Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Об одной экстремальной задаче,
связанной с теоремой Мореры, *Матем. заметки*,
1996, том 60, выпуск 6, 804–809

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1898>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 03:02:56

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ТЕОРЕМОЙ МОРЕРЫ

В. В. Волчков

§ 1. Введение

Пусть M – группа евклидовых движений комплексной плоскости $\mathbb{C}$, T – жорданова область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей ∂T , $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. В работе [1] С. А. Беренштейн и Р. Гэй получили следующее уточнение классической теоремы Мореры.

ТЕОРЕМА А. Пусть $T \subseteq B_R$ – фиксированный треугольник, $R \geq 2r$ и $f \in C(B_R)$. Тогда f является голоморфной в B_R тогда и только тогда, когда

$$\int_{\partial(\sigma T)} f(z) dz = 0 \quad \forall \sigma \in M : \sigma T \subseteq B_R. \quad (1)$$

Методы, разработанные в [1], позволяют получить аналогичные утверждения и для некоторых других областей T . В связи с этими результатами возникает следующая задача: найти наименьшее значение $R = R(T)$ такое, что для любой функции $f \in C(B_R)$ из условия (1) следует голоморфность f .

В такой общей постановке эта задача является весьма трудной (например, утверждение о том, что $R(T) < \infty$ для областей T , отличных от круга, эквивалентно локальному варианту старой гипотезы Шиффера об описании плоских множеств Помпейю (см. [2, с. 58])). В настоящее время точное значение $R(T)$ известно лишь в следующих случаях:

- 1) T – квадрат со стороной a , при этом $R(T) = a\sqrt{5}/2$ ([3], см. также [4], [5]);
- 2) T – полукруг диаметра a , при этом $R(T) = a\sqrt{5}/4$ (см. [6]).

В данной работе получено решение поставленной задачи в случае, когда T – правильный треугольник (см. теорему 1 ниже). Метод, используемый при доказательстве теоремы 1, дает возможность существенно усилить известную теорему В. К. Дзядыка [7] о геометрическом описании голоморфных функций (см. теорему 2).

§ 2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T \subseteq B_R$ – правильный треугольник со стороной a , $f \in C(B_R)$ и выполнено условие (1). Тогда

- 1) если $R \geq a\sqrt{3}/2$, то f голоморфна в B_R ;
- 2) при $R < a\sqrt{3}/2$ существуют неголоморфные функции класса $C^\infty(B_R)$, удовлетворяющие условию теоремы.

Таким образом, для правильного треугольника T со стороной a имеем $R(T) = a\sqrt{3}/2$. Используя методику доказательства этого результата (см. § 3, § 4), нетрудно вычислить значение $R(T)$ для равнобедренных треугольников T , близких к правильному.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a > 0$ – фиксировано, $R \geq a\sqrt{3}/2$, u_1, u_2 – вещественнозначные функции класса $C^2(B_R)$. Тогда для того, чтобы функция $u_1 + iu_2$ была голоморфной в B_R , необходимо и достаточно, чтобы площади поверхностей графиков функций $u_1, u_2, u_3 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, расположенных над любым правильным треугольником $T \subseteq B_R$ со стороной a , были равны.

Теорема 1 данной работы анонсирована в [8]. По поводу других усилений теоремы Мореры см. [9]–[11] и библиографию к этим работам.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Всюду в дальнейшем точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ отождествляется с комплексным числом $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho = |z|$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). Пусть $T \subseteq B_r$ – правильный треугольник со стороной a . Обозначим $A_{a,r}$ – множество комплекснозначных функций $f \in C^\infty(B_r)$, для которых

$$\int_{\sigma T} f \, dx dy = 0 \quad \forall \sigma \in M : \sigma T \subseteq B_r. \quad (2)$$

Для краткости положим $\alpha = a\sqrt{3}/6$, $\beta = \beta(a, r) = 3\alpha - r$. Пусть еще $K_{\lambda, \mu} = \{z \in \mathbb{C} : \lambda < |z| < \mu\}$. Далее будут использоваться следующие дифференциальные операторы:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D = D_1 D_2 D_3, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Символами $c, c_1, c_2, \dots$ обозначаются комплексные постоянные, которые в различных случаях, вообще говоря, разные.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in A_{a,r}$. Тогда

- 1) $\bar{f} \in A_{a,r}$ (черта над f означает комплексное сопряжение);
- 2) все частные производные от f принадлежат $A_{a,r}$;

