Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, Т. У. Аубакиров, Теорема Харди–Литтлвуда для рядов Фурье–Хаара, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 340–347

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:21:38

УДК 517.51

ТЕОРЕМА ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ–ХААРА

Т. У. Аубакиров, Е. Д. Нурсултанов

Доказана интерполяционная теорема для одного класса сетевых пространств. В терминах коэффициентов Фурье–Хаара получен критерий принадлежности функции сетевому пространству $N_p^q(M)$, где $1 < p < \infty$, M – множество всех отрезков из $[0, 1]$. Как следствие приведен аналог теоремы Харди и Литтлвуда для рядов Фурье–Хаара.

Библиография: 7 названий.

Хорошо известна теорема Харди–Литтлвуда [1] для тригонометрических рядов:

Пусть $1 < p < \infty$, $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$. Если $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ – монотонно невозрастающая последовательность, то для того чтобы $f \in L_p[0, \pi]$, необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{p-2} a_k^p. \quad (1)$$

Имеется [2] аналог этой теоремы для монотонных функций.

Если f монотонна и $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$, то для того чтобы $f \in L_p[0, \pi]$, необходима и достаточна сходимость ряда (1).

Как видно из этих результатов, условия принадлежности пространству L_p для монотонных функций и функций с монотонными коэффициентами одни и те же, т.е. сходимость ряда (1).

Для рядов по системе Хаара имеет место иная ситуация. П. Л. Ульянов в работе [3] доказал, что если коэффициенты Фурье–Хаара $\{c_k\}$ монотонны, то для того чтобы функция f принадлежала пространству $L_p[0, 1]$ при $1 < p < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$, т.е. сходиллся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

В работе, в частности, доказано следующее утверждение.

Пусть $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – система Хаара, $1 < p < \infty$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k$. Если $f(x)$ – монотонная функция, то для того чтобы $f \in L_{pq}$, необходимо и достаточно чтобы сходиллся ряд

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)q} \left(\sup_{2^k \leq \nu < 2^{k+1}} |c_\nu| \right)^q \right)^{1/q}. \quad (2)$$

Также получены неравенства, являющиеся аналогами неравенств Пэли [1].

Методы исследования опираются на интерполяционные теоремы для некоторого класса сетевых пространств, доказанные в п. 1.

1. Интерполяционные свойства сетевых пространств. Пусть μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, M – некоторое фиксированное семейство множеств конечной меры из $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем M будем называть “сетью”. Для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на каждом e из M , определим функцию

$$\bar{f}(t, M) = \sup_{\substack{e \in M \\ |e| > t}} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x) d\mu \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем множествам $e \in M$, мера которых $|e| \stackrel{\text{def}}{=} \mu e > t$, $t \in (0, \infty)$. В случае $\sup\{|e| : e \in M\} = \alpha < \infty$ и $t > \alpha$ положим $\bar{f}(t, M) = 0$. Функция $\bar{f}(t, M)$ называется *усреднением функции f по сети M* .

Через $N_{pq}(M)$, $0 < p, q \leq \infty$, обозначим множество функций f , для которых при $q < \infty$

$$\|f\|_{N_{pq}(M)} = \left(\int_0^\infty (t^{1/p} \bar{f}(t, M))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

и при $q = \infty$

$$\|f\|_{N_{p\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{1/p} \bar{f}(t, M) < \infty.$$

Отметим некоторые свойства пространств N_{pq} .

- а) Если $M_1 \subset M_2$, то $N_{pq}(M_2) \hookrightarrow N_{pq}(M_1)$.
- б) При $0 < q \leq q_1 \leq \infty$ $N_{pq}(M) \hookrightarrow N_{pq_1}(M)$.
- в) Если сеть M такова, что $\sup_{e \in M} |e| = \alpha < \infty$, то при $0 < p < p_1 \leq \infty$, $0 < q, q_1 \leq \infty$ верно $N_{p_1 q_1}(M) \hookrightarrow N_{pq}(M)$.

Пусть (A_0, A_1) – совместимая пара банаховых пространств [4],

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}), \quad a \in A_0 + A_1,$$

– функционал Петре.

При $0 < q < \infty$, $0 < \theta < 1$

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta, \infty} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, \infty}} = \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, a) < \infty \right\}.$$

В работе [5] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$.

