Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ф. Гогуадзе, К взаимоотношению между интегралами Колмогорова и Хенстока, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 832–844

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1901>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:11:58

К ВЗАИМООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛАМИ КОЛМОГОРОВА И ХЕНСТОКА

Д. Ф. Гогоадзе

В этой работе доказывается, что интегралы Хенстока [1] являются более узкими, чем одно обобщение интеграла Колмогорова [2].

Кроме того, на примере показывается, что два интеграла, Римана-полный и вариациональный, введенные Хенстоком, не являются эквивалентными, как доказывает сам автор (см. [1, с. 40, теорема 24.1]). Затем дается адекватное определение вариационального интеграла и устанавливается эквивалентность этих интегралов.

В конце работы обсуждаются отношения между первоначальным интегралом Колмогорова и интегралом Хенстока.

Сперва, для удобства чтения работы, мы приведем изложение теории интегралов Хенстока из его книги [1], сохраняя обозначения и терминологию.

Два действительных числа $u < v$ определяют четыре интервала, а именно: $u \leq x \leq v$, обозначаемый через $[u, v]$ и называемый *замкнутым*; $u < x < v$, обозначаемый через (u, v) и называемый *открытым*; $u < x \leq v$, обозначаемый через $(u, v]$ и называемый *открытым слева*, и $u \leq x < v$, обозначаемый через $[u, v)$ и называемый *открытым справа*. *Элементарным множеством* называется объединение конечного числа попарно непересекающихся замкнутых интервалов.

Разбиение D элементарного множества E представляет собой конечное число попарно непересекающихся интервалов $[u, v]$, содержащихся в E , таких, что объединение их замыканий $[u, v]$ равно E . Иногда будет использоваться обозначение $D\{u, v\}$, чтобы указать общий интервал $[u, v)$ из D .

Семейство $\mathfrak{L}$ интервалов $[t, x)$ называется *слева-полным* в $[u, w]$, если каждому $x \in (v, w]$ соответствует такое число $\delta_1(x) > 0$, что $[t, x)$ принадлежит $\mathfrak{L}$ для всех t из $[x - \delta_1(x), x)$. Тогда $[x - \delta_1(x), x)$ называется *определяющим интервалом семейства $\mathfrak{L}$ в точке x* , а x называется *соответствующей точкой каждого интервала $[t, x)$ из $\mathfrak{L}$* . Семейство $\mathfrak{L}$ называется *слева-полным в элементарном множестве E* , если

$\mathfrak{L}$ является слева-полным в каждом замкнутом интервале, содержащемся в E . Семейство $\mathfrak{R}$ интервалов $[x, u]$ называется *справа-полным в $[v, w]$* , если каждому $x \in [v, w]$ соответствует такое число $\delta_2(x) > 0$, что $[x, u]$ принадлежит $\mathfrak{R}$ для всех u из $(x, x + \delta_2(x))$. Дальнейшие определения для $\mathfrak{R}$ таковы, как для $\mathfrak{L}$.

Следующая теорема, принадлежащая Н. Лузину, является решающей для определения интегралов Хенстока.

ТЕОРЕМА 16.1 [1, с. 22]. *Если $\mathfrak{L}$ является слева-полным, а $\mathfrak{R}$ справа-полным в элементарном множестве E , то существует разбиение E , образованное интервалами из $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$.*

В дальнейшем пара $\{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}\}$ будет обозначаться через $\mathbb{A}$. Следовательно, если $\mathfrak{L}$ является слева-полным, а $\mathfrak{R}$ справа-полным в элементарном множестве E , то будем говорить, что пара $\mathbb{A} = \{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}\}$ является *полной в E* .

СЛЕДСТВИЕ (см. [1, с. 23, пр. 16.4]). *Если $\mathbb{A}$ является полной в элементарном множестве E и E_1 является элементарным множеством, содержащимся в E , то существует разбиение E_1 , образованное интервалами из $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$.*

Отсюда следует, что если $\mathbb{A}$ является полной в E и $[t_1, x_1)$ и $[t_2, x_2)$ принадлежат $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$ и пересечение $[t_1, x_1) \cap [t_2, x_2)$ не пусто, то существует разбиение пересечения $[t_1, x_1) \cap [t_2, x_2)$, образованное интервалами из $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим теперь семейство $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \{\emptyset\}$. Тогда это семейство обладает следующим свойством: если $[t_1, x_1)$ и $[t_2, x_2)$ принадлежат этому семейству, то оно содержит разбиение пересечения $[t_1, x_1) \cap [t_2, x_2)$.

