Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Аналогии неравенства братьев Мар-
ковских для полиномов на кубе в $\mathbb{R}^m$, *Матем. за-
метки*, 1996, том 60, выпуск 5, 783–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1894>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:33:40

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА БРАТЬЕВ МАРКОВЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ НА КУБЕ В $\mathbb{R}^m$

В. И. Скалыга

1. Введение. Рассмотрим известное неравенство А. А. и В. А. Марковых для полиномов n -ой степени от одной переменной [1, с. 281].

Если для полинома $P_n(x)$, $|P_n(x)| \leq 1$ при $x \in [-1, 1]$, то для тех же x и k -ой производной $P_n^{(k)}(x)$ полинома $P_n(x)$ справедливо неравенство

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq \frac{n^2(n^2 - 1) \cdots (n^2 - (k - 1))}{3 \cdots (2k - 1)} = T_n^{(k)}(1), \quad (1)$$

где $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ — многочлен Чебышева.

Неравенство (1) при $k = 1$ доказано А. А. Марковым, при $k \geq 2$ — В. А. Марковым.

В работе [2] неравенство А. А. Маркова с той же константой n^2 доказано для полиномов n -ой степени от m переменных

$$P_n(x) = P_n(x_1, \dots, x_m) = \sum a_{i_1, \dots, i_m} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} \quad \left(\sum_{j=1}^m i_j \leq n \right), \quad (2)$$

рассматриваемых на единичном шаре в пространстве $\mathbb{R}_{l_2}^m$ с евклидовой нормой

$$\|x\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2}.$$

В работе [3] неравенство А. А. Маркова обобщено для выпуклых компактов $\mathbb{R}_{l_2}^m$ с константой $4n^2/d$, где d — диаметр максимального шара, содержащегося в компакте.

В настоящей работе приводятся аналоги неравенства (1) для полиномов вида (2) на кубе в пространстве $\mathbb{R}_{l_2}^m$ и $\mathbb{R}_{l_1}^m$. Норма в $\mathbb{R}_{l_1}^m$ задается следующей формулой:

$$\|x\|_{l_1} = \sum_{i=1}^m |x_i|.$$

2. Вспомогательные леммы. В последующих двух леммах будут рассматриваться полиномы $P_n(x)$ от одной переменной x .

ЛЕММА 1. Пусть для полинома $P_{n-2}(x)$ при $x \in [-1, 1]$

$$|(1 - x^2)P_{n-2}(x)| \leq 1. \quad (3)$$

Тогда

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_{n-2}(x)| \leq \frac{n^2 - 1}{3}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-16021.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_{n-1}(x) = T'_n(x)/n = \sin n\nu / \sin \nu$, где $\nu = \arccos x$. Напишем для $P_{n-2}(x)$ интерполяционную формулу Лагранжа

$$\begin{aligned} P_{n-2}(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{U_{n-1}(x)P_{n-2}(x_i)}{U'_{n-1}(x_i)(x-x_i)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \frac{(1-x_i^2)P_{n-2}(x_i)U_{n-1}(x)}{x-x_i}, \end{aligned}$$

где $x_i = \cos(i\pi/n)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) — нули полинома $U_{n-1}(x)$. Пусть $x_{n-1} \leq x \leq x_1$. Тогда

$$1 - x^2 \geq \sin^2 \frac{\pi}{n} \geq \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{n^2} = \frac{4}{n^2}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) для этих x следует неравенство

$$|P_{n-2}(x)| \leq \frac{n^2}{4}.$$

Пусть $1 \geq x > x_1$. Тогда

$$|P_{n-2}(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{U_{n-1}(x)}{x-x_i} = \frac{1}{n} U'_{n-1}(x) \leq \frac{1}{n} U'_{n-1}(1) = \frac{n^2-1}{3},$$

так как максимум модуля производных полинома Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ достигается только на концах отрезка и равен правой части неравенства (1) [1, с. 286]. Для $-1 \leq x < x_{n-1}$ доказательство аналогично.

ЛЕММА 2. Пусть для полинома $P_{2n-2}(x)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leq P_{2n-2}(x_i), \quad x_i = \cos \frac{i\pi}{2n} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n-1), \\ \max_{x \in [-1, 1]} |(1-x^2)P_{2n-2}(x)| \leq 1. \end{aligned}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_{2n-2}(x)| \leq n^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x \in [x_{2n-1}, x_1]$ доказательство такое же, как и в лемме 1. Пусть $x \in [-1, 1] \setminus [x_{2n-1}, x_1]$ и $P_{2n-2}(x) > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} P_{2n-2}(x) &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i-1} \frac{(1-x_i^2)P_{2n-2}(x_i)U_{2n-1}(x)}{x-x_i} \\ &\leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{(1-y_i^2)P_{2n-2}(y_i)U_{2n-1}(x)}{x-y_i} \\ &\leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{U_{2n-1}(1)}{1-y_i}, \end{aligned}$$

