Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Я. Глаголева, Достаточное условие существования “мертвой зоны” у решений вырождающихся полулинейных параболических уравнений и неравенств, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 824–831

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1900>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:33:42

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ “МЕРТВОЙ ЗОНЫ” У РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Р. Я. Глаголева

“Мертвой зоной” определенного в области G и не тождественно равного нулю в ней решения u параболического уравнения (или неравенства) называется подобласть области G , в которой решение u является тождественно нулевым.

Для невырождающихся полулинейных уравнений эллиптического и параболического типов вопрос о существовании мертвой зоны рассматривался рядом авторов: Дж. Диазом [1], М. Чипо [2], В. В. Чистяковым [3], [4] и др. Для вырождающихся полулинейных эллиптических уравнений и неравенств этот вопрос рассматривался в работе В. А. Кондратьева и Е. М. Ландиса [5] и в работе Е. М. Ландиса [6]. Для вырождающихся параболических полулинейных уравнений и неравенств этот вопрос ранее не рассматривался.

Оказывается, существует зависимость максимума модуля решения от области и уравнения (неравенства), гарантирующая наличие у решения мертвой зоны.

В данной статье это устанавливается для решений вырождающихся полулинейных параболических уравнений и неравенств с эллиптическим оператором как в недивергентной, так и в дивергентной формах. При этом характер вырождения несущественен.

§ 1. Случай параболических уравнений и неравенств с эллиптическим оператором в недивергентной форме

Пусть D – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Pi = \{(x, t) \mid x \in D, t \in (0, T)\}$ и в цилиндре Π определен оператор

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2, \quad (3)$$

$$|b_i(x, t)| \leq M, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Будем рассматривать полулинейные параболические уравнения вида

$$Lu - u_t = |u|^q \operatorname{sgn} u, \quad 0 < q < 1, \quad (5)$$

с достаточно гладкими коэффициентами a_{ij} (например, удовлетворяющими условию Дини) и параболические полулинейные неравенства вида

$$(\operatorname{sgn} u)(Lu - u_t) - |u|^q \geq 0, \quad (6)$$

гладкость коэффициентов a_{ij} в которых требоваться не будет.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА. Пусть G – область, содержащаяся в цилиндре Π , и Γ – ее параболическая граница.

Пусть $u, v \in C^{2,1}(G) \cap C(\overline{G})$ – положительные решения неравенств

$$Lu - u_t \geq u^q, \quad (7)$$

$$Lv - v_t \leq v^q, \quad (8)$$

удовлетворяющие условию

$$u|_{\Gamma} \leq v|_{\Gamma}. \quad (9)$$

Тогда

$$u|_G \leq v|_G. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D_R : $|x| < R$ и $\Pi_R^{[0,T]} = D_R \times (0, T]$. Пусть $u \in C^{2,1}(\Pi_R^{[0,T]}) \cap C(\overline{\Pi_R^{[0,T]}})$ – решение уравнения (5)

$$Lu - u_t = |u|^q \operatorname{sgn} u, \quad 0 < q < 1.$$

Утверждается, что для любых чисел β, p и s , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \beta < 1, \quad p > \frac{1}{1-q}, \quad s > \frac{2}{1-q}, \quad (11)$$

существуют числа $R_0, 0 < R_0 < R$, и $T_0, 0 < T_0 < \beta T$, зависящие от $M, q, n, R, T, \beta, p, s$ такие, что если

$$\max_{\Pi_R^{[0,T]}} |u| \leq \min \{ R_0^s, (\beta T - T_0)^p \}, \quad (12)$$

то

$$u|_{|x|=0, t \in [\beta T, T]} = 0. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $G^+ = \{(x, t) \in \Pi_R^{[0, T]} \mid u > 0\}$, $G^- = \{(x, t) \in \Pi_R^{[0, T]} \mid u < 0\}$. Рассмотрим функцию

$$v = \begin{cases} r^s + (\beta T - t)^p, & t \in [0, \beta T), \\ r^s, & t \in [\beta T, T], \end{cases} \quad (14)$$