3) каждое слагаемое ряда Фурье

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad 0 < \rho < r,$$

доопределенное в точке $z = 0$ по непрерывности, принадлежит $A_{a,r}$;

4) при любом $n \in \mathbb{Z}$ функции $(f'_n(\rho) \pm \frac{n}{\rho} f_n(\rho)) e^{i(n \mp 1)\varphi}$, доопределенные в точке $z = 0$ по непрерывности, принадлежат $A_{a,r}$;

5) $\int_{\partial(\sigma T)} f(z) dz = 0 \quad \forall \sigma \in M: \sigma T \subseteq B_r$;

6) пусть $a/\sqrt{3} < r < a\sqrt{3}/2$ и существует алгебраический многочлен $P(x, y)$, совпадающий с f в кольце $K_{\beta,r}$; тогда P – тождественная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) следует, что если $f \in A_{a,r}$, то $\operatorname{Re} f \in A_{a,r}$ и $\operatorname{Im} f \in A_{a,r}$. Отсюда имеем первое утверждение леммы.

Пусть $\sigma \in M$ – фиксировано и $\sigma T \subseteq B_r$. Из определения $A_{a,r}$ следует, что при всех достаточно малых неотрицательных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\int_{\sigma T} f(x + \varepsilon_1, y + \varepsilon_2) dx dy = 0.$$

Дифференцируя это равенство по ε_j ($j = 1, 2$) и полагая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, получим утверждение 2.

Докажем третье утверждение. Гладкость функций $f_n(\rho) e^{in\varphi}$, доопределенных в точке $z = 0$ по непрерывности, следует из формулы

$$f_n(\rho) e^{in\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) e^{-int} dt$$

и гладкости f в B_r . Пусть $t \in \mathbb{R}^1$. Записывая условие (2) для функции $g(z) = f(ze^{it}) \in A_{a,r}$, умножая на e^{-int} и интегрируя по t на $[-\pi, \pi]$, получим после перемены порядка интегрирования $f_n(\rho) e^{in\varphi} \in A_{a,r}$.

Утверждение 4 следует из утверждений 2, 3 и легко проверяемого тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (f_n(\rho) e^{in\varphi}) &= \frac{1}{2} \left(f'_n(\rho) + \frac{n}{\rho} f_n(\rho) \right) e^{i(n-1)\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(f'_n(\rho) - \frac{n}{\rho} f_n(\rho) \right) e^{i(n+1)\varphi}. \end{aligned}$$

Далее, из утверждения 2 имеем $\partial f / \partial \bar{z} \in A_{a,r}$. Отсюда и из формулы Грина получаем утверждение 5.

Для доказательства утверждения 6 заметим, что

$$\int_{\sigma T} P(x, y) dx dy = \int_{B_\beta} (P - f) dx dy$$

для любого $\sigma \in M: \sigma T \subseteq B_r$. Поскольку правая часть последнего равенства не зависит от σ , существует $c \in \mathbb{C}$ такое, что $P - c \in A_{a,r}$. Отсюда и из утверждения 2 следует $P \equiv c$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $z_1 \in \mathbb{R}^1$, $z_2 = z_1 + ae^{i\pi/6}$, $z_3 = \bar{z}_2$, T_0 – замкнутый треугольник с вершинами z_1, z_2, z_3 . Тогда для любой $f \in C^3(T_0)$

$$\int_{T_0} (Df) dx dy = \frac{2}{\sqrt{3}} (D_1 f)(z_1) + (D_2 f)(z_2) - (D_3 f)(z_3). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f – алгебраический многочлен от переменных x, y , равенство (3) легко проверить прямым вычислением. В общем случае утверждение леммы 2 следует из того, что множество многочленов плотно в $C^3(T_0)$ (см. [12, с. 101]).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in A_{a,r}$. Тогда при $-r < z_1 < \sqrt{r^2 - a^2/4} - a\sqrt{3}/2$ выполнено равенство

$$\frac{2}{\sqrt{3}} (D_1 f)(z_1) + (D_2 f)(z_2) - (D_3 f)(z_3) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 2 леммы 1 получаем, что $Df \in A_{a,r}$. Это означает, что при указанных z_1 левая часть формулы (3) равна нулю, откуда следует требуемое равенство.

