Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Худалов, Аппроксимативные свойства положительной и отрицательной частей элемента в упорядоченных банаховых пространствах, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 5, 793–798

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:36:25

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЧАСТЕЙ ЭЛЕМЕНТА В УПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Т. Худалов

Пусть E – банахово пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, упорядоченное с помощью замкнутого конуса E_+ [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Упорядоченное банахово пространство называется *регулярно упорядоченным* [2] (пишем $(E, E_+) \in (\mathcal{R})$), если выполнены следующие условия:

- 1) $\forall x, y \in E \pm x \leq y \implies \|x\| \leq \|y\|$;
- 2) $\forall x \in E \exists y \in E_+$ такой, что $\pm x \leq y$ и $\|x\| = \|y\|$.

Для любого $x \in E$ обозначим через $|X|$ множество элементов $y \in E$ таких, что $\pm x \leq y$ и $\|x\| = \|y\|$. Положим $X_+ = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|X|$, $X_- = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|X|$. Множества X_+ и X_- будем называть *множествами положительных* (соответственно *отрицательных*) *частей элемента x* .

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно показать, что если E – строго выпуклое банахово пространство [3], то множества $|X|$, X_+ , X_- – одноточечные, и можно говорить о метрическом модуле, метрических положительной и отрицательной частях элемента x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $(E, E_+) \in (\mathcal{R})$. Конус E_+ назовем *достижимым*, если $\forall x \in E$ существует элемент $Px \in E_+$, на котором реализуется минимум в формуле расстояния от x до E_+ :

$$d(x, E_+) = \inf\{\|a - x\| : a \in E_+\} = \|Px - x\|.$$

Множество всех таких Px обозначим через $M(x)$.

В настоящей работе исследуется задача: для каких упорядоченных банаховых пространств $M(x) = X_+$ для любого $x \in E$. Наличие данного свойства позволяет, с одной стороны, находить расстояние от элемента до конуса, а также ближайшие для заданного элемента точки конуса E_+ , а с другой стороны, дает метрическую характеристику положительной и отрицательной частей элемента. В данной статье полностью решается указанная выше задача для произвольного упорядоченного гильбертова пространства из класса $(\mathcal{R})$ и произвольного банахова пространства из класса $(\mathcal{R})$ с аддитивной на конусе нормой.

Так как гильбертово пространство строго выпукло, для любого упорядоченного гильбертова пространства H с замкнутым конусом H_+ , принадлежащего классу $(\mathcal{R})$, определены для любого x из H его метрическая положительная и метрическая отрицательная части x_+ и x_- . С другой стороны, поскольку конус H_+ – замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве, $\forall x \in H$ существует проекция элемента x на H_+ , которую обозначим через Px [4]. Следующая теорема устанавливает связь между проекцией Px , расстоянием элемента x до H_+ и элементами x_+ и x_- .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H \in (\mathcal{R})$ – произвольное регулярно упорядоченное гильбертово пространство с замкнутым конусом H_+ . Тогда

- 1) $\forall x \in H \quad Px = x_+, \quad d(x, H_+) = \|x_-\|$;
- 2) $\forall x \in H, x \notin \pm H_+ \quad x_+$ и x_- принадлежат границе конуса H_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Возьмем произвольный элемент $x \in H$. Если $x \in H_+$, то, очевидно, $Px = x$, $x_+ = x$, $x_- = 0$, и тогда $x = Px$ и $d(x, H_+) = 0 = \|x_-\|$, т.е. условие 1) теоремы выполнено. Пусть теперь $x \notin H_+$. Тогда существует единственный вектор $Px \in H_+$ такой, что

$$\|Px - x\| = \inf\{\|a - x\| : a \in H_+\} = d(x, H_+).$$

Положим $Px - x = v$, тогда $x = Px - v$. Покажем, что $v \in H_+$. Действительно, если $v \notin H_+$, то $v = v_+ - v_-$, где $v_+, v_- \in H_+$ и $\|v_+ + v_-\| = \|v_+ - v_-\|$. Отсюда следует, что

$$\|Px + v_- - x\| = \|v + v_-\| = \|v_+\| \geq \|Px - x\| = \|v_+ + v_-\|.$$

С другой стороны, $v_+ \leq v_+ + v_-$, отсюда $\|v_+\| \leq \|v_+ + v_-\|$, что влечет $\|v_+\| = \|v_+ + v_-\|$ или $\|v_+\|^2 = \|v_+\|^2 + 2(v_+, v_-) + \|v_-\|^2$. Поскольку равенство $\|v_+ + v_-\| = \|v_+ - v_-\|$ равносильно $(v_+, v_-) = 0$, то получаем $\|v_-\|^2 = 0$, т.е. $v_- = 0$, следовательно, $v \in H_+$.