где $r = |x|$, и подберем R_0 , $0 < R_0 < R$, и T_0 , $0 < T_0 < \beta T$, так, чтобы функция v была суперпараболической (соответственно, функция $-v$ — субпараболической) в цилиндре $\Pi_{R_0}^{[T_0, T]} = \{(x, t) \mid |x| < R_0, T_0 < t \leq T\}$. Имеем

$$\begin{aligned} Lv - v_t - v^q &= r^{s-2} \left[s(s-2) \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} + s \sum_{i=1}^n a_{ii} \right] \\ &\quad + s \sum_{i=1}^n b_i x_i r^{s-2} + p(\beta T - t)^{p-1} - [r^s + (\beta T - t)^p]^q \\ &\leq r^{s-2} \left\{ s(s-2) + sn(1 + MR) - \frac{[r^s + (\beta T - t)^p]^q}{2r^{s-2}} \right\} \\ &\quad + (\beta T - t)^{p-1} \left\{ p - \frac{[r^s + (\beta T - t)^p]^q}{2(\beta T - t)^{p-1}} \right\} \\ &\leq r^{s-2} \left\{ s(s-2) + sn(1 + MR) - \frac{1}{2r^{s(1-q)-2}} \right\}_I \\ &\quad + (\beta T - t)^{p-1} \left\{ p - \frac{1}{2(\beta T - t)^{p(1-q)-1}} \right\}_{II}. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства (11), можно выбрать R_0 , $0 < R_0 < R$, так, чтобы при $0 < r \leq R_0$ было $\{ \}_I \leq 0$, и выбрать T_0 , $0 < T_0 < \beta T$, так, чтобы при $T_0 \leq t \leq T$ было $\{ \}_{II} \leq 0$. Тогда в $\Pi_{R_0}^{[T_0, T]} = \{(x, t) \mid |x| \leq R_0, T_0 \leq t \leq T\}$ будет

$$Lv - v_t - v^q \leq 0. \quad (15)$$

Найдем минимум v на параболической границе Γ_0 цилиндра $\Pi_{R_0}^{[T_0, T]}$. Имеем

$$\min_{|x|=R_0, T_0 \leq t \leq T} v = R_0^s, \quad \min_{|x| < R_0, t=T_0} v = (\beta T - T_0)^p$$

и

$$\min_{\Gamma_0} v = \min \{ R_0^s, (\beta T - T_0)^p \}. \quad (16)$$

Полагая $\max_{\Pi_R^{[0, T]}} |u| = m$ и учитывая (12) и (16), получим, что на параболических границах γ^+ и γ^- пересечений $G^+ \cap \Pi_{R_0}^{[T_0, T]}$ и $G^- \cap \Pi_{R_0}^{[T_0, T]}$ выполняются неравенства

$$u|_{\gamma^+} \leq m \leq v|_{\gamma^+}, \quad u|_{\gamma^-} \geq -m \geq -v|_{\gamma^-}, \quad (17)$$

и согласно принципу максимума будет $-v \leq u \leq v$ в $\Pi_{R_0}^{[T_0, T]}$. Но при $|x| = 0$ и $t = \beta T$ имеем $v = v_t = 0$, а потому

$$v|_{|x|=0, \beta T \leq t \leq T} \equiv 0.$$

Отсюда и из неравенств (17) следует равенство (13).

ТЕОРЕМА 2. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $\Pi = D \times (0, T]$, $\delta > 0$, $D_\delta = \{x \in D \mid \text{dist}(x, \partial D) \geq \delta\}$ и β , $0 < \beta < 1$, – произвольное число. Пусть $u \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$ – решение уравнения (5).

