Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Об алгебраической структуре функциональных матриц специального вида, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 851–860

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:15:50

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. В. Зудилин

В 1984 г. в краткой заметке [1] появилось описание новой аналитической конструкции – *градуированных приближений Паде*. Там же были указаны принципиально новые результаты, которые можно получить с помощью этого метода. В действительности, предложенная Г. В. Чудновским в [1] конструкция являлась дальнейшим обобщением известного в трансцендентной теории чисел метода Зигеля–Шидловского. Однако, доказательство результатов заметки [1] содержало пробел, который удалось преодолеть автору настоящей статьи в работе [2] (там же можно найти некоторые подробности истории вопроса) и установить более сильные результаты. Отметим, что вариация метода градуированных приближений Паде позволила получить в частных случаях даже более сильные результаты (см. по этому поводу работы [3] и [4]).

Цель настоящей статьи – указать некоторые интересные алгебраические и комбинаторные закономерности, возникающие в конструкции градуированных приближений Паде.

§ 1. Описание конструкции

Рассмотрим m различных систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dz}y_{il} = \sum_{j=1}^{m_i} Q_{lj}^{(i)} y_{ij}, \quad \begin{matrix} l, j = 1, \dots, m_i, & m_i \geq 2, \\ i = 1, \dots, m, & m \geq 2. \end{matrix} \quad (1)$$
$$Q_{lj}^{(i)} = Q_{lj}^{(i)}(z) \in \mathbb{C}(z),$$

Через $T(z) \in \mathbb{C}[z]$ обозначим наименьший общий знаменатель коэффициентов систем (1). Появление совокупности указанных систем становится

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00739.

актуальным только при размножении строящихся ниже линейных функциональных форм.

В конструкции Г. В. Чудновского, излагаемой ниже, строятся приближающие линейные функциональные формы (*градуированные приближения Паде*), зависящие от натурального параметра N . Договоримся сразу о некоторых обозначениях. Положим также $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$, где $\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im_i})$, $i = 1, \dots, m$, и $\bar{\kappa} = (\bar{\kappa}_1, \dots, \bar{\kappa}_m)$ – мультииндекс, где $\bar{\kappa}_i = (\kappa_{i1}, \dots, \kappa_{im_i})$, $i = 1, \dots, m$, причем все компоненты κ_{ij} мультииндекса неотрицательны, а если в некоторой сумме встретилось слагаемое хотя бы с одной компонентой $\kappa_{ij} < 0$, то считаем это слагаемое отсутствующим (равным нулю). Для экономии места в формулах будем писать:

$$\bar{a}^{\bar{\kappa}} = \prod_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m_i}} a_{ij}^{\kappa_{ij}}, \quad |\bar{\kappa}_i| = \sum_{j=1}^{m_i} \kappa_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Введем множества

$$\Omega_i = \Omega_i(N) = \{ \bar{\kappa} : |\bar{\kappa}_l| = N - \delta_{il}, l = 1, \dots, m \}, \quad \Omega = \Omega(N) = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i,$$

$$\Theta = \Theta(N) = \{ \bar{s} : |\bar{s}_l| = N, l = 1, \dots, m \},$$

где под δ_{il} мы понимаем обычный символ Кронекера. Кроме того, положим

$$\omega_i = \text{Card } \Omega_i, \quad \omega = \text{Card } \Omega = \sum_{i=1}^m \omega_i, \quad \theta = \text{Card } \Theta.$$

Пусть $f_{i1}(z), \dots, f_{im_i}(z)$, $i = 1, \dots, m$, – произвольное решение совокупности систем (1). Искомые линейные формы будут иметь вид

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{i=1}^m P_i(z; \bar{a}) \langle \bar{a}_i, \bar{f}_i(z) \rangle = \sum_{i=1}^m P_i(z; \bar{a}) \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} f_{ij}(z), \quad (2)$$

где многочлены $P_i(z; \bar{a})$ однородны по каждой компоненте $\bar{a}_l$, $l = 1, \dots, m$, и имеют вид

$$P_i(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_i} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Функциональную линейную форму (2) можно представить в виде

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{s} \in \Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}(z),$$

где

$$R_{\bar{s}}(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} P_{\bar{s} - \bar{e}_{ij}}(z) f_{ij}(z), \quad \bar{s} \in \Theta, \quad (4)$$

а $\bar{e}_{ij}$ – мультииндекс, у которого на месте с номером ij стоит единица, а на остальных местах – нули.