где $y_i = \cos(2i-1)\pi/2n$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Пусть $z_i = \cos(i\pi/n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{U_{2n-1}(1)}{1-y_i} &= \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{i=1}^{2n-1} \frac{U_{2n-1}(1)}{1-y_i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{U_{2n-1}(1)}{1-z_i} \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ U'_{2n-1}(1) - \frac{U_{2n-1}(1)}{U_{n-1}(1)U'_{n-1}(1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \left[\frac{2n(4n^2-1)}{3} - \frac{2n(n^2-1)}{3} \right] = n^2. \end{aligned}$$

Пусть $P_{n^2-2}(x) < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |P_{2n-2}(x)| &= -P_{2n-2}(x) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i-1} \frac{(1-x_i^2)P_{2n-2}(x_i)U_{2n-1}(x)}{x-x_i} \\ &\leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{U_{2n-1}(1)}{1-z_i} = \frac{n^2-1}{3}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. Оценки норм производных полиномов на кубе в пространствах $\mathbb{R}_{l_1}^m$ и $\mathbb{R}_{l_2}^m$. Пусть X и Y – банаховы пространства и $\mathcal{L}(X, Y)$ – пространство непрерывных линейных отображений X в Y . Введем обозначения

$$\underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}_{l_i}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}_{l_i}^m, \dots, \mathcal{L}(\mathbb{R}_{l_i}^m, \mathbb{R}) \dots))}_{k \text{ раз}} = \mathcal{L}_i^k \quad (i = 1, 2),$$

$\nabla P_n(\hat{x})$, $\nabla^k P_n(\hat{x})$ – производные полинома $P_n(x)$ соответственно первого и k -го порядка в точке $\hat{x}$.

ТЕОРЕМА. Пусть полином $P_n(x)$ вида (2) на кубе Q , где $Q = \{x \in \mathbb{R}^m : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, m\}$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq 1$, тогда для его производных при $x \in Q$ справедливы следующие неравенства

$$\|\nabla P_n(x)\|_{\mathcal{L}_1^1} \leq n^2, \quad (5)$$

$$\|\nabla^2 P_n(x)\|_{\mathcal{L}_1^2} = \max_{1 \leq i, j \leq m} \left| \frac{\partial^2 P_n(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \frac{n^2(n^2-1)}{3}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\mathcal{L}_i^k$ следует, что $\mathcal{L}_2^1 = (\mathbb{R}_{l_2}^m)^* = \mathbb{R}_{l_2}^m$, $\mathcal{L}_1^1 = (\mathbb{R}_{l_1}^m)^* = \mathbb{R}_{\overline{m}}^m$, где $\mathbb{R}_{\overline{m}}^m$ – пространство с нормой $\|x\|_{\overline{m}} = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$. Равенство в левой части (6) нетрудно доказать из определения нормы оператора [4]. Пусть $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m) \in Q$ и $|\hat{x}_{i_1}| = \max_{1 \leq i \leq m} |\hat{x}_i|$. Пусть l – отрезок прямой $\{k_1 x_{i_1}, k_2 x_{i_1}, \dots, k_m x_{i_1} \mid (x_{i_1} \in [-1, 1])\}$, проходящий через точку 0 и $\hat{x}$ ($k_i = \hat{x}_i / \hat{x}_{i_1}$) и принадлежащий Q . Введем замену переменных $x_i = \cos \nu_i$. Тогда при $i \neq j$ из неравенства Бернштейна следует неравенство

$$|P''_{n\nu_i\nu_j}(x)| = |\sin \nu_i \cdot \sin \nu_j P''_{nx_i x_j}(x)| \leq n(n-1). \quad (7)$$

Для $x \in l$ $|x_i| \leq |x_{i_1}|$, поэтому из (7) вытекает неравенство

$$|(1 - x_{i_1}^2 P''_{n x_i x_j}(x))| \leq n(n-1), \quad x \in \{k_1 x_{i_1}, k_2 x_{i_1}, \dots, k_m x_{i_1}\} \quad (x_{i_1} \in [-1, 1]). \quad (8)$$

В силу леммы 1 из (8) следует (6), так как при $i = j$ неравенство (6) следует непосредственно из (1).

Для доказательства неравенства (5) потребуется обобщенное неравенство Бернштейна, полученное в работе [5]. Приведем его формулировку.