Докажем, что в действительности $Px = x_+$, $v = x_-$. Так как $x \notin H_+$, то $x_- \neq 0$. Можно считать, что $x_+ \neq 0$, иначе $\inf\{\|a - x\| : a \in H_+\} = \|x_-\|$ при $Px = 0 = x_+$. Имеем $\|Px - x\| = \|Px - x_+ + x_-\| = \inf\{\|a - x\| : a \in H_+\}$. Тогда, очевидно, Px доставляет минимум следующей задаче:

$$\|a - x_+ + x_-\|^2 \rightarrow \inf, \quad (1)$$

где инфимум берется по всем $a \in H_+$.

Пусть $a \in H_+$ — произвольный положительный элемент. Представим a в виде $a = a_1 + a_2$, где a_1 — проекция на плоскость $\text{lin}\{x_+, x_-\}$, а вектор a_2 ортогонален плоскости $\text{lin}\{x_+, x_-\}$, т.е. $(a_2, x_+) = 0$, $(a_2, x_-) = 0$.

Ниже будет показано, что $a_1 = \alpha x_+ + \beta x_-$, где $\alpha, \beta \geq 0$, т.е. $a_1 \in H_+$. Имеем $\|a - x_+ + x_-\|^2 = \|a_1 - x_+ + x_-\|^2 + \|a_2\|^2$. Отсюда следует, что инфимум в задаче (1) достигается на положительных векторах, лежащих в $\text{lin}\{x_+, x_-\}$, т.е. при $a_2 = 0$. При этом

$$\|a_1 - x_+ + x_-\|^2 = (\alpha - 1)^2 \|x_+\|^2 + (\beta + 1)^2 \|x_-\|^2. \quad (2)$$

Так как

$$H_+ \cap \text{lin}\{x_+, x_-\} = \{\alpha x_+ + \beta x_- : \alpha, \beta \geq 0\} \quad (3)$$

в силу единственности регулярно упорядочивающего конуса в гильбертовом пространстве [5], то инфимум в (2) будет при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, т.е. если $a_1 = x_+$. Следовательно, инфимум в задаче (1) достигается при $a = x_+$. Вследствие единственности получаем, что $Px = x_+$, тогда $v = x_-$ и

$$d(x, H_+) = \|x_-\|.$$

Осталось показать, что $\forall a \in H_+$ проекция a_1 на плоскость $\text{lin}\{x_+, x_-\}$ имеет вид: $a_1 = \alpha x_+ + \beta x_-$, где $\alpha, \beta \geq 0$. Действительно, пусть $a \in \text{lin}\{x_+, x_-\}$, тогда в силу (3) $a = \alpha x_+ + \beta x_-$, где $\alpha, \beta \geq 0$. Предположим, что $a \notin \text{lin}\{x_+, x_-\}$. Рассмотрим трехмерное подпространство $\text{lin}\{x_+, x_-, a\}$ гильбертова пространства H . Ясно, что

$$H_+ \cap \text{lin}\{x_+, x_-, a\} \supset \{\alpha x_+ + \beta x_- + \gamma a : \alpha, \beta, \gamma \geq 0\}.$$

Предположим, что проекция a_1 вектора a на плоскость $\text{lin}\{x_+, x_-\}$ не принадлежит множеству $\{\alpha x_+ + \beta x_- : \alpha, \beta \geq 0\}$ и $a_1 = \alpha x_+ + \beta x_-$, где α или β меньше нуля. Пусть для определенности $\alpha < 0$. Рассмотрим плоскость $\text{lin}\{x_+, a\}$. Имеем

$$\cos(\widehat{x_+, a}) = \frac{(x_+, \alpha x_+ + \beta x_- + a_2)}{\|x_+\| \|a\|} = \frac{\alpha \|x_+\|}{\|a\|} < 0.$$