Пусть, далее, $M_1, M_2, \dots, M_m$ – произвольные натуральные числа, $\varepsilon > 0$. Не ограничивая общности, можно считать $M_1 \geq M_2 \geq \dots \geq M_m$ (этого можно добиться перенумерацией систем в совокупности (1)). Кроме того, положим $M = M_1$.

В случае, когда функции $f_{i1}(z), \dots, f_{im_i}(z), i = 1, \dots, m$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и коэффициенты их рядов Тейлора удовлетворяют некоторым арифметическим свойствам (например, являются E - или G -функциями), с помощью леммы Зигеля удастся построить нетривиальную форму (2) с условиями

$$\deg_z P_i(z; \bar{a}) < M, \quad \text{ord}_{z=0} P_i(z; \bar{a}) \geq M - M_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \text{ord}_{z=0} R(z; \bar{a}) \geq K = \left[\frac{\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 + \dots + \omega_m M_m - \varepsilon M}{\theta} \right], \quad (5)$$

и соответственными арифметическими свойствами многочленов $P_{\bar{\kappa}}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega_i, i = 1, \dots, m$. Рассмотрим теперь дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{m_i} \left(\sum_{l=1}^{m_i} Q_{lj}^{(i)}(z) a_{il} \right) \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \right),$$

связанный с системой линейных однородных дифференциальных уравнений, сопряженной к системе (1). Этот оператор обладает следующим (легко проверяемым) свойством:

$$D \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} f_{ij}(z) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Полагая теперь

$$R^{[n]}(z; \bar{a}) = (T(z) \cdot D)^n R(z; \bar{a}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и обозначая через $R_{\bar{s}}^{[n]}(z)$ и $P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)$ входящие в эти функции формы и многочлены соответственно, мы можем рассмотреть функциональный определитель

$$\Delta(z) = \det(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z))_{n=0,1,\dots,\omega-1; \bar{\kappa} \in \Omega}. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что

$$\deg_z P_i^{[n]}(z; \bar{a}) < M + tn, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$\text{ord}_{z=0} P_i^{[n]}(z; \bar{a}) \geq M - M_i - n, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

$$\text{ord}_{z=0} R^{[n]}(z; \bar{a}) \geq K - n, \quad (9)$$

где

$$t = \max \left\{ \deg T, \max_{i,l,j} \{ \deg T Q_{lj}^{(i)} \} \right\}.$$

С помощью условия нормальности Зигеля (примененного, правда, не к исходным системам (1), а к сопряженным к ним), Чудновскому в заметке [1] удалось доказать невырожденность определителя (6). Там же было объявлено, что рассуждения, аналогичные проводимым в методе Зигеля, позволяют получить оценку

$$\deg \Delta(z) - \operatorname{ord}_{z=0} \Delta(z) = o(M), \quad (10)$$

которая является существенным условием для приложений к числовым неравенствам. Нашей целью является описание именно такой аналогии и получение наилучшей оценки для величины в левой части (10).