Пусть $\mathbb{A}$ является полной в E . Обозначим через Δ семейство всех разбиений E , образованных интервалами из $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$, со спецификацией, приписанной каждому разбиению, указывающей семейство, из которого взят каждый интервал. Согласно теореме 16.1 Δ не является пустым.

Если f конечная комплексная функция точки на элементарном множестве E и $D\{u, v\} \in \Delta$, то обозначим через

$$(D) \sum f(x)(v - u)$$

сумму на разбиении D , где x является соответствующей точкой из $[u, v)$ согласно данной спецификации. Обозначим через $S(f, x; \mathbb{A}; E)$ семейство всех таких сумм для всех $D \in \Delta$. Комплексное число I называется *Римана-полным интегралом функции f на E* , если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая пара $\mathbb{A}$, что $S(f, x; \mathbb{A}; E)$ находится в замкнутом круге на

комплексной плоскости с центром в I и радиуса ε и, в таком случае, обозначается через $RC(f, x; E)$ или в более обычной форме через

$$(RC) \int_E f dx.$$

Здесь следует отметить, что интеграл $RC(f, x; E)$ зависит от спецификации, т.е. от закона, согласно которому выбирается x из $[u, v]$. Однако любой фиксированной спецификации соответствует единственный интеграл $RC(f, x; E)$ (см. [1, с. 25, пр. 17.1]).

Интервалы в наших разбиениях являются открытыми справа. Функция h таких интервалов определена на элементарном множестве E , если каждому открытому справа интервалу в E соотнесено некоторое число. Мы будем писать $h(u, v)$ вместо $h([u, v))$. Мы рассмотрим две функции интервала: первая, соответствующая интервалам из $\mathfrak{L}$, а вторая – интервалам из $\mathfrak{R}$.

Если h_l, h_r – две функции интервала, то мы обозначим их пару через $\{h_l, h_r\}$ или $\mathbf{h}$. Если $\mathbb{A}$ является полной в E , Δ получается из $\mathbb{A}$ и $D\{u, v\} \in \Delta$, то пусть

$$(D) \sum h_s(u, v) = (D) \sum h_s$$

обозначает сумму слагаемых h_s на разбиении D , где $s = l$, если $[u, v)$ принадлежит $\mathfrak{L}$, и $s = r$, если $[u, v)$ принадлежит $\mathfrak{R}$. Обозначим через

$$S(\{h_l, h_r\}; \mathbb{A}; E) \quad \text{или} \quad S(\mathbf{h}; \mathbb{A}; E)$$

коллекцию всех таких сумм для всех $D \in \Delta$. Комплексное число I называется *Римана-полным интегралом пары $\mathbf{h}$ на E* , если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая пара $\mathbb{A}$, что $S(\mathbf{h}; \mathbb{A}; E)$ находится в замкнутом круге на комплексной плоскости с центром в I и радиуса ε и в таком случае обозначается через

$$RC(\mathbf{h}; E) = RC(\{h_l, h_r\}) = (RC) \int_E \{h_l, h_r\} = (RC) \int_E \mathbf{h}.$$

Функция интервала h называется *конечно-аддитивной на элементарном множестве E* , если $h(u, v) + h(v, w) = h(u, w)$ для всех u, v, w таких, что $u < v < w$ и $[u, w] \subset E$.

Действительная функция интервала h называется *конечно-полуаддитивной сверху на элементарном множестве E* , если $h(u, v) + h(v, w) \leq h(u, w)$ для всех u, v, w таких, что $u < v < w$ и $[u, w] \subset E$.

