Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Заричный, Универсальные n -мягкие отображения n -мерных пространств в абсолютных борелевских и проективных классах, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 845–850

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:52:23

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ n -МЯГКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ n -МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ В АБСОЛЮТНЫХ БОРЕЛЕВСКИХ И ПРОЕКТИВНЫХ КЛАССАХ

М. М. Заричный

Возрождение интереса к классической теории абсолютных экстензоров в размерности n ($AE(n)$ -пространств) в последнее десятилетие связано в основном с построением М. Бествиной теории менгеровских многообразий [1]. Результаты этой теории были существенно дополнены А. Н. Дранишниковым [2], доказавшим аналоги теоремы стабильности и триангуляционной теоремы для менгеровских многообразий. Центральную роль в формулировках и доказательствах результатов Дранишникова играло введенное Е. В. Шепиным [3] понятие n -мягкого отображения.

Ниже все пространства предполагаются сепарабельными метризуемыми, все отображения – непрерывными. Понятие n -мягкого отображения, первоначально относящееся к компактным пространствам [3], естественно распространяется на метризуемый случай.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [3]). Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется n -мягким, $n = 1, 2, \dots, \infty$, если для каждой коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array},$$

где A – замкнутое подмножество пространства B , $\dim B \leq n$, существует отображение $\Phi: B \rightarrow X$ такое, что $\Phi|_A = \varphi$ и $f \circ \Phi = \psi$.

Первые примеры n -мягких отображений, повышающих размерность, для натуральных n , принадлежат А. Н. Дранишникову [2], [4]; в частности, он построил n -мягкое отображение универсального $(n+1)$ -мерного компакта Менгера μ^{n+1} на гильбертов куб Q и доказал, что не существует n -мягкого отображения n -мерного компакта на куб большей размерности,

в том числе и на гильбертов куб. А. Ч. Чигогидзе [5] доказал, что существует n -мягкое отображение n -мерного польского (т.е. полного сепарабельного) пространства на гильбертово пространство. Отображения, построенные Дранишниковым и Чигогидзе, обладают также дополнительными свойствами универсальности.

Поскольку класс польских пространств находится в начале борелевской классификации пространств, являясь первым абсолютным мультипликативным классом $\mathcal{M}_1$, то естественно возникает вопрос о нахождении повышающих размерность n -мягких отображений в других борелевских классах. В настоящей работе упомянутый результат А. Ч. Чигогидзе распространяется на абсолютные борелевские классы $\mathcal{M}_\alpha$, $2 \leq \alpha < \omega_1$, $\mathcal{A}_\alpha$, $1 \leq \alpha < \omega_1$, а также на абсолютные проективные классы $\mathcal{P}_k$, $k \geq 1$. При этом класс $\mathcal{A}_1$ сигма-компактных пространств (т.е. пространств, представимых в виде счетного объединения своих компактных подпространств), требует отдельного рассмотрения (теорема 1). Общие результаты о существовании универсальных n -мягких отображений составляют содержание теоремы 2. Участвующие в формулировке этой теоремы n -мерные $AE(n)$ -пространства могут служить основой для построения n -мерных аналогов бесконечномерных многообразий, моделированных на универсальных пространствах М. Бествины и Е. Могильского [6] для абсолютных борелевских классов.

ТЕОРЕМА 1. *Существует n -мягкое отображение n -мерного сигма-компактного пространства на гильбертов куб.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B_ε^m – замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ радиуса $\varepsilon > 0$ и с центром в начале координат, S_ε^{m-1} – граница шара $B_\varepsilon^m = B_1^m$. Определим многозначные отображения $r_\varepsilon^m, \rho_\varepsilon^m: B^m \rightarrow S_\varepsilon^{m-1}$ формулами

$$r_\varepsilon^m = \begin{cases} S_\varepsilon^{m-1}, & \text{если } x \in \text{int } B_\varepsilon^m, \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{если } x \notin \text{int } B_\varepsilon^m, \end{cases}$$

$$\rho_\varepsilon^m(x) = \begin{cases} S_\varepsilon^{m-1}, & \text{если } x \in B_\varepsilon^m, \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{если } x \notin B_\varepsilon^m. \end{cases}$$

Пусть K – конечный симплициальный комплекс. Для каждого m -мерного симплекса $\sigma \in K$ зафиксируем гомеоморфизм $\xi_\sigma: \sigma \rightarrow B^m$.