Упорядочим элементы множества Ω следующим образом: будем говорить, что $\bar{\kappa} \in \Omega$ в лексикографическом порядке меньше $\bar{\kappa}' \in \Omega$ (запись $\bar{\kappa} \prec \bar{\kappa}'$), если (здесь $\bar{\kappa} \in \Omega_i$, $\bar{\kappa}' \in \Omega_{i'}$) либо $i < i'$ либо $i = i'$ и $\kappa_{11} = \kappa'_{11}, \kappa_{12} = \kappa'_{12}, \dots, \kappa_{1m_1} = \kappa'_{1m_1}; \dots; \kappa_{l1} = \kappa'_{l1}, \dots, \kappa_{l,j-1} = \kappa'_{l,j-1}$, но $\kappa_{lj} < \kappa'_{lj}$ для некоторых l , $1 \leq l \leq m$, j , $1 \leq j \leq m_l$. Аналогичное упорядочение введем и для элементов множества Θ . Выразим теперь элементы строки $(R_{\bar{s}}(z))_{\bar{s} \in \Theta}$ через элементы строки $(P_{\bar{\kappa}}(z))_{\bar{\kappa} \in \Omega}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{s} \in \Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}(z) &= R(z; \bar{a}) = \sum_{i=1}^m P_i(z; \bar{a}) \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} f_{ij}(z) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_i} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^{m_i} \bar{a}^{\bar{\kappa} + \bar{e}_{ij}} f_{ij}(z) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_i} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{\bar{s} \in \Theta} \delta_{\bar{\kappa} + \bar{e}_{ij}, \bar{s}} \bar{a}^{\bar{s}} f_{ij}(z) \\ &= \sum_{\bar{s} \in \Theta} \bar{a}^{\bar{s}} \sum_{i=1}^m \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_i} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{\bar{\kappa} + \bar{e}_{ij}, \bar{s}} f_{ij}(z), \end{aligned}$$

откуда после приравнивания членов при $\bar{a}^{\bar{s}}$, $\bar{s} \in \Theta$, получим:

$$(R_{\bar{s}}(z))_{\bar{s} \in \Theta} = (P_{\bar{\kappa}}(z))_{\bar{\kappa} \in \Omega} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m_i} \delta_{\bar{\kappa} + \bar{e}_{ij}, \bar{s}} f_{ij}(z) \right)_{i=1, \dots, m, \bar{\kappa} \in \Omega_i; \bar{s} \in \Theta}. \quad (11)$$

Здесь под $\delta_{\bar{s}', \bar{s}}$, $\bar{s}', \bar{s} \in \Theta$, понимается “обобщенный” символ Кронекера множества Θ , т.е.

$$\delta_{\bar{s}', \bar{s}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{s}' = \bar{s}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В дальнейшем матрицу

$$\left(\sum_{j=1}^{m_i} \delta_{\bar{\kappa} + \bar{e}_{ij}, \bar{s}} f_{ij}(z) \right)_{i=1, \dots, m, \bar{\kappa} \in \Omega_i; \bar{s} \in \Theta} \quad (12)$$

будем называть *переходной*. У нее элементы множеств Ω и Θ упорядочены в лексикографическом порядке, элементы Ω нумеруют строки, элементы Θ – столбцы. Эта матрица согласно формуле (11) является матрицей перехода от строки $(P_{\bar{\kappa}}(z))_{\bar{\kappa} \in \Omega}$ к строке $(R_{\bar{s}}(z))_{\bar{s} \in \Theta}$.

§ 2. Алгебраические связи и ранг переходной матрицы

ЛЕММА 1 (см. [5, § 7 гл. 2]). При любых $m, N \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \text{Card}\{n_i \in \mathbb{Z}, n_i \geq 0, i = 1, \dots, m : n_1 + n_2 + \dots + n_m = N\} \\ = \binom{N+m-1}{N}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_i &= \binom{N+m_i-2}{N-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m \binom{N+m_l-1}{N}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \theta &= \prod_{l=1}^m \binom{N+m_l-1}{N}. \end{aligned}$$

Всюду далее считаем функции $f_{ij}(z)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, алгебраически независимыми.

Обозначим через $\{Y_{\bar{\kappa}}\}_{\bar{\kappa} \in \Omega}$ строки переходной матрицы (12). Укажем среди них максимальную линейно независимую систему, в которой участвует как можно больше строк с номерами из Ω_1 , за которыми следует максимально возможное число строк с номерами из Ω_2 и т.д. до Ω_m . Для этого рассмотрим множество

$$\Omega^* = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i^*,$$

$$\Omega_i^* = \{\bar{\kappa} \in \Omega : \kappa_{11} = \kappa_{21} = \dots = \kappa_{i-1,1} = 0\} \subset \Omega_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

и покажем, что если строка $\{Y_{\bar{\kappa}'}\}$ имеет номер $\bar{\kappa}' \notin \Omega^*$, то она линейно выражается через строки $\{Y_{\bar{\kappa}}\}_{\bar{\kappa} \in \Omega^*}$ с номерами, меньшими $\bar{\kappa}'$. Для этого нам понадобится следующее тождество.