Пара $\mathbf{h}^*$ конечных функций интервала называется *вариационально эквивалентной паре* $\mathbf{h}$ конечных функций интервала, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существуют $\mathbb{A}$, полная в E , и неотрицательная конечно-полуаддитивная сверху функция интервала χ_1 , такие, что

$$\chi_1(E) < \varepsilon, \quad (1)$$

$$|h_l^*(t, x) - h_l(t, x)| \leq \chi_1(t, x) \quad ([t, x] \subset E, \quad [t, x] \in \mathfrak{L}), \quad (2)$$

$$|h_r^*(t, x) - h_r(t, x)| \leq \chi_1(t, x) \quad ([t, x] \subset E, \quad [t, x] \in \mathfrak{R}). \quad (3)$$

Если, кроме того, $h_l^* = h_r^* = H$ конечно-аддитивна, то $H(E)$ называется *вариациональным интегралом пары* $\mathbf{h}$ и обозначается через

$$(V) \int_E \{h_l, h_r\} = (V) \int_E \mathbf{h},$$

а пара $\mathbf{h}$ называется *вариационально интегрируемой на* E .

Затем для пар функций интервала доказывается теорема об эквивалентности Римана-полного интеграла вариациональному интегралу.

ТЕОРЕМА 24.1 [1, с. 40]. *Если H конечно-аддитивна и вариационально эквивалентна $\mathbf{h}$ на элементарном множестве E , то существует Римана-полный интеграл $RC(\mathbf{h}; E)$ и равен $H(E)$. Обратно, если существует $RC(\mathbf{h}; E)$, то существует соответствующий вариациональный интеграл, и они равны между собой.*

Первая часть этой теоремы является верной, а вторая – нет. Действительно, в доказательстве второй части для построения функции χ_1 полагается

$$\chi_1(E) = \sup \left\{ (D) \sum |h_s(v, w) - H(v, w)| \right\},$$

где $H(v, w) = RC(h; [v, w])$ и верхняя грань берется по всем разбиениям $D \subset \Delta$. Однако, функция χ_1 не всегда удовлетворяет условиям (1)–(3).

В самом деле, функцию h назовем *эквивалентной нулю* (т.е. конечно-аддитивной функции интервала $H \equiv 0$) на E , если для любого $[v, w] \subset E$ имеем $RC(h; [v, w]) = 0$.

Пусть $E = [a, b]$ и $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$ семейство всех $[v, w]$, где $a \leq v < w \leq b$. Определим функцию $h([v, w]) = (w - v)^2$. Тогда функция h неотрицательна, конечно-полуаддитивна сверху и эквивалентна нулю, так как для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение D_ε интервала $[a, b]$, что для любого его продолжения $[v_k, w_k]$ ($k = 1, \dots, n$), т.е. разбиения, составленного из более мелких интервалов, имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n (w_k - v_k)^2 < \varepsilon,$$

что означает $RC(h; [a, b]) = 0$. Откуда в силу неотрицательности функции h следует, что $RC(h; [v, w]) = 0$ для любого $[v, w] \subset [a, b]$. Но

$$\begin{aligned}\chi_1(E) &= \sup \left\{ (D) \sum |h_s(v, w) - H(v, w)| \right\} \\ &= \sup \left\{ (D) \sum |h_s(v, w)| \right\} = (b - a)^2.\end{aligned}$$

Кроме того, функция $h = (w - v)^2$ не является вариационально эквивалентной конечно-аддитивной функции интервала $H \equiv 0$ по Хенстоку. Действительно, допустим противное. Пусть функция $h = (w - v)^2$ вариационально эквивалентна конечно-аддитивной функции $H \equiv 0$. Тогда для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая неотрицательная конечно-полуаддитивная сверху функция интервала χ_1 , что $\chi_1(E) = \chi_1([a, b]) < \varepsilon$ и для любого $[v, w] \subset [a, b]$

$$h(v, w) \leq \chi_1(v, w) \leq \chi_1(a, b) < \varepsilon,$$

что не выполняется на таких $[v, w]$, для которых $w - v \geq \sqrt{\varepsilon}$.

Более того, функция $h = (w - v)^2$ также не является вариационально эквивалентной ни одной конечно-аддитивной функции интервала $H \neq 0$, так как в противном случае согласно первой части теоремы должны иметь

$$H(E) = (v) \int_E h = (RC) \int_E h \neq 0,$$

что невозможно.