Утверждается, что существует константа $m > 0$, зависящая от области D в основании цилиндра Π и его высоты T , чисел δ и β и от уравнения, такая, что из неравенства $|u|_\Pi \leq m$ следует

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Pi_1 = \{(x, t) \mid x \in D_\delta, t \in [\beta T, T]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\forall \tilde{x} \in D_\delta$ рассмотрим цилиндр $\tilde{\Pi} = \{(x, t) \mid |x - \tilde{x}| < \delta, 0 < t \leq T\}$ и применим теорему 1 при $R = \delta$ к решению u в $\tilde{\Pi}$, согласно которой существуют R_0 и T_0 , зависящие от $R = \delta, T, n, M, q$ и β , такие, что при $m = \min[R_0^s, (\beta T - T_0)^p]$, где $s > 2/(1 - q)$, $p > 1/(1 - q)$, будет $u(\tilde{x}, t) = 0$ для $\forall t \in [\beta T, T]$. В силу произвольности $\tilde{x} \in D_\delta$ имеем $u \equiv 0$ в Π_1 .

Доказанные принцип максимума и теоремы 1 и 2 остаются справедливыми для классических решений $u \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$, вырождающихся полулинейных параболических неравенств (6). Последние, в отличие от уравнений (5), могут иметь бесчисленное множество классических решений и в том случае, когда коэффициенты $a_{ij}(x, t)$ являются лишь измеримыми ограниченными функциями.

§ 2. Случай параболических неравенств

с эллиптическим оператором в дивергентной форме

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и в ней определен вырождающийся эллиптический оператор

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (18)$$

с ограниченными измеримыми коэффициентами $a_{ij}(x)$, удовлетворяющими условиям

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq |\xi|^2. \quad (20)$$

Пусть $\Pi = D \times (0, T]$. Рассмотрим в цилиндре Π полулинейное параболическое неравенство

$$(\operatorname{sgn} u)(Lu - u_t) - |u|^q \geq 0, \quad (21)$$

где L – оператор (18) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (19), (20), и q удовлетворяет неравенству $0 < q < 1$.

Обобщенным решением неравенства будем называть функцию $u \in H^1(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$, удовлетворяющую при $\forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\Pi}(\Pi)$, $\varphi > 0$, в Π интегральному неравенству

$$\int_{\Pi} \left[(\operatorname{sgn} u) \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial t} \varphi \right) + |u|^q \varphi \right] dx dt \leq 0 \quad (22)$$

($\overset{\circ}{H}{}^1_{\Pi}(G)$ – замыкание по норме H^1 класса функций $\varphi \in C^1(G)$, обращающихся в нуль в окрестности параболической границы G).

Для таких решений справедлив следующий принцип максимума.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА. Пусть G – область, содержащаяся в цилиндре Π , и ∂G – ее параболическая граница.

Если $u|_{\partial G} \leq 0$, то $u|_G \leq 0$.

Если $u|_{\partial G} \geq 0$, то $u|_G \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого принципа максимума также стандартно.

Докажем теперь достаточное условие существования у решений неравенства (21) (понимаемых в смысле интегрального неравенства (22)) мертвой зоны.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $D: |x| < R$, $\Pi = D \times (0, T]$, $D': |x| < r_0 < R$, $\Pi' = D' \times (0, T]$, $G = \Pi \setminus \Pi'$.

Пусть $u \in H^1(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$ – обобщенное решение неравенства (21), в котором коэффициенты $a_{ij}(x)$ кроме условий (19) и (20) удовлетворяют дополнительному условию

$$a_{ij} \in C^1(G), \quad \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right| \leq e^{p/(r-r_0)^{2s}}, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (23)$$

где $r = |x|$, s – достаточно большое натуральное число, а число p удовлетворяет неравенству $0 < p < 1 - q$. Пусть T_0 , $0 < T_0 < T$, – произвольно фиксированное число.