Если M – произвольная сеть в $\mathbb{R}^n$, то

$$(N_{p_0 q_0}(M), N_{p_1 q_1}(M))_{\theta q} \hookrightarrow N_{pq}(M),$$

где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Целью данного пункта является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leq q_0, q_1, q \leq \infty$, $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$. Тогда

$$(N_{p_0 q_0}(M), N_{p_1 q_1}(M))_{\theta q} = N_{pq}(M).$$

ЛЕММА 1. Если семейство M таково, что для любого $\tau > 0$ и некоторого $r > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{|\phi| \leq \bar{f}(\tau)} \left(\sup_{s \geq \tau} s^{1/r} \overline{(f - \phi)}(s; M) \right) \leq c \sup_{\tau \geq s > 0} s^{1/r} \bar{f}(s; M), \quad (3)$$

где c – константа, которая не зависит от f и τ , то при $r < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$

$$(N_{p_0 q_0}(M), N_{p_1 q_1}(M))_{\theta q} = N_{pq}(M),$$

где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если выполнено условие леммы, то

$$(N_{r\infty}(M), N_{\infty\infty}(M))_{\theta q} = N_{pq}(M), \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

и тогда по теореме о реитерации для вещественного метода [4] получим утверждение леммы.

Из условия на сеть M имеем

$$\begin{aligned} K(t, f) &\leq K(t, f; N_{r\infty}, N_{\infty\infty}) \\ &\leq c \inf_{|\phi| \leq \bar{f}(\tau)} \sup_{\tau \geq s > 0} s^{1/r} \overline{(f - \phi)}(s) + t \bar{f}(\tau). \end{aligned}$$

Принимая во внимание монотонность $\bar{f}(s)$, при $\tau = t^r$ получим

$$\begin{aligned} K(t, f) &\leq r \sup_{\tau \geq s} \int_0^s \bar{f}(y) y^{1/r-1} dy + 2r \int_0^{t^r} \bar{f}(y) y^{1/r-1} dy \\ &= 3r \int_0^{t^r} \bar{f}(y) y^{1/r-1} dy \end{aligned}$$

или

$$\|f\|_{(N_{r\infty}, N_{\infty\infty})_{\theta q}} \leq 3r \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \int_0^{t^r} \bar{f}(y) y^{1/r-1} dy \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Далее, производя замену во внутреннем интеграле $y \rightarrow yt^r$ и применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\|f\|_{(N_{r\infty}(M), N_{\infty\infty}(M))_{\theta q}} \leq c \int_0^1 \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} \bar{f}(yt^r))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} y^{1/r} \frac{dy}{y}.$$

И, наконец, во внутреннем интеграле произведя замену $yt^r \rightarrow t$, получим

$$\|f\|_{(N_{r\infty}(M), N_{\infty\infty}(M))_{\theta q}} \leq c \left(\int_0^1 y^{\theta/r-1} dy \right) \|f\|_{N_{pq}(M)} = c_1 \|f\|_{N_{pq}(M)}$$

или

$$N_{pq}(M) \hookrightarrow (N_{r\infty}(M), N_{\infty\infty}(M))_{\theta q},$$

где $1/p = (1 - \theta)/r$.

С другой стороны, из теоремы 1 следует обратное вложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{R}$. Покажем, что для этой сети при $r = 1$ выполняется условие (3) из леммы 1.

Для функции f и фиксированного $\tau > 0$ определим функцию $\phi_0(x)$ следующим образом. Разобьем $\mathbb{R}$ на непересекающиеся полуинтервалы $\{I_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ меры $|I_k| = \tau$. Пусть

$$\phi_0(x) = \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f(y) dy \quad \text{при } x \in I_k.$$

Заметим, что $|\phi_0(x)| \leq \bar{f}(\tau, M)$ и $\int_{I_k} (f(x) - \phi_0(x)) dx = 0$ для любых $k \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого отрезка $I: |I| \geq \tau$ верно

$$\begin{aligned} \left| \int_I (f - \phi_0)(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=m}^{m+N} \int_{I_k} (f(x) - \phi_0(x)) dx + \int_{I \cap I_{m-1}} (f - \phi_0)(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{I \cap I_{m+N+1}} (f(x) - \phi_0(x)) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{I \cap I_{m-1}} f(x) dx \right| + \left| \int_{I \cap I_{m+N+1}} f(x) dx \right| \\ &\quad + (|I \cap I_{m-1}| + |I \cap I_{m+N+1}|) \bar{f}(\tau). \end{aligned}$$

Или при $s_1 = |I \cap I_{m-1}| \leq \tau$, $s_2 = |I \cap I_{m+N+1}| \leq \tau$

$$\left| \int_I (f - \phi_0)(x) dx \right| \leq s_1 \bar{f}(s_1, M) + s_2 \bar{f}(s_2, M) + 2\tau \bar{f}(\tau, M);$$