Таким образом, понятия Римана-полного интеграла и вариационного интеграла не являются эквивалентными.

Это вызвано тем, что такое определение вариациональной эквивалентности является слишком узким. Оно налагает очень жесткие условия на функцию χ_1 . Адекватным является следующее определение.

Пару $\mathbf{h}^*$ конечных функций интервала назовем *вариационально эквивалентной паре* $\mathbf{h}$ конечных функций интервала на элементарном множестве E , если существуют пара $\mathbb{A}$, полная в E , и такая неотрицательная эквивалентная нулю функция χ , что имеют место неравенства

$$\begin{aligned}|h_l^*(t, x) - h_l(t, x)| &\leq \chi(t, x) \quad ([t, x] \subset E, [t, x] \in \mathfrak{L}), \\ |h_r^*(t, x) - h_r(t, x)| &\leq \chi(t, x) \quad ([t, x] \subset E, [t, x] \in \mathfrak{R}).\end{aligned}$$

Если, кроме того, $h_l^* = h_r^* = H$ конечно-аддитивна, то $H(E)$ называется *вариациональным интегралом пары* $\mathbf{h}$ и обозначается через

$$(V) \int_E \{h_l, h_r\} = (V) \int_E \mathbf{h},$$

а пара $\mathbf{h}$ называется *вариационально интегрируемой на* E .

ТЕОРЕМА 1. *Если H конечно-аддитивна и вариационально эквивалентна паре $\mathbf{h}$ на элементарном множестве E , то существует Римана-полный интеграл $RC(\mathbf{h}; E)$ и равен $H(E)$. Обратно, если существует $RC(\mathbf{h}; E)$, то существует соответствующий вариациональный интеграл, и они равны между собой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала первую часть. Так как функция χ неотрицательна и эквивалентна нулю, то для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая пара $\mathbb{A}$, полная в E , что $S(\chi; \mathbb{A}; E) < \varepsilon$. Пусть $D\{u, v\}$ — произвольное разбиение из Δ . Тогда для суммы S на разбиении $D\{u, v\}$ получаем

$$\begin{aligned} |H(E) - S| &= \left| (D) \sum \{H(u, v) - h_s(u, v)\} \right| \\ &\leqslant (D) \sum |H(u, v) - h_s(u, v)| \leqslant (D) \sum \chi(u, v) < \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда

$$(RC) \int_E \mathbf{h} = H(E).$$

Обратно, пусть существует интеграл

$$(RC) \int_E \mathbf{h}.$$

Тогда для любого $[u, v] \subset E$ существует интеграл

$$H(u, v) = (RC) \int_{[u, v]} \mathbf{h}$$

и функция $H(u, v)$ является конечно-аддитивной на E (см. [1, с. 31, теорема 21.1]). Обозначим $H(u, v) - h(u, v) = R(u, v)$. Тогда функция $\chi(u, v) = |R(u, v)|$ эквивалентна нулю (см. [1, с. 33, теорема 21.2, равенство (21.14)]). Следовательно, функция χ является искомой.

Приведем теперь определение интеграла Колмогорова [2] (см. также [3, с. 196–205]).

Класс множеств, содержащий вместе с любыми двумя своими множествами и их пересечением, называется *мультипликативным* и обозначается через $\mathfrak{M}$. Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Конечный класс попарно непересекающихся множеств $\{E_1, \dots, E_n\}$, принадлежащих классу $\mathfrak{M}$ и объединение которых равно E , называется *разбиением множества E* и обозначается через DE . При этом множества E_k ($k = 1, \dots, n$) называются *компонентами разбиения DE* . Разбиение D_1E называется *продолжением разбиения DE* , если каждый компонент разбиения D_1E является подмножеством некоторого компонента разбиения DE . Пусть $D_1E = \{E'_1, \dots, E'_m\}$ и $D_2E = \{E''_1, \dots, E''_n\}$ — два разбиения. *Произведением разбиений D_1E и*

$D_2 E$ называется разбиение, компонентами которого являются всевозможные пересечения $E'_i \cap E''_k$ ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$) и обозначается через $(D_1, D_2)E$. Очевидно, произведение двух разбиений является продолжением обоих разбиений. Обозначим через $\mathfrak{M}(E)$ множество всех разбиений множества $E \in \mathfrak{M}$. Следовательно, согласно только что сказанному множество $\mathfrak{M}(E)$ является направленным. Поэтому отображения множества $\mathfrak{M}(E)$ в множество комплексных чисел являются направленностями и к ним применима обобщенная теория пределов (см. [4, с. 95–96]).