Для каждого симплекса $\sigma \in K$ размерности $> n$ определим для каждого ε , $0 < \varepsilon < 1$, многозначные ретракции $\varphi_{\sigma,\varepsilon}^n, \psi_{\sigma,\varepsilon}^n: |\sigma| \rightarrow |\sigma|^{(n)}$ следующим образом.

Если ν – $(n+1)$ -мерная грань симплекса σ и $x \in \nu$, то пусть

$$\varphi_{\sigma,\varepsilon}^n(x) = \xi_\nu^{-1}(r_\varepsilon^{n+1}(\xi_\nu(x))), \quad \psi_{\sigma,\varepsilon}^n(x) = \xi_\nu^{-1}(\rho_\varepsilon^{n+1}(\xi_\nu(x))).$$

Предполагая, что для всех $x \in |\sigma^{(i)}|$, где $i \geq n+1$, множества $\varphi_{\sigma,\varepsilon}^n(x)$ и $\psi_{\sigma,\varepsilon}^n(x)$ уже определены, положим для $x \in \nu$, где $\nu \in \sigma^{(i+1)}$:

$$\begin{aligned}\varphi_{\sigma,\varepsilon}^n(x) &= \cup \{ \varphi_{\sigma,\varepsilon}^n(y) \mid y \in r_\varepsilon^{i+1}(x) \}, \\ \psi_{\sigma,\varepsilon}^n(x) &= \cup \{ \psi_{\sigma,\varepsilon}^n(y) \mid y \in \rho_\varepsilon^{i+1}(x) \}.\end{aligned}$$

Продолжая таким образом, получаем искомые многозначные ретракции $\varphi_{\sigma,\varepsilon}^n, \psi_{\sigma,\varepsilon}^n$. Объединяя полученные многозначные ретракции по всем симплексам $\sigma \in K$ размерности $> n$, получаем многозначные ретракции $\varphi_{K,\varepsilon}^n, \psi_{K,\varepsilon}^n: |K| \rightarrow |K^{(n)}|$. В [5] отмечено, что многозначные ретракции $\varphi_{K,\varepsilon}^n$ полунепрерывны снизу, многозначные ретракции $\psi_{K,\varepsilon}^n$ полунепрерывны сверху, а семейства $\{ \varphi_{K,\varepsilon}^n(x) \mid x \in |K| \}$ связны и локально связны в размерностях $< n$.

Кроме того, $\varphi_{K,\varepsilon}^n \subset \psi_{K,\varepsilon}^n$ и $\varphi_{K,\varepsilon}^n \subset \varphi_{K,\eta}^n, \psi_{K,\varepsilon}^n \subset \psi_{K,\eta}^n$, если $0 < \varepsilon < \eta < 1$.

В дальнейшем для краткости воспользуемся следующими обозначениями: $\varphi_K^n = \varphi_{K,1/2}^n, \psi_K^n = \psi_{K,1/2}^n, \varphi_{K,i}^n = \varphi_{K,i/(2i+1)}^n, \psi_{K,i}^n = \psi_{K,i/(2i+1)}^n, i \in \mathbb{N}$.

Пусть K – симплицальный комплекс, для которого $|K| = I^{2n+3}$. Опишем приведенное в [5] построение полиэдров P_m и отображений $p_m^{m+1}: P_{m+1} \rightarrow P_m$. Пусть $P_1 = |K|$ и d_1 – стандартная метрика на P_1 , ограниченная числом 1. Пусть K_1 – подразделение комплекса K , диаметры симплексов которого меньше 2^{-3} . Предположим, что для любого натурального $i, 1 < i \leq m$, построен полиэдр P_i с метрикой $d_i \leq 1$, симплицальный комплекс K_i такой, что $|K_i| = P_i$ и диаметры симплексов из K_i меньше $2^{-(i+2)}$, совершенное отображение $p_{i-1}^i: P_i \rightarrow P_{i-1}$. Тогда в качестве полиэдра P_{m+1} возьмем график многозначной ретракции $\psi_{K_m}^n$, а в качестве отображения $p_m^{m+1}: P_{m+1} \rightarrow P_m$ – ограничение проектирования $\text{pr}_1: |K_m| \times |K_m^{(n)}| \rightarrow |K_m|$ на пространство P_{m+1} .

Для каждого натурального j определим подпространства $A_{m,j}, B_{m,j}, \tilde{A}_{m,j}, \tilde{B}_{m,j}$ полиэдра P_m следующим образом.

