Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Скляров, Об одном полиномиальном неравенстве Г. Фройда, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 788–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:42:01

ОБ ОДНОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ Г. ФРОЙДА

В. П. Скляр

В 1971 году Г. Фройдом в [1] было доказано следующее утверждение: *если* $|p_n(x)| \leq e^{x^2/2}$ *при* $|x| \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{2n}$, *то для всех* x $|p_n(x)| \leq C_1(\varepsilon)e^{x^2/2}$.

Здесь $p_n(x)$ – любой алгебраический многочлен степени не выше n , $C_1(\varepsilon)$ – положительное число, которое может зависеть разве лишь от ε , а $\varepsilon > 0$ может быть любым. Очевидно, что это утверждение эквивалентно неравенству

$$\max_{-\infty \leq x \leq \infty} |p_n(x)|e^{-x^2/2} \leq C_1(\varepsilon) \max_{|x| \leq R_n} |p_n(x)|e^{-x^2/2}, \quad (1)$$

где $R_n = (1 + \varepsilon)\sqrt{2n}$. В начале 80-х годов нашего столетия Х.Н. Маскар и Е.Б. Сафф получили усиленные аналоги результата Фройда для различных весов и пространств. В частности, для этого случая ими было доказано, что неравенство (1) можно заменить равенством

$$\max_{-\infty \leq x \leq \infty} |p_n(x)|e^{-x^2/2} = \max_{|x| \leq R_n} |p_n(x)|e^{-x^2/2}, \quad (2)$$

в котором в качестве значения R_n может быть использована константа Рахманова–Маскара–Саффа: $a_n = \sqrt{2n}$. Все связанные с этим детали можно найти в работах Маскара и Саффа [2], [3]. Ниже будет показано, что величина $\sqrt{2n}$ не является наименьшей в соотношении (2), а неуменьшаемое значение R_n совпадает с наибольшей точкой чебышевского альтернанса для многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на всей вещественной оси с весом $e^{-x^2/2}$.

Начнем с рассмотрения конкретного случая $n = 1$. Очевидно, что тогда равенство (2) достаточно рассмотреть для многочленов вида $p_1(x) = x - x_1$. Легко видеть, что

$$\max_{-\infty \leq x \leq \infty} |p_1(x)|e^{-x^2/2} = \max\{|p_1(s_1)|e^{-s_1^2/2}, |p_1(s_2)|e^{-s_2^2/2}\}, \quad (3)$$

где s_1, s_2 – корни уравнения

$$xp_1(x)e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}. \quad (4)$$

Функция $\frac{1}{s}e^{-s^2/2}$ убывает при $s > 0$, поэтому, предположив, что $|s_1| \leq |s_2|$, из (3) находим

$$\max_{-\infty \leq x \leq \infty} |p_1(x)|e^{-x^2/2} = |p_1(s_1)|e^{-s_1^2/2}.$$

Очевидно, что (4) эквивалентно квадратному уравнению $x^2 - x_1x^2 - 1 = 0$, следовательно, $s_1s_2 = -1$ и $|s_1| \leq 1$ при любом x_1 . Таким образом, для любого многочлена степени не выше первой имеет место равенство (2) с величиной $R_1 = 1$, то, что полученное значение не может быть уменьшено, подтверждает полином $p_1(x) = x$. Следовательно, при $n = 1$ константа Рахманова–Маскара–Саффа не является оптимальной. Следующее утверждение показывает, что равенство (2) останется справедливым при любом натуральном n для значений $R_n < a_n$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого алгебраического многочлена $p_n(x)$ при $n \geq 1$ имеет место равенство

$$\max_{-\infty \leq x \leq \infty} |p_n(x)| e^{-x^2/2} = \max_{|x| \leq \sqrt{2n-1}} |p_n(x)| e^{-x^2/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — нули многочлена Эрмита $H_n(x)$, определяемого равенством

$$H_n(x) = (-1)^n (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Положим по определению $x_{n+1} = -x_0 = \sqrt{2n+1}$ и обозначим $L_n[F](x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для функции $F(x)$ по $n+2$ узлам $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$. Тогда для любого алгебраического многочлена $p_{n+1}(x)$ будем иметь

$$\begin{aligned} |p_{n+1}(x)| e^{-x^2/2} &= |L_n[p_{n+1}(x)](x)| e^{-x^2/2} \\ &\leq \Lambda_n(x) \max_{|x| \leq x_{n+1}} \{|p_{n+1}(x)| e^{-x^2/2}\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda_n(x) &= \sum_{\nu=1}^n \left| \frac{(x^2 - x_{n+1}^2) \varphi_n(x)}{(x_\nu^2 - x_{n+1}^2) \varphi'_n(x_\nu)(x - x_\nu)} \right| \\ &\quad + \frac{|x - x_{n+1}| + |x + x_{n+1}|}{2x_{n+1}} \cdot \left| \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(x_{n+1})} \right|, \end{aligned} \quad (6)$$