Будем говорить, что на классе $\mathfrak{M}$ задана комплексная многозначная функция множества μ , если каждому множеству $E \in \mathfrak{M}$ соотнесено однозначно определенное множество $\mu(E)$ конечных комплексных чисел, причем $\mu(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ – пустое множество).

Говорят, что функция μ интегрируема в смысле Колмогорова на множестве E относительно класса $\mathfrak{M}$, если существует такое комплексное число I , что для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $D_\varepsilon E$, что для любого продолжения $\{E_1, \dots, E_n\}$ разбиения $D_\varepsilon E$ при всяком выборе значений $\mu(E_k)$ ($k = 1, \dots, n$) имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \mu(E_k) - I \right| < \varepsilon.$$

В таком случае число I называется интегралом Колмогорова функции μ на множестве E относительно класса $\mathfrak{M}$ и обозначается через

$$(\mathfrak{M}) \int_E \mu(dE).$$

Следующие две теоремы, принадлежащие Колмогорову (см. [2, гл. 2] и [3, с. 200–205]), совместно с доказанной ниже теоремой 5 проливают свет на ошибочность теоремы 2.4.1.

Обозначим через $\mathfrak{M}E$ класс всех компонентов всевозможных разбиений множества $E \in \mathfrak{M}$.

Функции μ_1 и μ_2 называются дифференциально-эквивалентными на классе $\mathfrak{M}E$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $D_\varepsilon E$, что для любого продолжения $\{E_1, \dots, E_n\}$ разбиения $D_\varepsilon E$ при всяком выборе значений $\mu_1(E_k)$ и $\mu_2(E_k)$ ($k = 1, \dots, n$) имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\mu_1(E_k) - \mu_2(E_k)| < \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$(\mathfrak{M}) \int_E |\mu_1 - \mu_2|(dE) = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. *Функции μ_1 и μ_2 дифференциально-эквивалентны на классе $\mathfrak{M}E$ тогда и только тогда, когда для любого $e \in \mathfrak{M}E$*

$$(\mathfrak{M}) \int_e (\mu_1 - \mu_2)(de) = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Функция μ интегрируема в смысле Колмогорова на множестве E относительно класса $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда существует такая конечная конечно-аддитивная функция A , определенная на классе $\mathfrak{M}E$, что разность $R = \mu - A$ дифференциально-эквивалентна нулю на классе $\mathfrak{M}E$. При этом, если такая функция A существует, то*

$$A(e) = (\mathfrak{M}) \int_e \mu(de)$$

для любого $e \in \mathfrak{M}E$.

Рассмотрим теперь следующее обобщение интеграла Колмогорова.

Класс множеств, содержащий вместе с любыми двумя своими множествами E и F и разбиение их пересечения $E \cap F$, назовем *обобщенно-мультипликативным* и обозначим через $\mathfrak{M}_0$. Если $D_1E = \{E'_1, \dots, E'_m\}$ и $D_2E = \{E''_1, \dots, E''_n\}$ — два разбиения множества $E \in \mathfrak{M}_0$, то $\{E_k^{ij}\}$ ($k = 1, \dots, N_{ij}$; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), где $\{E_k^{ij}\}$ ($k = 1, \dots, N_{ij}$) является разбиением пересечения $E'_i \cap E''_j$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), представляет собой продолжение обоих разбиений. Следовательно, множество $\mathfrak{M}_0(E)$ является направленным.