Положим $A_{1,j} = B_{1,j} = P_1$. Предположим, что для каждого $i, 1 < i \leq m$, пространства $A_{i,j}$ и $B_{i,j}$ уже определены. Пусть $B_{m+1,j}$ – график многозначной ретракции $f_{K_m,j}^n$, где

$$f_{K_m,j}^n = \begin{cases} \varphi_{K_m}^n, & \text{если } m \leq j, \\ \varphi_{K_m,j}^n, & \text{если } m > j. \end{cases}$$

Положим $A_{m+1,j} = (p_m^{m+1})^{-1}(A_{m,j}) \cap B_{m+1,j}$. Отметим, что $A_{m,1} \subset A_{m,2} \subset \dots \subset A_{m,m} \subset A_{m,m+1} \subset \dots$.

Аналогично, положим $\tilde{A}_{1,j} = \tilde{B}_{1,j} = P_1$. Предположим, что для каждого i , $1 < i \leq m$, пространства $\tilde{A}_{i,j}$ и $\tilde{B}_{i,j}$ уже определены. Пусть $\tilde{B}_{m+1,j}$ – график многозначной ретракции $\tilde{f}_{K_{m,j}}^n$, где

$$\tilde{f}_{K_{m,j}}^n = \begin{cases} \varphi_{K_m}^n, & \text{если } m \leq j, \\ \psi_{K_{m,j}}^n, & \text{если } m > j. \end{cases}$$

Положим $\tilde{A}_{m+1,j} = (p_m^{m+1})^{-1}(\tilde{A}_{m,j}) \cap \tilde{B}_{m+1,j}$. Отметим, что $\tilde{A}_{m,1} \subset \tilde{A}_{m,2} \subset \dots \subset \tilde{A}_{m,m} \subset \tilde{A}_{m,m+1} \subset \dots$.

Пусть $P = \varprojlim \{P_m, p_m^{m+1}\}$, $A_j^n(K) = \varprojlim \{A_{m,j}, p_m^{m+1} \mid A_{m+1,j}\}$, $\tilde{A}_j^n(K) = \varprojlim \{\tilde{A}_{m,j}, p_m^{m+1} \mid \tilde{A}_{m+1,j}\}$. Отметим, что $A_1^n(K) \subset \tilde{A}_1^n(K) \subset A_2^n(K) \subset \tilde{A}_2^n(K) \subset \dots \subset P$, и что пространства $\tilde{A}_j^n(K)$ являются локально компактными. Дословно, как в [5] доказывается, что ограничения $p_1 \mid A_j^n(K): A_j^n(K) \rightarrow |K|$ предельной проекции $p_1: P \rightarrow K$ являются n -мягкими отображениями.

Пространство $C^n(k) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^n(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i^n(K)$ является n -мерным (в силу n -мерности пространства P [5]) сигма-компактным пространством.

Покажем, что ограничение $f_K^n = p_1 \mid C^n(K): C^n(K) \rightarrow |K|$ является n -мягким отображением. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & C^n(K) \\ \downarrow & & \downarrow f_K^n \\ Z & \xrightarrow{\beta} & |K| \end{array},$$

где Y – замкнутое подпространство пространства Z , $\dim Z \leq n$. Пусть $Y_j = \alpha^{-1}(A_j^n(K))$ и $Z_j \subset Z$ – такие замкнутые подмножества, что $Z_j \cap Y = Y_j$ и $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots$.

В дальнейшем пространство $P = \varprojlim \{P_m, p_m^{m+1}\}$ естественно отождествляется с подпространством произведения $\prod_{m=1}^{\infty} P_m$, поэтому предполагаем, что отображение α задано в виде $\alpha = (\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$, где α_m – отображение из Y в P_m , и будем строить отображение $\gamma: Z \rightarrow C^n(K) \subset P$ в виде $\gamma = (\gamma_m)_{m=1}^{\infty}$, где γ_m – отображение из Z в P_m .

Положим $\gamma_1 = \beta: Z \rightarrow |K| = P_1$. Используя n -мягкость отображения $p_1^2 \mid A_{2,2}: A_{2,2} \rightarrow A_{1,2}$, определим отображение $\gamma_2: Z \rightarrow A_{2,2}$ из условий $p_1^2 \gamma_2 = \gamma_1$ и $\gamma_2 \mid Y_1 = \alpha_2 \mid Y_1$.