Утверждается, что существует константа $m > 0$, зависящая от n, q, p, s, R, T, r_0 и T_0 , такая, что из неравенства

$$\max_{\Pi} |u| \leq m \quad (24)$$

следует

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Pi}_0 = \{(x, t) \mid |x| \leq r_0, T_0 \leq t \leq T\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на три части.

1°. Найдем положительную в G функцию $z(x, t) \in C^{2,1}(G) \cap C(\overline{G})$, удовлетворяющую неравенствам

$$Lz - z_t \leq z^q, \quad z|_{|x|=R} \geq A, \quad (25)$$

(число $A > 0$ будет выбрано ниже) в виде

$$z(x, t) = v(x) + w(t), \quad (26)$$

где v и w неотрицательны и удовлетворяют условиям

$$v|_{|x|=r_0} = 0, \quad (27)$$

$$w(T_0) = 0. \quad (28)$$

Подставляя выражение для z из (26) в (25), получим

$$Lv - \frac{dw}{dt} \leq (v + w)^q. \quad (29)$$

Так как $(v + w)^q \geq \frac{1}{2}v^q + \frac{1}{2}w^q$, то мы удовлетворим неравенству (29), если выберем v и w так, чтобы выполнялись неравенство

$$Lv \leq \frac{1}{2}v^q \quad (30)$$

и равенство

$$-\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}w^q. \quad (31)$$

Положим

$$v(x) = \begin{cases} C \exp \left[-\frac{1}{(r - r_0)^{2s}} \right] & \text{при } r_0 < r \leq R, \\ 0 & \text{при } r = r_0 \end{cases}$$

и выберем $C > 0$ и $s > 0$ так, чтобы v удовлетворяло неравенству (30).

Имеем при $r_0 < r \leq R$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i} &= C e^{-1/(r-r_0)^{2s}} \frac{2s}{(r-r_0)^{2s+1}} \gamma_i, \quad \gamma_i = \frac{x_i - x_{0i}}{r - r_0}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} &= \begin{cases} C e^{-1/(r-r_0)^{2s}} \left[\frac{4s^2}{(r-r_0)^{4s+4}} - \frac{2s(2s+2)}{(r-r_0)^{2s+2}} \right] \gamma_i \gamma_j, & i \neq j, \\ C e^{-1/(r-r_0)^{2s}} \left(\left[\frac{4s^2}{(r-r_0)^{4s+4}} - \frac{2s(2s+2)}{(r-r_0)^{2s+2}} \right] \gamma_i^2 \right. \\ \quad \left. + \frac{2s}{(r-r_0)^{2s+2}} \right), & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Lv &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \\
&= Ce^{-1/(r-r_0)^{2s}} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left[\frac{4s^2}{(r-r_0)^{4s+4}} - \frac{2s(2s+2)}{(r-r_0)^{2s+2}} \right] \gamma_i \gamma_j \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n a_{ii} \frac{2s}{(r-r_0)^{2s+2}} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{2s}{(r-r_0)^{2s+1}} \gamma_i \right\} \\
&\leq Ce^{-1/(r-r_0)^{2s}} \left\{ \left[\frac{4s^2}{(r-r_0)^{4s+4}} + \frac{2s(2s+2)}{(r-r_0)^{2s+2}} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{n2s}{(r-r_0)^{2s+2}} + \frac{n^2 2s}{(r-r_0)^{2s+1}} e^{p/(r-r_0)^{2s}} \right\}.
\end{aligned}$$

(Здесь были учтены неравенства (19), (20) и (23).)