Комплексное число I назовем *обобщенным интегралом Колмогорова функции μ на множестве E относительно класса $\mathfrak{M}_0$* и обозначим его через

$$(\mathfrak{M}_0, 0) \int_E \mu(dE),$$

если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $D_\varepsilon E$, что для любого продолжения $\{E_1, \dots, E_k\}$ разбиения $D_\varepsilon E$ при некотором выборе значений $\mu(E_k)$ ($k = 1, \dots, n$) имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \mu(E_k) - I \right| < \varepsilon.$$

Из этого определения непосредственно следует, что если функция μ однозначна, то

$$(\mathfrak{M}_0, 0) \int_E \mu(dE) = (\mathfrak{M}_0) \int_E \mu(dE).$$

Очевидно, что различным выборам значений $\mu(E_k)$ ($k = 1, \dots, n$) в разбиениях $\{E_1, \dots, E_n\} \in \mathfrak{M}_0 E$ могут соответствовать различные обобщенные интегралы Колмогорова. Однако, любому фиксированному выбору значений $\mu(E_k)$ ($k = 1, \dots, n$) в разбиениях $\{E_1, \dots, E_n\} \in \mathfrak{M}_0(E)$

соответствует единственный обобщенный интеграл Колмогорова. Для того чтобы комплексная многозначная функция μ была бы интегрируемой в смысле Колмогорова на множестве $E \in \mathfrak{M}_0$ относительно обобщенно-мультипликативного класса $\mathfrak{M}_0$ необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные интегралы Колмогорова функции μ на множестве E относительно класса $\mathfrak{M}_0$ были бы равны между собой.

Например, пусть $E = [0, 1]$ и $\mathfrak{M}$ – мультипликативный класс всех интервалов $[u, v]$ ($0 \leq u < v \leq 1$) и f – функция Дирихле. Рассмотрим многозначную функцию интервала μ , которая на каждом интервале $[u, v] \in \mathfrak{M}$ принимает все значения $f(x)(v - u)$, когда x пробегает интервал $[u, v]$. Тогда множество всех обобщенных интегралов Колмогорова многозначной функции μ на множестве E относительно класса $\mathfrak{M}$ совпадает с интервалом $[0, 1]$.

Так же, как для интеграла Колмогорова, можно показать, что обобщенный интеграл Колмогорова обладает всеми свойствами интеграла Колмогорова. Для примера докажем конечную аддитивность обобщенного интеграла Колмогорова.

Пусть $E_0, E \in \mathfrak{M}_0$ и $E_0 \subset E$. Тогда каждое разбиение $DE = \{E_1, \dots, E_n\}$ множества E индуцирует в множестве E_0 разбиение $\{E_k^i\}$ ($i = 1, \dots, n_k$; $k = 1, \dots, n$), где $\{E_k^i\}$ ($i = 1, \dots, n_k$) – разбиение пересечения $E_k \cap E_0$ ($k = 1, \dots, n$), которое обозначается тем же знаком DE_0 .

Пусть $E \in \mathfrak{M}_0$ и $\{E_1, \dots, E_n\}$ – разбиение множества E . Так как существует интеграл

$$I = (\mathfrak{M}_0, 0) \int_E \mu(dE),$$

то для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $D_\varepsilon E = \{E'_1, \dots, E'_{n_1}\}$, что для любого его продолжения $\{E''_1, \dots, E''_{n_2}\}$ при некоторых уже фиксированных выборах значений $\mu(E'_k)$ ($k = 1, \dots, n_1$) и $\mu(E''_k)$ ($k = 1, \dots, n_2$) имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n_1} \mu(E'_k) - \sum_{k=1}^{n_2} \mu(E''_k) \right| < \varepsilon.$$