Предположим, что для любого i , $1 < i \leq m$, уже построено отображение $\gamma_i: Z \rightarrow P_i$ такое, что выполнены условия: $\gamma_i \mid Y = \alpha_i$, $\gamma_i(Z_j) \subset A_{i,j+1}$ для каждого $j < i$, $p_{i-1}^i \gamma_i = \gamma_{i-1}$.

Для построения γ_{m+1} отметим, что $\beta_{m+1}(Y_1) \subset \tilde{A}_{m+1,1} \subset A_{m+1,2}$. Используя n -мягкость отображения $p_m^{m+1} \mid A_{m+1,2}$, определим отображение $\gamma_{m+1}^{(1)}: Z_1 \rightarrow A_{m+1,2}$ такое, что $\gamma_{m+1}^{(1)} \mid Y_1 = \alpha_{m+1} \mid Y_1$ и $p_m^{m+1} \gamma_{m+1}^{(1)} =$

$\gamma_m \mid Z_1$. Поскольку $\gamma_{m+1}(Y_2) \subset \tilde{A}_{m+1,2} \subset A_{m+1,3}$, то, используя n -мягкость отображения $p_m^{m+1} \mid A_{m+1,3}$, определим отображение $\gamma_{m+1}^{(2)}: Z_2 \rightarrow A_{m+1,3}$ такое, что $\gamma_{m+1}^{(2)} \mid Y_2 = \alpha_{m+1} \mid Y_2$, $\gamma_{m+1}^{(2)} \mid Z_1 = \gamma_{m+1}^{(1)}$ и $p_m^{m+1}\gamma_{m+1}^{(2)} = \gamma_m \mid Z_2$. Продолжая индуктивно, определим для каждого $k \leq m-1$ отображение $\gamma_{m+1}^{(k)}: Z_k \rightarrow A_{m+1,k+1}$ такое, что $\gamma_{m+1}^{(k)} \mid Y_k = \alpha_{m+1} \mid Y_k$, $\gamma_{m+1}^{(k)} \mid Z_{k-1} = \gamma_{m+1}^{(k-1)}$ и $p_m^{m+1}\gamma_{m+1}^{(k)} = \gamma_m \mid Z_k$. При $k = m-1$ получаем отображение $\gamma_{m+1}^{(m-1)}: Z_{m-1} \rightarrow A_{m+1,m}$. Поскольку для каждого $l \geq m$ имеем $\alpha_{m+1}(Y_i) \subset \tilde{A}_{m+1,l} \subset A_{m+1,l+1}$, т.е. $\alpha_{m+1}(Y) \subset A_{m+1,m+1}$, то, снова используя n -мягкость отображения p_m^{m+1} , можно определить отображение $\gamma_{m+1}: Z \rightarrow A_{m+1,m+1}$ такое, что $p_m^{m+1}\gamma_{m+1} = \gamma_m$, $\gamma_{m+1} \mid Z_{m-1} = \gamma_{m+1}^{(m-1)}$ и $\gamma_{m+1} \mid Y = \alpha_{m+1}$.

Отметим, что для каждого натурального j имеем $\gamma_m(Z_j) \subset A_{m,j+1}$, откуда $\gamma(Z) \subset C^n(K)$. Очевидно, что $f_K^n \circ \gamma = \beta$ и $\gamma \mid Y = \alpha$. Тем самым доказана n -мягкость отображения f_K^n .

Рассмотрим n -мягкое отображение $g: \mu^{n+1} \rightarrow Q$ (напомним, что $\mu^{m+1} - (n+1)$ -мерный универсальный компакт Менгера [7]), построенное Дранишниковым [4]. Предполагая, что μ^{n+1} лежит в кубе I^{2n+3} , положим $M = (f_K^n)^{-1}(\mu^{n+1})$ и обозначим через w композицию $g \circ (f_K^n \mid M): M \rightarrow Q$. Очевидно, что $w: M \rightarrow Q$ – искомое отображение. Теорема доказана.

Напомним определение иерархии абсолютных борелевских и проективных классов (более подробно см. в [8]). Для пространства X борелевский класс $\mathcal{A}_0(X)$ (соответственно $\mathcal{M}_0(X)$) состоит из всех открытых (соответственно замкнутых) подмножества в X . Предположим, что для каждого счетного ординала $\beta < \alpha$ определены классы $\mathcal{A}_\beta(X)$ и $\mathcal{M}_\beta(X)$. Тогда класс $\mathcal{A}_\alpha(X)$ состоит из пространств вида $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$, где $Y \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{M}_\beta(X)$, а класс $\mathcal{M}_\alpha(X)$ состоит из пространств вида $Y = \bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$, где $Y_i \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta(X)$.