Так как $0 < p < 1 - q$, то найдутся такое число $M > 0$ и такое достаточно большое натуральное число s , что выражение в фигурных скобках в правой части последнего неравенства будет меньше $M \exp[-q/(r-r_0)^{2s}]$, и мы удовлетворим неравенству (30), если выберем число $C > 0$ так, чтобы имело место неравенство

$$CM \leq \frac{1}{2} C^q,$$

в частности, если положим

$$C = \left(\frac{1}{2M} \right)^{1/(1-q)}. \quad (32)$$

Решая уравнение (31) на отрезке $[0, T]$, получим

$$w(t) = \left[(w(0))^{1-q} - \frac{1-q}{2} t \right]^{1/(1-q)}. \quad (33)$$

Удовлетворяя условию (28), найдем

$$w(0) = \left[\frac{1-q}{2} T_0 \right]^{1/(1-q)}. \quad (34)$$

Так как $0 < q < 1$, то $w'(T_0) = 0$, что совместно с условием (28) дает: $w(t) \equiv 0$ на $[T_0, T]$.

Итак, функция $z(x, t) = Ce^{-1/(r-r_0)^{2s}} + w(t)$ при $(x, t) \in G$ с $w(t)$ из (33) и со значениями C и $w(0)$, определяемыми соответственно равенствами (32) и (34), удовлетворяет в области G неравенствам (25) при

$$A = C \exp \left[-\frac{1}{(R-r_0)^{2s}} \right]. \quad (35)$$

2°. Рассмотрим теперь в цилиндре $\bar{\Pi}$ барьерную функцию

$$U(x, t) = \begin{cases} z(x, t), & r_0 < |x| \leq R, \quad 0 \leq t \leq T, \\ w(t), & |x| \leq r_0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $z(x, t)$ и $w(t)$ – найденные выше функции. Очевидно, $U(x, t)$ является обобщенным решением неравенства (21) в смысле интегрального неравенства (22), удовлетворяющее условиям

$$U \geq 0 \text{ в } \Pi,$$

$$U|_{\Gamma} \geq A_1, \text{ где } \Gamma - \text{параболическая граница } \Pi, A_1 = \min(A, w(0))$$

и A определяется равенством (35),

$$U \equiv 0 \text{ в } \Pi_0 = \{(x, t) \mid |x| \leq r_0, T_0 \leq t \leq T\}.$$

3°. Перейдем к доказательству утверждения теоремы 3. Обозначим

$$\Omega^+ = \{(x, t) \in \Pi \mid u > 0\}, \quad \Omega^- = \{(x, t) \in \Pi \mid u < 0\},$$

$\partial\Omega^+, \partial\Omega^-$ – их параболические границы. Очевидно, при $m = A_1$ имеем

$$(u - U)|_{\partial\Omega^+} \leq 0, \quad (u + U)|_{\partial\Omega^-} \geq 0,$$

(ибо на $\gamma^+ = \Gamma \cap \partial\Omega^+$ будет $u \leq m \leq U$, а на $\partial\Omega^+ \setminus \gamma^+$ будет $u = 0 \leq U$; аналогично, на $\gamma^- = \Gamma \cap \partial\Omega^-$ будет $u \geq -m \geq -U$, а на $\partial\Omega^- \setminus \gamma^-$ будет $u = 0 \geq -U$) и по принципу максимума $\forall (x, t) \in \Pi$ будет $-U \leq u \leq U$. Но $U \equiv 0$ в Π_0 . Следовательно, $u \equiv 0$ в Π_0 .

Авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило

20.10.92

Переработанный вариант

19.09.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Diaz J. I. Nonlinear Partial Equations and Free Boundaries. V. 1. Elliptic Equations. Research Notes in Math. № 106. London: Pitman, 1988.
- [2] Chipot M. Variational Inequalities and Flow in Porous Media. Appl. Math. Sci. V. 52. Berlin: Springer Verlag, 1984.
- [3] Чистяков В. В. О некоторых качественных свойствах решений нелинейного полулинейного параболического уравнения второго порядка // УМН. 1986. Т. 41. № 5. С. 199–210.
- [4] Чистяков В. В. О свойствах полулинейных параболических уравнений второго порядка // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1990. № 15.
- [5] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 4. С. 457–468.
- [6] Landis E. M. Some properties of the solution of degenerating semilinear elliptic inequalities // Russian J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 4. P. 483–494.
- [7] Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.