Для любого E_k ($k = 1, \dots, n$) образуем индуцированное разбиение $D_\varepsilon E_k = \{E_k^i\}$ ($i = 1, \dots, m_k$). Зафиксируем произвольно $D_\varepsilon E_{k_0} = \{E_{k_0}^i\}$ ($i = 1, \dots, m_{k_0}$) и рассмотрим его произвольное продолжение $\{E_k^{i'''}\}$ ($k = 1, \dots, n_3$). Тогда $\{E_k^{i'''}\}$ ($k = 1, \dots, n_3$), E_k^i ($i = 1, \dots, m_k$; $k = 1, \dots, n$; $k \neq k_0$) и $\{E_k^i\}$ ($i = 1, \dots, m_k$; $k = 1, \dots, n$) представляют собой разбиения множества E , являющиеся продолжениями разбиения $D_\varepsilon E$. Поэтому при некоторых уже фиксированных выборах значений функций μ имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n_3} \mu(E_k^{i'''}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n_0}}^n \sum_{i=1}^{m_k} \mu(E_k^i) - \left(\sum_{i=1}^{m_{k_0}} \mu(E_{k_0}^i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n_0}}^n \sum_{i=1}^{m_k} \mu(E_k^i) \right) \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, при указанных выборах значений функции μ

$$\left| \sum_{k=1}^{n_3} \mu(E_k''') - \sum_{i=1}^{m_{k_0}} \mu(E_{k_0}^i) \right| < \varepsilon,$$

что означает существование интеграла

$$(\mathfrak{M}_0, 0) \int_{E_{k_0}} \mu(dE_{k_0}) = I_{k_0}.$$

Поэтому для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $D_k E_k$, являющееся продолжением индуцированного разбиения $D_\varepsilon E_k$, что для любого его продолжения $\{E_{k_i}\}$ ($i = 1, \dots, n_k$) при уже фиксированных выборах значений $\mu(E_{k_i})$ ($i = 1, \dots, n_k$) имеет место неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n_k} \mu(E_{k_i}) - I_k \right| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Рассмотрим теперь объединение разбиений $D_k E_k$ ($k = 1, \dots, n$), т.е. разбиение, компонентами которого являются все компоненты всех разбиений $D_k E_k$ ($k = 1, \dots, n$). Очевидно, оно является продолжением разбиения $D_\varepsilon E$. Обозначим его через $\overline{D}_\varepsilon E$. Тогда для любого продолжения $\{E_{k_i}\}$ ($i = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, n$) разбиения $\overline{D}_\varepsilon E$ при уже фиксированных выборах значений $\mu(E_{k_i})$ ($i = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, n$) имеем

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n_k} \mu(E_{k_i}) - \sum_{k=1}^n I_k \right| < \varepsilon,$$

что означает

$$I = \sum_{k=1}^n I_k.$$

Пусть f – конечная комплексная функция точки, заданная на $E = [a, b]$. Рассмотрим многозначную функцию интервала μ , которая на каждом интервале $[u, v]$ ($a \leq u < v \leq b$) принимает все значения $f(x)(v - u)$, когда x пробегает интервал $[u, v]$ и $\mu(\{b\}) = 0$. Пусть $\mathfrak{M}_0$ – обобщенно-мультипликативный класс интервалов $[u, v]$, содержащихся в E . Если существует обобщенный интеграл Колмогорова функции μ на множестве E относительно класса $\mathfrak{M}_0$

$$(\mathfrak{M}_0, 0) \int_E \mu(dE),$$

то будем говорить, что функция f *обобщенно-интегрируема в смысле Колмогорова на множестве E относительно класса $\mathfrak{M}_0$* и положим по определению

$$(\mathfrak{M}_0, 0) \int_E f dx = (\mathfrak{M}_0, 0) \int_E \mu(dE).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть на элементарном множестве E задана конечная комплексная функция f . Если существует интеграл

$$(RC) \int_E f dx,$$

то существует интеграл

$$(\mathfrak{M}_0, 0) \int_E f dx,$$

и они равны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предполагать, что $E = [a, b]$. Отметим сперва, что если пара $\mathbb{A} = \{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}\}$ является полной в E , то согласно замечанию семейство $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \{\emptyset\}$ является обобщенно-мультипликативным. Также является обобщенно-мультипликативным семейство $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \{\emptyset\} \cup \{b\}$. Пусть существует интеграл

$$(RC) \int_E f dx.$$

Тогда для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая пара $\mathbb{A} = \{\mathfrak{L}, \mathfrak{R}\}$, полная в E , что имеет место неравенство

$$\left| S(f, x; \mathbb{A}; E) - (RC) \int_E f dx \right| < \varepsilon.$$

Пусть $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \{\emptyset\} \cup \{b\}$. Тогда каково бы ни было $D_0 \in \Delta$ для любого его продолжения D имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left| (D) \sum \mu(v - u) + \mu(\{b\}) - (RC) \int_E f dx \right| \\ &= \left| (D) \sum f(x)(v - u) - (RC) \int_E f dx \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