Так как $H_+ \cap \text{lin}\{x_+, a\} \supset \{\alpha x_+ + \beta a : \alpha, \beta \geq 0\}$, то конус, натянутый на векторы a и x_+ , является регулярным в $\text{lin}\{x_+, a\}$, так как содержит регулярный конус, натянутый на x_+ и b , где $b = \alpha x_+ + \beta a$ с $\alpha, \beta \geq 0$ и $(b, x_+) = 0$, что противоречит единственности конуса в гильбертовом пространстве. Подобным же образом случай $\beta < 0$ приводит к противоречию. Следовательно, $a_1 = \alpha x_+ + \beta x_-$, где $\alpha, \beta \geq 0$, и условие 1) теоремы доказано полностью.

Докажем условие 2). Пусть $x \in H$, $x \notin \pm H_+$. Предположим, что x_+ — внутренняя точка конуса H_+ , т.е. существует открытый шар $B(x_+, \beta)$ такой, что $B(x_+, \beta) \subset H_+$. Тогда если $\rho < 2\beta$, то $x_+ - (\rho x_-)/(2\|x_-\|) \in B(x_+, \beta)$, значит, $x_+ - (\rho x_-)/(2\|x_-\|) \in H_+$. Отсюда при $\rho < \min\{2\beta, 2\|x_-\|\}$ имеем

$$\left\| x_+ - \frac{\rho x_-}{2\|x_-\|} - x_+ + x_- \right\| = \left(1 - \frac{\rho}{2\|x_-\|} \right) \|x_-\| < \|x_-\|.$$

Противоречие, так как по доказанному в условии 1) имеем

$$\|x_-\| = \inf\{\|a - x\| : a \in H_+\}.$$

Предположим теперь, что x_- — внутренняя точка конуса H_+ . Тогда найдется $\beta > 0$, $\beta < 1/2$ такое, что $x_- - \beta x_+ \in H_+$. Имеем

$$\pm[(1-\beta)x_+ - (x_- - \beta x_+)] \leq (1-\beta)x_+ + x_- - \beta x_+ = (1-2\beta)x_+ + x_-,$$

откуда $\|x\|^2 \leq \|(1-2\beta)x_+ + x_-\|^2$ или $\|x_+\|^2 + \|x_-\|^2 \leq (1-2\beta)^2 \|x_+\|^2 + \|x_-\|^2$, противоречие. Теорема доказана полностью.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, дадим еще одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $(E, E_+) \in (\mathcal{R})$. Достижимый конус E_+ называется *вполне достижимым*, если $M(x) = X_+$ для любого x .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(E, E_+) \in (\mathcal{R})$ и норма аддитивна на конусе E_+ . Тогда E_+ — вполне достижимый конус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in E_+$, то ясно, что $M(x) = \{x\}$. С другой стороны, если $y \geq \pm x$ и $y > x$, то $y - x = v \in E_+$, $v \neq 0$. В силу аддитивности нормы на конусе $\|y\| = \|x\| + \|v\|$. Поэтому если $\|y\| = \|x\|$, то $\|v\| = 0$ и $y = x$, т.е. $X_+ = \{x\}$, значит, $M(x) = X_+$. Возьмем произвольный $x \notin E_+$ и докажем, что $X_+ \subset M(x)$. Имеем $x = x_+ - x_-$, $\|x\| = \|x_+ + x_-\| = \|x_+\| + \|x_-\|$, т.е. $\| -x_+ + x_-\| = \| -x_+\| + \|x_-\|$, значит, норма аддитивна на элементах $-x_+$ и x_- . Тогда $\exists f \in E^*$, $\|f\| = 1$, такой, что $f(-x_+) = \|x_+\|$, $f(x_-) = \|x_-\|$. Так как $E \in (\mathcal{R})$ и норма аддитивна на конусе, то $E^* \in (\mathcal{R})$, откуда $f = g - h$, где $g, h \in E_+^*$ и $\|f\| = \|g - h\| = \|g + h\|$, значит, $\|g\| \leq 1$, $\|h\| \leq 1$. Имеем $-g(x_+) + h(x_+) = \|x_+\|$, $g(x_-) - h(x_-) = \|x_-\|$. Из второго равенства $g(x_-) = \|x_-\| + h(x_-)$, но $h(x_-) \geq 0$, а $g(x_-) \leq \|g\| \cdot \|x_-\| \leq \|x_-\|$, следовательно, $h(x_-) = 0$ и $g(x_-) = \|x_-\|$. Первое равенство дает $h(x_+) = \|x_+\| + g(x_+)$,