а

$$\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}.$$

Наша ближайшая цель — проверка справедливости равенства

$$\max_{|x| \geq x_{n+1}} \Lambda_n(x) = 1.$$

Сначала заметим, что $\varphi'_n(x)$ есть результат умножения многочлена степени $n+1$ на экспоненциальный вес, поэтому

$$\varphi'_n(x) = L_n[\varphi'_n(x) e^{x^2/2}] e^{-x^2/2}.$$

Развернутая запись этого равенства дает

$$\varphi'_n(x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{(x^2 - x_{n+1}^2) \varphi_n(x)}{(x_\nu^2 - x_{n+1}^2)(x - x_\nu)} + \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} \cdot \varphi'_n(x_{n+1}).$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{(x^2 - x_{n+1}^2) \varphi_n(x)}{(x_{n+1}^2 - x_\nu^2)(x - x_\nu)} = -\varphi'_n(x) + \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} \cdot \varphi'_n(x_{n+1}). \quad (7)$$

В силу симметричного расположения узлов интерполирования и убывания величин $|\varphi'_n(x_\nu)|$ с ростом номера ν при $x_\nu \geq 0$ [4] заключаем для $x \geq x_{n+1}$, что

$$\Lambda_n(x) \leq |\varphi'_n(x_n)|^{-1} \sum_{\nu=1}^n \frac{(x^2 - x_{n+1}^2) \varphi_n(x)}{(x_{n+1}^2 - x_\nu^2)(x - x_\nu)} + \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} \cdot \varphi'_n(x_{n+1}).$$

Отсюда, учитывая (7), легко заметить, что

$$\Lambda_n(x) \leq \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} - \frac{\varphi'_n(x)}{|\varphi'_n(x_n)|} + \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} \cdot \frac{\varphi'_n(x_{n+1})}{|\varphi'_n(x_n)|}. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение для функций Эрмита $\varphi''_n(x) + (2n+1-x^2)\varphi_n(x) = 0$ позволяет утверждать, что $\varphi'_n(x)$ возрастает при $x \geq x_{n+1}$, поэтому $\varphi'_n(x_{n+1}) < \varphi'_n(x)$ и из (8) находим

$$\Lambda_n(x) \leq \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} - \frac{\varphi'_n(x)}{|\varphi'_n(x_n)|} \left[1 - \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} \right]. \quad (9)$$

Рекуррентные формулы и формулы дифференцирования для многочленов Эрмита легко приводят к равенству $x \varphi_n(x) = -\varphi'_n(x) + \varphi_{n-1}(x) \sqrt{2n}$, из которого получаем $(x \varphi_n(x))' = (2n+1-x^2)\varphi_n(x) + \varphi'_{n-1}(x) \sqrt{2n} < 0$, конечно же при $x \geq x_{n+1}$. Из этого заключаем, что при рассматриваемых значениях x имеет место неравенство

$$\frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} \leq 1.$$

Поскольку $|\varphi'_n(x_n)| \geq |\varphi'_n(x_{n+1})|$, то с помощью (9) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_n(x) &\leq \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} + \frac{|\varphi'_n(x_{n+1})|}{|\varphi'_n(x_n)|} \left[1 - \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} \right] \\ &\leq \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} + 1 - \frac{x \varphi_n(x)}{x_{n+1} \varphi_n(x_{n+1})} = 1. \end{aligned}$$

Из (5) следует четность функции $\Lambda_n(x)$, поэтому $\max_{|x| \geq x_{n+1}} \Lambda_n(x) \leq 1$. Однако, $\Lambda_n(x_{n+1}) = 1$, следовательно, $\max_{|x| \geq x_{n+1}} \Lambda_n(x) = 1$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} &\max_{-\infty \leq x \leq \infty} |p_{n+1}(x)| e^{-x^2/2} \\ &= \max \left\{ \max_{|x| \leq x_{n+1}} |p_{n+1}(x)| e^{-x^2/2}; \max_{|x| \geq x_{n+1}} |p_{n+1}(x)| e^{-x^2/2} \right\}, \end{aligned}$$

но, учитывая (5), приходим к неравенству

$$\max_{-\infty \leq x \leq \infty} |p_{n+1}(x)| e^{-x^2/2} = \max_{|x| \leq \sqrt{2n+1}} |p_{n+1}(x)| e^{-x^2/2}.$$

Заменив здесь n на $n-1$, получим утверждение теоремы.