Проективные классы $\mathcal{P}_i(X)$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для полного пространства X определяются следующим образом. Пусть $\mathcal{P}_0(X) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{A}_\alpha(X)$. Класс $\mathcal{P}_{2i+1}(X)$ состоит из подмножеств в X , являющихся непрерывными образами пространств класса $\mathcal{P}_{2i}(X)$. Наконец, $\mathcal{P}_{2i}(X) = \{A \in X \mid X \setminus A \in \mathcal{P}_{2i-1}(X)\}$.

Если $\mathcal{C}$ – один из символов $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha$, $\mathcal{P}_i$, то, по определению, абсолютный класс $\mathcal{C}$ состоит из всех пространств E таких, что для каждого пространства X и каждого вложения $f: E \rightarrow X$ имеем $f(E) \in \mathcal{C}(X)$.

Пусть теперь $\mathcal{C}$ – класс пространств и $n = 0, 1, 2, \dots$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *послойно* ($\mathcal{C}, n$)-*универсальным*, если для любого отображения $g: Z \rightarrow X$, где $Z \in \mathcal{C}$ и $\dim Z \leq n$, существует замкнутое вложение $g': Z \rightarrow X$ такое, что $fg = fg'$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{C}$ – один из классов $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq \omega_1$, или $\mathcal{P}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Существует n -мерное пространство X и n -мягкое по-слойно $(\mathcal{C}, n)$ -универсальное отображение $f: X \rightarrow Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f': X' \rightarrow Q$ – n -мягкое отображение n -мерного пространства X' на Q , где X' – польское пространство, построенное А. Ч. Чигогидзе [5], если $\mathcal{C} \neq \mathcal{A}_1$ и X' – сигма-компактное пространство, существующее в силу теоремы 1, если $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1$. Существует $AE(\mathcal{C})$ -пространство $X'' \in \mathcal{C}$ (т.е. такое, что каждое пространство $K \in \mathcal{C}$ допускает замкнутое вложение в X'' ; см. [6], [9]). Тогда $X' \times X'' \in \mathcal{C}$. Будем считать, что $X' \times X'' \subset Q$. Положим $X = (f')^{-1}(X' \times X'')$. Легко видеть, что $X \in \mathcal{C}$ и $\dim X = n$. Обозначим через $f: X \rightarrow Q$ композицию

$$X \xrightarrow{f'|X} X' \times X'' \xrightarrow{\text{pr}_1} X' \xrightarrow{f'} Q$$

и покажем, что отображение f обладает свойствами по-слойной $(\mathcal{C}, n)$ -универсальности.

Пусть $h: A \rightarrow X$ – любое отображение, где $A \in \mathcal{C}$ и $\dim A \leq n$. Существует замкнутое вложение $i: A \rightarrow X''$, тогда отображение $(\text{pr}_1 \circ (f' | X) \circ h, i): A \rightarrow X' \times X''$ также является замкнутым вложением. В силу n -мягкости отображения $f' | X$ существует отображение $h': A \rightarrow X$ такое, что $(f' | X) \circ h' = (\text{pr}_1 \circ (f' | X) \circ h, i)$; несложно убедиться, что h' является замкнутым вложением и

$$f \circ h' = (\text{pr}_1 \circ (f' | X) \circ h, i) = f' \circ \text{pr}_1 \circ (f' | X) \circ h = f \circ h.$$

Теорема доказана.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило
01.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bestvina M. Characterizing n -dimensional universal Menger compacta // Mem. Amer. Math. Soc. 1988. V. 380.
- [2] Дранишников А. Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n -мягкие отображения, повышающие размерность // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 55–95.
- [3] Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 3–62.
- [4] Дранишников А. Н. Универсальные менгеровские компакты и универсальные отображения // Матем. сб. 1986. Т. 129. № 1. С. 121–139.
- [5] Чигогидзе А. Ч. n -мягкие отображения n -мерных пространств // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 88–95.
- [6] Bestvina M., Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts // Michigan Math. J. 1986. V. 33. P. 291–313.
- [7] Engelking R. Dimension theory. Warszawa: PWN, 1978.
- [8] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Наука, 1966.
- [9] Cauty R. Ensembles absorbants pour les classes projectives. Preprint, 1991.