откуда аналогичным образом получаем $g(x_+) = 0$, $h(x_+) = \|x_+\|$. Итак, существует $g \in E_+^*$ такой, что $g(x_+) = 0$ и $g(x_-) = \|x_-\|$, причем $\|g\| = 1$. Покажем, что на x_+ достигается минимум в формуле

$$d(x, E_+) = \inf \{ \|x - a\| : a \in E_+ \},$$

т.е. $d(x, E_+) = \|x - x_+\|$. Для любого $a \in E_+$ имеем

$$\|a - x\| \geq g(a) - g(x) \geq 0 - g(x) = g(x_+) - g(x) = g(x_-) = \|x_-\| = \|x_+ - x\|,$$

т.е. $d(x, E_+) = \|x_+ - x\|$, следовательно, $x_+ \in M(x)$.

Докажем обратное включение, т.е. что $M(x) \subset X_+$. Пусть $Px \in M(x)$. Тогда $Px - x = v \in E_+$. Действительно, если $v \notin E_+$, то $v = v_+ - v_-$, где $v_+, v_- \in E_+$ и $\|v_+ - v_-\| = \|v_+ + v_-\| = \|v_+\| + \|v_-\|$. Отсюда следует, что $Px + v_- \in E_+$ и $\|Px + v_- - x\| = \|v_+\| \geq \|v\| = \|v_+\| + \|v_-\|$, откуда $\|v_-\| = 0$, т.е. $v_- = 0$. Противоречие.

Если $x = x_+ - x_-$, где $x_+, x_- \in E_+$, $\|x_+ - x_-\| = \|x_+ + x_-\|$, то $Px + x_- = x_+ + v$. В силу аддитивности нормы на конусе имеем

$$\|Px\| + \|x_-\| = \|x_+\| + \|v\|, \quad \|x\| = \|x_+\| + \|x_-\|.$$

Но $x = Px - v$, откуда $\|x\| \leq \|Px\| + \|v\|$, тогда $\|Px\| + \|v\| = 2\|Px\| + \|x_-\| - \|x_+\| \geq \|x_+\| + \|x_-\|$ или $\|Px\| \geq \|x_+\|$. Кроме того, $\|x_-\| = \|x_+ - x\| \geq \|Px - x\| = \|v\|$. Поскольку $\|Px\| - \|x_+\| + \|x_-\| - \|v\| = 0$, то $\|Px\| = \|x_+\|$, $\|x_-\| = \|v\|$, тогда $x = Px - v$ и $\|Px - v\| = \|x\| = \|x_+\| + \|x_-\| = \|Px\| + \|v\| = \|Px + v\|$, т.е. $Px \in X_+$. Теорема доказана полностью.

Установим теперь еще одно свойство вполне достижимого конуса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $(E, E_+) \in (\mathcal{R})$. Конус E_+ называется *вполне регулярным*, если $\forall x \in E$ и $\forall x_+, x_- \in E_+$ таких, что $x = x_+ - x_-$ и $\|x_+ - x_-\| = \|x_+ + x_-\|$ выполняется равенство

$$\|x_+ - \lambda x_-\| = \|x_+ + \lambda x_-\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Всякий вполне достижимый конус вполне регулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный $x \in E$. Так как E_+ — вполне достижимый конус, то для любого x_+ имеем $x_+ = Px$. Тогда согласно предложению 0.3 в [4] если z принадлежит линейному отрезку с концами x и x_+ , то $Pz = x_+$. Поэтому для элемента

$$(1 - \lambda)x_+ + \lambda x = \lambda(x_+ - x_-) + (1 - \lambda)x_+ = x_+ - \lambda x_-$$