ЛЕММА 3. Пусть $r \geq a\sqrt{7/12}$, f – радиальна (т.е. $f(z) = f_0(|z|)$) и принадлежит $A_{a,r}$. Тогда f – тождественная константа в кольце $K_{\alpha,r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 2 леммы 1 и (3) получаем, что при $-r < z_1 < -\alpha$

$$(D_3 f)(z_3) = \frac{2}{\sqrt{3}} (D_1 f)(z_1) + (D_2 f)(z_2).$$

Отсюда следует, что

$$f'_0(|z_2|) = f'_0(|z_3|) = 0. \quad (4)$$

Далее, записывая равенство (3) для функции $f'_0(\rho)y/\rho = \partial f/\partial y \in A_{a,r}$, из утверждения 2 леммы 1 и (4) получаем $f'_0(|z_1|) = 0$ при $-r < z_1 < -\alpha$. Отсюда следует утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $a\sqrt{7/12} < r \leq a\sqrt{3}/2$, $f \in C(B_r)$ и удовлетворяет (2). Тогда f – тождественная константа в кольце $K_{\beta,r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя стандартный процесс сглаживания (см. [13, с. 125, доказательство теоремы 2.6]), видим, что лемму 4 достаточно доказать для функций класса $A_{a,r}$. По лемме 1 $f_n(\rho)e^{in\varphi} \in A_{a,r}$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $n = 0$. Из леммы 3 следует, что $g = \Delta f_0 = 0$ в $K_{\alpha,r}$ (Δ – оператор Лапласа). Пусть Γ – произвольная хорда круга B_α , расстояние от которой до точки $z = 0$ не меньше β . Поскольку $r > a\sqrt{7/12}$, существует $\sigma \in M$ такое, что одна из сторон треугольника σT содержит Γ , а две другие стороны лежат в $K_{\alpha,r}$. Тогда из утверждений 2, 5 леммы 1 имеем $0 = \int_{\partial(\sigma T)} g(z) dz = \int_\Gamma g(z) |dz|$, где $|dz|$ – элемент длины Γ . Полагая

$g = 0$ при $|z| \geq r$, из последнего равенства получаем, что преобразование Радона функции g [13, с. 117] равно нулю на прямых, расстояние от которых до точки $z = 0$ не меньше β . По теореме о носителе [13, с. 125] $g = 0$ в $K_{\beta,r}$. Тогда из леммы 3 и теоремы единственности для гармонических функций (см., например, [14, с. 88]) следует, что f_0 – тождественная константа в $K_{\beta,r}$.

Докажем теперь индукцией по $n = 1, 2, \dots$, что $f_{-n}(\rho) = 0$ при $\beta < \rho < r$. Пусть $n = 1$. Из утверждения 4 леммы 1 следует, что функция $f'_{-1}(\rho) + f_{-1}(\rho)\rho^{-1} \in A_{a,r}$. По доказанному выше $f'_{-1}(\rho) + f_{-1}(\rho)\rho^{-1} \equiv c$ при $\beta < \rho < r$, следовательно, $f_{-1}(\rho)e^{-i\varphi} = c_1\bar{z} + c_2z^{-1}$ в $K_{\beta,r}$. Из следствия к лемме 2 получаем $c_2 = 0$, а тогда из утверждения 6 леммы 1 следует, что $c_1 = 0$. Таким образом, $f_{-1}(\rho) = 0$ при $\beta < \rho < r$. Предположим, что утверждение верно при некотором $n \geq 1$ и докажем его для $n + 1$. По лемме 1 имеем $f_{n-1}(\rho)e^{-i(n+1)\varphi} \in A_{a,r}$ и

$$\left(f'_{-n-1}(\rho) + \frac{n+1}{\rho}f_{-n-1}(\rho)\right)e^{-in\varphi} \in A_{a,r}.$$

По индуктивному предположению $\rho f'_{-n-1}(\rho) = -(n+1)f_{-n-1}(\rho)$ при $\beta < \rho < r$, откуда $f_{-n-1}(\rho)e^{-i(n+1)\varphi} = c_3z^{-n-1}$ в $K_{\beta,r}$. Из следствия к лемме 2 имеем $c_3 = 0$. Итак, при $\beta < \rho < r$ и всех $n \in \mathbb{N}$ $f_{-n}(\rho) = 0$. Из утверждения 1 леммы 1 следует, что это же верно при всех целых $n \neq 0$. Таким образом, $f = f_0(\rho) \equiv c$ в $K_{\beta,r}$ и лемма 4 доказана.