Пусть V – центрально-симметричный выпуклый компакт в $\mathbb{R}_{l_2}^m$, V^* – полярное множество V . Для $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\|z\|_V = \sup_{t \in V^*} \left| \sum_{i=1}^m t_i z_i \right|.$$

Целая функция $f(z)$ имеет степень v , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется A_ε такое, что

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon \exp\{(1 + \varepsilon)\|z\|_{V^*}\}$$

для каждого $z \in \mathbb{C}^m$. Множество всех целых функций степени v , ограниченных на $\mathbb{R}^m$, обозначается $B(V)$. Пусть $\sigma > 0$ и $g \in B(\sigma V)$. Тогда имеет место неувлучшаемое неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_{l_2}^m} \|\nabla g(x)\|_{\mathbb{R}_{l_2}^m} \leq \sigma \frac{\text{diam}(V)}{2} \sup_{x \in \mathbb{R}_{l_2}^m} |g(x)|, \quad (9)$$

где $\text{diam}(V) = \max_{x, y \in V} \|x - y\|_{\mathbb{R}_{l_2}^m}$.

Нетрудно проверить, что тригонометрический полином $P_n(\cos \nu_1, \dots, \cos \nu_m)$ является целой функцией степени nE , где E – шар радиуса единица в пространстве $\mathbb{R}_{l_1}^m$: $E = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m |x_i| \leq 1\}$. Диаметр шара E в метрике l_2 равен 2, поэтому из (9) для полинома $P_n(x)$ следует неравенство

$$\sum_{i=1}^m [\sin \nu_i P'_{n x_i}(x)]^2 \leq n^2. \quad (10)$$

Из (10) для x , принадлежащего отрезку l , следует неравенство

$$(1 - x_{i_1}^2) \sum_{i=1}^m [P'_{n x_i}(x)]^2 \leq n^2. \quad (11)$$

В силу леммы 2 из (11) следует (5). Теорема доказана.

В дальнейших следствиях предполагается, что $|P_n(x)| \leq 1$ при $x \in Q$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для полинома $P_n(x)$ при $x \in Q$ справедливы неравенства

$$\|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}_2^k} \leq n^2(n-1)^2 \dots (n-(k-1))^2,$$

$$N_k(x) = \|\nabla^k P_n(x)\|_{\mathcal{L}_1^k} = \max_{x \in Q} \left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \right| \quad \left(i_j \geq 0, \sum_{j=1}^m i_j = k \right).$$

При $k = 2p$

$$N_k(x) \leq (1/3)^p \prod_{i=0}^{p-1} (n-2i)^2 ((n-2i)^2 - 1) = M_{2p},$$

при $k = 2p-1$ $N_k(x) \leq M_{2p}(n-2k)^2$.

Доказательство следует из последовательного применения теоремы к полиному $\langle \nabla^k P_n(x), [h_1, h_2, \dots, h_k] \rangle$, его градиенту $\langle \nabla^{k+1} P_n(x), [h_1, h_2, \dots, h_k] \rangle$ или гессиану $\langle \nabla^{k+2} P_n(x), [h_1, h_2, \dots, h_k] \rangle$. Здесь h_j ($j = 1, 2, \dots, k$) – произвольные фиксированные нормированные векторы из $\mathbb{R}_{l_i}^m$, $k \geq 1$.

Следствие 2. Пусть A – линейный оператор из $\mathbb{R}_{l_i}^m$ в $\mathbb{R}_{l_i}^m$ ($i = 1, 2$), $T = AQ$, $y = Ax$, $x \in Q$. Пусть $B_n(y)$ – полином вида (2) и $|B_n(y)| \leq 1$ при $y \in T$. Тогда для полинома $B_n(y)$ справедливо неравенство

$$\|A^* \nabla B_n(y)\|_{\mathcal{L}_i^1} \leq n^2,$$

и если A невырождено, то

$$\|\nabla B_n(y)\|_{\mathcal{L}_2^1} \leq \left(\min_{1 \leq j \leq m} \lambda_j \right)^{-1/2} \cdot n^2,$$

где λ_j – собственные значения матрицы AA^* .

Подобные неравенства можно распространить и на последующие производные, учитывая следствие 1.

Следствие 3. Пусть при $x \in Q$ $|P_{2n}(x)| \leq 1$ и для фиксированных i, j ($i \neq j$)

$$\frac{\partial^2 P_{2n}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0.$$

Тогда

$$\max_{x \in Q} \frac{\partial^2 P_{2n}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \leq 2n^3(2n-1).$$

КБ “Аметист”

Поступило
16.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 2. М.: АН СССР, 1954.
2. Kellog O. D. // Math. Zeit. 1927. V. 27. № 1. P. 55–66.
3. Don R. // J. Approx. Theory. 1974. V. 11. № 3.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
5. Ганзбург М. И. // УМН. 1979. Т. 34. № 1. С. 225–226.