имеем $P(x_+ - \lambda x_-) = Px = x_+$, значит, найдется такая положительная часть элемента $x_+ - \lambda x_-$, что $(x_+ - \lambda x_-)_+ = x_+$, откуда $(x_+ - \lambda x_-)_- = \lambda x_-$. И так как для любых элементов x_+, x_- имеет место равенство $\|x_+ - x_-\| = \|x_+ + x_-\|$, получаем

$$\|x_+ - \lambda x_-\| = \|x_+ + \lambda x_-\| \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

С другой стороны, $-x = x_- - x_+$, и поскольку $\|x\| = \|x_- - x_+\| = \|x_- + x_+\|$, то в качестве $(-x)_+$ и $(-x)_-$ можно взять x_- и x_+ соответственно, т.е. $\|x_- - \lambda x_+\| = \|x_- + \lambda x_+\| \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ или $\|(1/\lambda)x_- + x_+\| = \|(1/\lambda)x_- - x_+\| \quad \forall \lambda \in (0, 1]$. Положив $\mu = 1/\lambda$, получим $\|x_+ + \mu x_-\| = \|x_+ - \mu x_-\| \quad \forall \mu \in [1, +\infty)$. Итак, $\forall \lambda \in [0, +\infty)$ $\|x_+ - \lambda x_-\| = \|x_+ + \lambda x_-\|$, т.е. конус в E_+ является вполне регулярным.

Из теорем 1 и 2 выводим следующее

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(E, E_+) \in (\mathcal{R})$ и норма аддитивна на конусе. Тогда

- 1) конус E_+ является вполне регулярным;
- 2) для любого $x \in E$ нормы элементов из X_- равны между собой и равны $d(x, E_+)$;
- 3) для любого $x \in E$ нормы элементов из X_+ равны между собой и равны $\|x\| - d(x, E_+)$.

В заключение приведем два примера. В примере 1 показано, что даже в трехмерном пространстве E из класса $(\mathcal{R})$ множества $M(x)$ и X_+ , вообще говоря, не сравнимы в смысле упорядочения по теоретико-множественному включению. Пример 2 является иллюстрацией к теоремам 2 и 3.

ПРИМЕР 1. Пусть $E = l_1^3$ и $E_+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq |x_2| + |x_3|\}$. Можно показать, что $(E, E_+) \in (\mathcal{R})$. Возьмем $x = (1, 1, 1)$. Нетрудно установить, что для этого элемента

$$X_+ = \left\{ \left(2 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\alpha\lambda + 1}{2}, \frac{(1-\alpha)\lambda + 1}{2} \right) : 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 1 \right\},$$

$$X_- = \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\alpha\lambda - 1}{2}, \frac{(1-\alpha)\lambda - 1}{2} \right) : 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}.$$

Расстояние от x до E_+ равно 1, и те из $x_+ \in X_+$, для которых норма ассоциированного элемента x_- равна 1, принадлежит $M(x)$. Но $\|x_-\| = 1$ только если $\lambda = 1$. Значит,

$$M(x) \cap X_+ = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{\alpha + 1}{2}, \frac{2 - \alpha}{2} \right) : 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$M(x) = \{(1 + \lambda, \alpha, 1 + \lambda - \alpha) : 0 \leq \lambda \leq 1, \lambda \leq \alpha \leq 1\}.$$

Для элемента $Px = (4/3, 2/3, 3/4)$, принадлежащего $M(x)$, имеем $P(x) \notin X_+$, т.е. множества $M(x)$ и X_+ не сравнимы. Интересно отметить, что найдутся единственные ассоциированные элементы $x_+ = (3/2, 3/4, 3/4)$, $x_- = (1/2, -1/4, -1/4)$ такие, что для любого $t \geq 0$

$$\|x_+ + tx_-\| = \|x_+ - tx_-\| = \begin{cases} t, & \text{если } t \geq 3, \\ 3, & \text{если } t < 3. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Пусть $E = c_0$ над $\mathbb{R}$ с естественной нормой и конусом $E_+ = \{x \in c_0 : x_1 \geq \sup\{|x_n| : n \geq 2\}\}$, где $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$. Покажем, что $(E, E_+) \in (\mathcal{R})$.