следовательно,

$$\left| \int_I (f - \phi_0)(x) dx \right| \leq 4 \sup_{\tau \geq s > 0} s \bar{f}(s, M).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \inf_{|\phi| \leq \bar{f}(\tau)} \sup_{s \geq \tau} s \overline{(f - \phi_0)} &\leq \sup_{s \geq \tau} s \overline{(f - \phi_0)}(s) = \sup_{s \geq \tau} s \sup_{|I| \geq s} \frac{1}{|I|} \left| \int_I (f - \phi_0)(x) dx \right| \\ &\leq 4 \sup_{\tau \geq t > 0} t \bar{f}(t) \sup_{s \geq \tau} \sup_{|I| \geq s} \frac{s}{|I|} = 4 \sup_{\tau \geq t > 0} t \bar{f}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, сеть M удовлетворяет условию леммы 1 и, следовательно, теорема 2 доказана.

2. Теорема Харди–Литтлвуда и неравенства типа Пэли.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, M – множество всех отрезков в $\mathbb{R}$. Тогда для того чтобы $f \in N_{pq}(M)$ необходимо и достаточно, чтобы для последовательности ее коэффициентов Фурье–Хаара $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ имело место условие

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)q} |b_k|^q \right)^{1/q} < \infty,$$

где $b_k = \sup_{2^k \leq \nu < 2^{k+1}} |c_\nu|$, $k = 0, 1, 2, \dots$, причем

$$\|f\|_{N_{pq}(M)} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)q} |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p < \infty$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k$. Докажем неравенство

$$\|b\|_{l_{\infty}^{\sigma}} \leq c \|f\|_{N_{p\infty}(M_0)}, \quad (4)$$

где $\sigma = 1/2 - 1/p$. По определению

$$\begin{aligned} \|b\|_{l_{\infty}^{\sigma}} &= \sup_{k \geq 0} 2^{k(1/2-1/p)} \max_{2^k \leq \nu < 2^{k+1}} |c_{\nu}| \\ &\leq 2 \sup_{k \geq 0} 2^{k(1/2-1/p)} \max_{1 \leq \nu \leq 2^k} 2^{k/2} \left| \int_{(\nu-1)/2^k}^{\nu/2^k} f(x) dx \right| \\ &\leq 2 \sup_{Q \in M} \frac{1}{|Q|^{1/p'}} \left| \int_Q f(x) dx \right| = 2 \|f\|_{N_{p\infty}(M)}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (4) доказано для произвольного $1 < p < \infty$. Пространство с нормой $\|c\| = \|b\|_{l_q^{\sigma}}$ является ретракцией пространства $l_q^{\sigma}(l_{\infty})$ [6]. Поэтому из интерполяционных свойств пространств $l_q^{\sigma}(l_{\infty})$ и теоремы 2 получим “сильное” неравенство

$$\|b\|_{l_q^{1/2-1/p}} \leq c \|f\|_{N_{pq}(M)}$$

для произвольных $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$.

Покажем обратное неравенство, действуя по той же схеме. Пусть Q – произвольный отрезок из сети M . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|^{1/p'}} \left| \int_Q f(x) dx \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|Q|^{1/p'}} \left| \int_Q \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} c_{\nu} \chi_{\nu}(x) dx \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|Q|^{1/p'}} \left| \sum_{2^{k-1} \leq \nu < 2^k} c_{\nu} \int_Q \chi_{\nu}(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Из определений функций $\chi_{\nu}(x)$ следует, что не более двух слагаемых в сумме

$$\sum_{2^{k-1} \leq \nu < 2^k} c_{\nu} \int_Q \chi_{\nu}(x) dx$$

отлично от нуля, а именно, те слагаемые, где носители функций χ_{ν} содержат концы отрезка. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|^{1/p'}} \left| \int_Q f(x) dx \right| &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|Q|^{1/p'}} \max_{2^{k-1} \leq \nu < 2^k} |c_{\nu}| \cdot 2^{k/2} \min \left(|Q|, \frac{1}{2^k} \right) \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1/2-1/p'} \max_{2^{k-1} \leq \nu < 2^k} |c_{\nu}|. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора отрезка Q получим

$$\|f\|_{N_{p\infty}(M)} = \sup_{|Q| \in M} \frac{1}{|Q|^{1/p'}} \left| \int_Q f(x) dx \right| \leq c \|a_k\|_{l_1^{1/2-1/p'}}.$$

Из интерполяционных свойств пространств $l_r^\sigma(l_\infty)$ и теоремы 2 получим

$$\|f\|_{N_{pq}(M)} \leq c \|b\|_{l_q^{1/2-1/p}} = c \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{q(1/2-1/p)k} \sup_{2^k \leq \nu < 2^{k+1}} |c_\nu|^q \right)^{1/q}.$$

Теорема доказана.

