$\psi_k(z_i) = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ c_k \neq 0, & k = i. \end{cases}$$

Отсюда получим представление оператора P_N :

$$(P_N f)(z) = \sum_{k=1}^N \frac{f(z_k)}{b_k(z_k)} (1 - |z_k|^2)^{1/2} \frac{b_k(z)}{1 - z\bar{z}_k}. \quad (3)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточно установить, что для множества $\{z_n\}_1^\infty$, удовлетворяющего условию (C), справедлива равномерная по N оценка

$$\sum_{n=1}^N |f(z_n)|^2 (1 - |z_n|^2) \leq c_f < \infty. \quad (4)$$

Смысл оценки (4) состоит в том, что оператор вложения $J_N: H^2 \rightarrow \ell^2(E_N, \mu_N)$, $E_N = \{z_n\}_1^N$, $\mu_N(z_n) = (1 - |z_n|^2)$, ограничен, и для норм J_N имеем

$$\sup_n \|J_N\| \leq C < \infty. \quad (5)$$

Выберем в качестве базиса H^2 систему функций $\{\psi_k\}_1^N \cup \{g_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$ – базис ядра оператора J_N . В этом базисе условие (5) принимает вид

$$\left| \sum_{k,i=1}^N \frac{f(z_k) \overline{f(z_i)}}{1 - z_k \bar{z}_i} [(1 - |z_k|^2)(1 - |z_i|^2)]^{1/2} \right| \leq C \|f\|^2. \quad (6)$$

Из теоремы 2 и формулы (3) имеем оценку

$$\left| \sum_{k,i=1}^N \frac{f(z_k) \overline{f(z_i)}}{1 - z_k \bar{z}_i} \frac{[(1 - |z_k|^2)(1 - |z_i|^2)]^{1/2}}{b_k(z_k) \overline{b_i(z_i)}} \right| \leq \|f\|^2. \quad (7)$$

В силу условия Карлесона и очевидной оценки имеем

$$\inf_n |b_n(z_n)| \geq \inf_n |B_n(z_n)| > 0. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует (6).

4. В данном пункте приведем обобщение теоремы 2 на любые гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром. Напомним, что функциональное гильбертово пространство $X^2(G)$ имеет воспроизводящее ядро $R(z, w)$, если для $z \in G$ и любой $f \in X^2(G)$ $f(z) = (f(\cdot), R(\cdot, z))_{X^2(G)}$. Например, для H^2 воспроизводящее ядро есть функция $(1 - z\bar{w})^{-1}$.

Пусть $\{z_k\}_1^N$ — произвольное множество в G . Рассмотрим подпространство в $X^2(G)$, натянутое на систему функций $\{R(\cdot, z_k)\}_1^N$. Обозначим это подпространство L_N . Обозначим P_N ортопроектор в $X^2(G)$ на L_N .

ТЕОРЕМА 3. Оператор P_N является интерполяционным, т.е. для любой $f \in X^2(G)$

$$(P_N f)(z_k) = f(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I_N f$ — интерполяционный многочлен f по системе функций $\{R(\cdot, z_k)\}_1^N$. В силу линейной независимости этой системы многочлен $I_N f$ существует и притом единственный. Имеем

$$(I_N f - f, R(\cdot, z_k))_{X^2(G)} = (I_N f)(z_k) - f(z_k) = 0,$$

$k = 1, \dots, N$, что и доказывает теорему 3.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — множество единственности для $X^2(G)$, т.е. из того, что $f \in X^2(G)$ и $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, следует, что $f = 0$. Тогда последовательность интерполяционных многочленов $\{I_N f\}_{N=1}^\infty$ сходится к f в $X^2(G)$ и, следовательно, равномерно внутри G .

В частности, для H^2 получим такой результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{z_n\}_1^\infty$ — множество в $\mathbb{D}$ и $\{I_N f\}_1^\infty$ — последовательность интерполяционных многочленов некоторой функции $f \in H^2$, построенная по формуле (3).

а) Если $\sum_{n=1}^\infty (1 - |z_n|) = \infty$, то $I_N f \rightarrow f$ при $N \rightarrow \infty$ в пространстве H^2 .

б) Если $\sum_{n=1}^\infty (1 - |z_n|) < \infty$ и $B(z)$ — произведение Бляшке, построенное по узлам $\{z_n\}_1^\infty$, $L = BH^2$ и P — ортопроектор на подпространство $H^2 \ominus BH^2$, то $I_N f \rightarrow Pf$ при $N \rightarrow \infty$ в пространстве H^2 .

Псковский педагогический институт

Поступило
28.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shapiro Y. S., Shields A. L. // Amer. J. Math. 1961. V. 83. № 2. P. 513–532.
2. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.