где x соответствует интервалу $[u, v)$ согласно данной спецификации. Это и означает, что существует интеграл

$$(\mathfrak{M}_0, 0) \int_E f dx$$

и имеет место равенство

$$(\mathfrak{M}_0, 0) \int_E f dx = (RC) \int_E f dx.$$

Точно так же доказывается

ТЕОРЕМА 5. Пусть на элементарном множестве E задана пара $\mathbf{h}$ конечных функций интервала. Если существует интеграл

$$(RC) \int_E \mathbf{h},$$

то существует интеграл

$$(\mathfrak{M}_0) \int_E \mathbf{h}(dE),$$

и они равны между собой.

Приведем теперь пример функции, интегрируемой в смысле Колмогорова, но не интегрируемой по определению Хенстока. Действительно, пусть $E = [0, 1]$ и P — класс всех интервалов $[u, v] \subset [0, 1]$ с рациональными концами. Тогда класс $\mathfrak{M} = P \cup \{\emptyset\}$ является мультипликативным, но не является полным в $\overline{E} = [0, 1]$. Пусть $\mu([u, v]) = v - u$. Тогда

$$(\mathfrak{M}) \int_E \mu(dE) = 1,$$

а интеграл

$$(RC) \int_E \mu$$

не существует по определению.

Наконец, вызывает удивление тот факт, что в книге Хенстока нигде не упоминается работа Колмогорова [2], тогда как названы все интегралы от Ньютона до Данжуа.

Добавление после замечаний рецензента. Перейдем теперь к обсуждению отношений между первоначальными интегралами Колмогорова и интегралом Хенстока.

Так как согласно замечанию из полноты семейства $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$ в элементарном множестве E следует только лишь обобщенная мультипликативность, но не мультипликативность семейства $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \{\emptyset\}$, то отсюда получаем, что интеграл Колмогорова можно определить не во всех случаях, в которых определен интеграл Хенстока.

Аналогично, как показывает пример, приведенный после теоремы 5, не всякий мультипликативный класс интервалов является полным. Следовательно, интеграл Хенстока можно определить не во всех тех случаях, в которых определен интеграл Колмогорова.

Таким образом, понятия интегралов Колмогорова и Хенстока не перекрывают друг друга.

Кроме того, интеграл Хенстока аппроксимируется интегральными суммами, составленными значениями функции, соответствующими одной данной спецификации, тогда как в определении интеграла Колмогорова требуется, чтобы интегральные суммы аппроксимировали интеграл для всех

выборов значений многозначной функции множества. Поэтому в тех случаях, в которых интервалы образуют мультипликативный класс и одновременно являются полными, может существовать интеграл Хенстока, в то время как интеграл Колмогорова не существует. Как, например, в рассмотренном выше случае функции Дирихле, когда интеграл Хенстока равен любому числу из $[0, 1]$, смотря по тому, какая спецификация берется при определении интеграла, тогда как интеграл Колмогорова не существует.

Со своей стороны, интеграл Колмогорова определяется для мультипликативных классов, состоящих из произвольных множеств, в то время как определение интеграла Хенстока пригодно только для семейств интервалов из евклидовых пространств.

Таким образом, обобщение интеграла Колмогорова, предложенное в этой статье, является существенным.

В заключение следует отметить, что важность изучения взаимоотношений между интегралами Колмогорова и Хенстока была высказана в личной беседе с нами проф. В. Сковрцовым, что и послужило поводом для написания этой работы.

Институт вычислительной математики
им. Н. И. Мусхелишвили АН Грузии

Поступило
15.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Henstock R. Theory of Integration. London: Butter-worths, 1963.
- [2] Kolmogoroff A. Untersuchungen über den Integralbegriff // Math. Ann. 1930. V. 103. P. 654–696.
- [3] Гливенко В. Интеграл Стильеса. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
- [4] Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1981.