Функцию f назовем *обобщенно-монотонной* (невозрастающей), если для любого $x \in (0, 1]$ имеет место неравенство

$$|f(x)| \leq \frac{B}{|x|} \left| \int_0^x f(y) dy \right|.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$, f – обобщенно-монотонная. Тогда для того, чтобы $f \in L_{pq}[0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы для последовательности ее коэффициентов Фурье–Хаара $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ имело место неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)q} |b_k|^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Утверждение данной теоремы следует из теоремы 3, так как для обобщенно-монотонных функций, когда M – множество всех отрезков из $[0, 1]$, нормы пространств $N_{pq}(M)$ и $L_{pq}[0, 1]$ эквивалентны (имеют место двусторонние неравенства).

А. В. Масловым [7] были получены неравенства типа Пэли для рядов Фурье–Хаара: пусть монотонная последовательность положительных чисел $\{v_m\}_{m=0}^\infty$ такова, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} (v_m(m+1))^{-1} < \infty.$$

Тогда

- 1) для любого $p \in (1, 2)$ и всех функций $f \in L_p$ справедливы неравенства

$$C_1 \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(f)|^p (v_m(m+1))^{p/2-1} \leq \|f\|_p^p \leq C_2 \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(f)|^p (m+1)^{p/2-1};$$

- 2) для любого $p > 2$ и всех функций $f \in L_p$ справедливы неравенства

$$C_3 \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(f)|^p (m+1)^{p/2-1} \leq \|f\|_p^p \leq C_4 \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(f)|^p (v_m(m+1))^{p/2-1}.$$

Следующая теорема в некотором смысле дополняет эти результаты.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – система Хаара, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x)$,

$$\vartheta = \{\vartheta_k\} = \left\{ \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} c_{\nu} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad u = \{u_k\} = \left\{ 2^{k/2} \max_{2^{k-1} \leq \nu < 2^k} |c_{\nu}| \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

а) Если $1 < p < 2$, $p' = p/(p-1)$ и $f \in L_p[0, 1]$, то верно неравенство

$$\|\vartheta\|_{l_{p'q}} \leq c \|f\|_{L_{pq}[0,1]}.$$

б) Если $p > 2$ и $u \in l_{p'q}$, то $f \in L_{pq}[0, 1]$ и верно неравенство

$$\|f\|_{L_{pq}[0,1]} \leq c \|u\|_{l_{p'q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему функций

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} \chi_{\nu}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Данная система функций является ортогональной, нормированной и ограниченной в совокупности. Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по этой системе имеют вид

$$\int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx = \int_0^1 f(x) \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} \chi_{\nu}(x) dx = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} c_{\nu} = \vartheta_k.$$

Из неравенства Пэли при $1 < p < 2$ получим

$$\|\vartheta\|_{l_{p'q}} \leq c \|f\|_{L_{pq}[0,1]}.$$

Докажем пункт б) теоремы 5. При $p = \infty$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_{\infty}} = \sup_x |f(x)| \leq \sup_x \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} c_{\nu} \chi_{\nu}(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} \max_{2^{k-1} \leq \nu < 2^k} |c_{\nu}| = \|u\|_{l_1}.$$

Для $p = 2$ из равенства Парсеваля получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} c_{\nu}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{k/2} \max_{2^{k-1} \leq \nu < 2^k} |c_{\nu}| \right)^2 \right)^{1/2} = \|u\|_{l_2}. \end{aligned}$$

Используя интерполяционные свойства соответствующих пространств, получим

$$\|f\|_{L_{pq}} \leq c \|u\|_{l_{p'q}}$$

при $2 < p < \infty$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. М.: Мир, 1965.
- [2] Boas R. P., Jr. Integrability Theorems and Transforms. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. V. 38. New York: Springer-Verlag, 1966.
- [3] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. 1964. Т. 63 (105). № 3. С. 356–391.
- [4] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [5] Nursultanov E. D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlewood type inequalities // East J. Approx. 1998. № 2. Р. 243–275.
- [6] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференцируемые операторы. М.: Мир, 1988.
- [7] Маслов А. В. О коэффициентах Фурье по системе Хаара функций из пространств L_p // Матем. сб. 1985. Т. 126 (168). № 4. С. 490–514.

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Караганда
E-mail: nurs@kargu.krg.nz

Поступило
20.05.2001