Можно показать, что $\sqrt{2n-1}$ также не является оптимальным значением параметра R_n в соотношении (2). Чтобы указать это оптимальное значение, предположим

$$\inf_{p_{n-1}} \|x^n - p_{n-1}(x)\| = \|G_n(x)\| \quad \text{и} \quad \|f(x)\| = \max_{-\infty \leq x \leq \infty} |f(x)| e^{-x^2/2}.$$

Тогда в силу существования чебышевского альтернанса [5] уравнение $(G_n(x) \times e^{-x^2/2})' = 0$ имеет $n+1$ корень. Занумеруем эти корни в порядке возрастания $s_0 < s_1 < \dots < s_n$.

ТЕОРЕМА 2. Значение параметра $R_n = s_n$ является наименьшим среди тех, при которых равенство (2) остается справедливым для любого алгебраического многочлена степени n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка того, что равенство (2) остается справедливым при $R_n = s_n$ для любого алгебраического многочлена степени n фактически повторяет доказательство предыдущей теоремы, поэтому, опуская детали, заметим, что если в роли узлов интерполирования выбираются точки s_ν , то для функции Лебега $\Lambda_n(x)$ при $x \geq s_n$ будет иметь место равенство

$$\Lambda_n(x) = \frac{|G_n(x)|e^{-x^2/2}}{\|G_n\|} \leq 1.$$

Чтобы проверить вторую часть утверждения теоремы 2 о минимальности s_n , рассмотрим отображение, действующее из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ следующим образом. Вектору $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ поставим в соответствие вектор $\bar{m}(m_0, m_1, \dots, m_n)$, определяя его координаты с помощью многочлена $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ равенствами

$$\begin{aligned} m_0 &= \max_{x \leq x_1} |P_n(x)|e^{-x^2/2}, \\ m_i &= \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |P_n(x)|e^{-x^2/2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ m_n &= \max_{x_n \leq x} |P_n(x)|e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Это отображение определено в каждой точке открытого симплекса $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ и дифференцируемо. В самом деле, если корни t_ν уравнения

$$(P_n(x)e^{-x^2/2})' = 0 \tag{10}$$

занумерованы в порядке возрастания, то

$$m_i = |P_n(t_i)|e^{-t_i^2/2} = (x_n - t_i)e^{-t_i^2/2} \prod_{k=1}^{n-1} |t_i - x_k|, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Аналогично,

$$m_n = |P_n(t_n)|e^{-t_n^2/2} = (t_n - x_n)e^{-t_n^2/2} \prod_{k=1}^{n-1} (t_n - x_k).$$

Отсюда, учитывая, что $t_i = t_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяют уравнению (10), находим при $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\frac{\partial m_i}{\partial x_n} = e^{-t_i^2/2} \prod_{k=1}^{n-1} |t_i - x_k| > 0,$$

а при $i = n$

$$\frac{\partial m_n}{\partial x_n} = e^{-t_n^2/2} \prod_{k=1}^{n-1} (t_n - x_k) < 0.$$

Следовательно, если мы у многочлена $G_n(x)$ произведем достаточно малый сдвиг влево только одного корня x_n , то для нового многочлена $\hat{G}_n(x)$ будем иметь $\|\hat{G}_n\| = m_n$, а при $i = 0, 1, \dots, n-1$ будем иметь $m_i < m_n$. Поскольку точки t_i непрерывно зависят от x_n , то, таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем построить многочлен $\hat{G}_n(x)$ так, что его норма будет достигаться только в одной точке t_n , и эта точка будет лежать на отрезке $[s_n - \varepsilon, s_n]$. Этим доказана вторая часть теоремы 2.

Нетрудно заметить, что утверждение этой теоремы останется в силе для произвольного промежутка $[a, b]$ и дифференцируемого веса $\rho(x)$ такого, что $\rho(a) = \rho(b) = 0$, а при $x \in (a, b)$ $\rho(x) > 0$.

И еще одно замечание. Возможность использования величины s_n в равенстве (2) была доказана ранее в [2, теорема 2.1] другим способом, однако, вопрос о неубывающей монотонности этого значения там не рассматривался.

Саратовский государственный университет
E-mail: sklyarov@scnit.saratov.su

Поступило
07.02.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Freud G. // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1971. V. 22. № 1–2. P. 109–116.
2. Mhaskar H. N., Saff E. B. // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 285. P. 203–234.
3. Mhaskar H. N., Saff E. B. // Constr. Approx. 1985. V. 1. P. 71–91.
4. Склеяров В. П. // Изв. вузов. Матем. 1993. № 11. С. 57–61.
5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.