§ 4. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $R = a\sqrt{3}/2$, $0 < \varepsilon < R - a\sqrt{7/12}$, φ – функция класса $C^\infty(\mathbb{C})$ с носителем в B_ε . Тогда свертка $\psi = f * \varphi \in C^\infty(B_{R-\varepsilon})$ и $\int_{\partial(\sigma T)} \psi(z) dz = 0$ при всех $\sigma \in M : \sigma T \subseteq B_{R-\varepsilon}$. Из формулы Грина следует, что $\partial\psi/\partial\bar{z} \in A_{a,R-\varepsilon}$. Отсюда и из леммы 4 имеем $\Delta\psi = 4\partial^2\psi/\partial z\partial\bar{z} = 0$ в кольце $K_{\beta(a,r),r}$ при $r = R - \varepsilon$. В силу произвольности φ получаем, что $\Delta f = 0$ в $K_{0,R}$ в смысле распределений. Поскольку $f \in C(B_R)$, отсюда следует, что f гармонична в $K_{0,R}$ (см., например, [15, с. 239]). Из теоремы об устранимой особенности (см. [14, с. 123]) имеем $f \in C^\infty(B_R)$. Далее, из условия теоремы 1 и формулы Грина следует, что $\partial f/\partial\bar{z} \in A_{a,R}$. Тогда из леммы 4 и определения $A_{a,R}$ получаем $\partial f/\partial\bar{z} = 0$ в B_R . Отсюда следует первое утверждение теоремы 1 при $R = a\sqrt{3}/2$, а значит и при всех $R \geq a\sqrt{3}/2$.

Пусть теперь $R < a\sqrt{3}/2$. В этом случае существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon \subseteq \sigma T$ для любого $\sigma \in M$ такого, что $\sigma T \subseteq B_R$. Тогда всякая ненулевая функция класса $C^\infty(B_R)$ с носителем в B_ε удовлетворяет условиям второго утверждения теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Необходимость следует из теоремы В. К. Дзядыка [7]. Для доказательства достаточности рассмотрим функции

$$f_m = \left(1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}u_m\right)^2\right)^{1/2}, \quad m = 1, 2, 3.$$

Из условия имеем

$$\int_{\sigma T} f_1 dx dy = \int_{\sigma T} f_2 dx dy = \int_{\sigma T} f_3 dx dy$$

при любом $\sigma \in M$: $\sigma T \subseteq B_R$. По лемме 4 $f_1 = f_2 = f_3$, откуда следует равенство указанных в теореме 2 площадей, расположенных над любым измеримым подмножеством B_R . Отсюда и из теоремы В.К. Дзядыка [7] получаем, что функция $u_1 + iu_2$ голоморфна в B_R .

Донецкий государственный университет

Поступило

08.09.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Berenstein C. A., Gay R. Le problem de Pompeiu local // J. Anal. Math. 1989. V. 52. P. 133–166.
- [2] Беренштейн К.А., Струша Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
- [3] Волчков В.В. О функциях с нулевыми интегралами по некоторым множествам // Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. № 8. С. 9–11.
- [4] Волчков В.В. О функциях с нулевыми интегралами по некоторым множествам // ДонГУ. Деп. УкрНИИТИ. № 1748–Ук90. Донецк, 1990.
- [5] Волчков В.В. О некоторых вопросах, связанных с проблемой Помпейю. Деп. ГНТБ Украины. Донецк: ДонГУ, 1993.
- [6] Волчков В.В. Теоремы типа Мореры в областях со слабым условием конуса // Изв. вузов. Матем. 1993. № 10. С. 15–20.
- [7] Дзядык В.К. Геометрическое определение аналитических функций // УМН. 1960. Т. 15. № 1. С. 191–194.
- [8] Волчков В.В. Проблемы типа Помпейю на многообразиях // Докл. АН Украины. 1993. № 11. С. 9–12.
- [9] Волчков В.В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 30–36.
- [10] Volchkov V. V. Morera type theorems on the unit disk // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 49–63.
- [11] Berenstein C. A., Chang D. C., Pascuas D., Zalcman L. Variations on the theorem of Morera // Contemp. Math. 1992. V. 137. P. 63–78.
- [12] Кириллов А.А., Гвишмани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
- [13] Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
- [14] Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968.
- [15] Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.