1. Пусть $\pm x \leq y$. Имеем $y_1 - x_1 \geq \sup\{|y_n - x_n| : n \geq 2\}$, $y_1 + x_1 \geq \sup\{|y_n + x_n| : n \geq 2\}$. Если $z \in E_+$, то $\|z\| = z_1$, поэтому норма аддитивна на конусе и $\|y\| = y_1$, $\|y - x\| = y_1 - x_1$, $\|y + x\| = y_1 + x_1$. Отсюда $2\|x\| \leq \|y - x\| + \|y + x\| = y_1 - x_1 + y_1 + x_1 = 2\|y\|$, т.е. $\|x\| \leq \|y\|$.

2. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и $|x_1| \geq \sup\{|x_n| : n \geq 2\}$. Тогда если $x_1 > 0$, то можно взять $y = x$; если $x_1 < 0$, то $y = -x$. Легко видеть, что если $x \in E_+$, то $X_+ = \{x\}$, $X_- = \{0\}$; если же $x \in -E_+$, то $X_+ = \{0\}$, $X_- = \{x\}$.

Предположим теперь, что $|x_1| < \sup\{|x_n| : n \geq 2\}$. Положим $\sup\{|x_n| : n \geq 2\} = a$. Возьмем

$$y = \left(a, \frac{x_1 x_2}{a}, \dots, \frac{x_1 x_n}{a}, \dots \right), \quad y \in c_0.$$

Тогда $y \pm x \in E_+$ и $\|y\| = \sup\{a, |x_1 x_n|/a : n \geq 2\} = \sup\{a, |x_1|\} = \|x\|$. Обозначим $Y = \{y \in E_+ : y \geq \pm x, \|y\| = \|x\|\}$. Пусть $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \geq \pm(x_1, \dots, x_n)$, $\|y\| = \|x\|$. Тогда $y = (a, y_2, \dots, y_n, \dots)$, где

$$\max\{-a - x_1 - x_i, -a + x_1 + x_i\} \leq y_i \leq \min\{a + x_1 - x_i, a - x_1 + x_i\}, \quad i = 2, \dots$$

В этом случае $X_+ = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Y$; $X_- = \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}x$. Все элементы из X_+ имеют норму $\frac{1}{2}(a + x_1)$, а все элементы из X_- — норму $\frac{1}{2}(a - x_1)$, кроме того, $d(x, E_+) = \frac{1}{2}(a - x_1)$. Если, например, $x = (1, 2, 4, 0, \dots, 0, \dots)$, то $Y = \{(4, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots) : \lim y_n = 0\}$, где $-1 \leq y_2 \leq 3, y_3 = 1, -3 \leq y_n \leq 3, n = 4, 5, \dots$. Здесь

$$X_+ = \left\{ \left(\frac{5}{2}, 1 + z_2, \frac{5}{2}, z_4, \dots, z_n \right) : \right. \\ \left. \frac{1}{2} \leq z_2 \leq \frac{3}{3}, |z_n| \leq \frac{3}{2}, n = 4, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \right\}, \\ X_- = \left\{ \left(\frac{3}{2}, u_2 - 1, -\frac{3}{2}, u_4, \dots, u_n, \dots \right) : \right. \\ \left. \frac{1}{2} \leq u_2 \leq \frac{3}{2}, |u_n| \leq \frac{3}{2}, n = 4, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \right\}$$

и $d(x, E_+) = \frac{3}{2}$. Отметим также, что $\forall x_+ \in X_+$ и $x_- = x_+ - x$ имеем

$$\frac{5 + 3t}{2} = \|x_+ + tx_-\| = \|x_+ - tx_-\| \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Северо-Осетинский государственный университет

Поступило
20.06.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вулих Б. З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1977.
2. Худалов В. Т. // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 1. № 1. С. 193–196.
3. Дистель Д. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища школа, 1980.
4. Власов Л. П. // УМН. 1973. Т. 28. № 6. С. 3–66.
5. Худалов В. Т. Тензорные произведения банаховых пространств с конусами. Дисс. ... к. ф.-м. н. Л., 1980.