ЛЕММА 2. Пусть $\bar{\kappa} \in \Omega_i \setminus \Omega_i^*$, т.е. существует $i' = i'(i, \bar{\kappa}) < i$ такой, что $\kappa_{i'1} > 0$. Тогда

$$Y_{\bar{\kappa}} = \frac{1}{f_{i'1}(z)} \left(\sum_{j=1}^{m_i} f_{ij}(z) Y_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{ij}} - \sum_{j=2}^{m_{i'}} f_{i'j}(z) Y_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{i'j}} \right). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{m_{i'}} f_{i'l}(z) Y_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{i'l}} &= \sum_{l=1}^{m_{i'}} f_{i'l}(z) \left(\sum_{j=1}^{m_i} \delta_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{i'l} + \bar{e}_{ij}, \bar{s}} f_{ij}(z) \right)_{\bar{s} \in \Omega} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{m_{i'}} \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{i'l} + \bar{e}_{ij}, \bar{s}} f_{ij}(z) f_{i'l}(z) \right)_{\bar{s} \in \Omega} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_{i'}} \delta_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{ij} + \bar{e}_{i'l}, \bar{s}} f_{i'l}(z) f_{ij}(z) \right)_{\bar{s} \in \Omega} \\ &= \sum_{j=1}^{m_i} f_{ij}(z) \left(\sum_{l=1}^{m_{i'}} \delta_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{ij} + \bar{e}_{i'l}, \bar{s}} f_{i'l}(z) \right)_{\bar{s} \in \Omega} \\ &= \sum_{j=1}^{m_i} f_{ij}(z) Y_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{ij}}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает (13).

Теперь остается заметить, что в правой части формулы (13) участвуют строки с номерами, меньшими в лексикографическом порядке, чем $\bar{\kappa}$. Действительно, $\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{ij} \prec \bar{\kappa}$, поскольку $\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{ij} \in \Omega_{i'}$, $\bar{\kappa} \in \Omega_i$ и $i' < i$, $j = 1, \dots, m_i$; $\bar{\kappa} - \bar{e}_{i'1} + \bar{e}_{i'j} \prec \bar{\kappa}$, поскольку $\bar{e}_{i'j} \prec \bar{e}_{i'1}$, $j = 2, \dots, m_{i'}$.

Таким образом, если $\bar{\kappa}' \notin \Omega^*$, то строка $Y_{\bar{\kappa}'}$ линейно выражается через строки $Y_{\bar{\kappa}}$, $\bar{\kappa} \in \Omega^*$, $\bar{\kappa} \prec \bar{\kappa}'$.

Покажем теперь линейную независимость строк $\{Y_{\bar{\kappa}}\}_{\bar{\kappa} \in \Omega^*}$. Пусть от противного существует линейная комбинация

$$\sum_{\bar{\kappa} \in \Omega^*} \gamma_{\bar{\kappa}} Y_{\bar{\kappa}} \equiv 0. \quad (14)$$

Поскольку функции f_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, алгебраически независимы, то соотношение (14) останется в силе если считать в нем $f_{i1} = 1$, $f_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 2, \dots, m_i$. После такой подстановки равенство (14) примет вид

$$Y = \sum_{i=1}^m \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_i^*} \gamma_{\bar{\kappa}} (\delta_{\bar{\kappa} + \bar{e}_{i1}, \bar{s}})_{\bar{s} \in \Omega} \equiv 0. \quad (15)$$

Предположим, что для некоторого $\bar{\kappa}' \in \Omega_{i'}^*$ выполнено $\gamma_{\bar{\kappa}'} \neq 0$. Рассмотрим компоненту с номером $\bar{\kappa}' + \bar{e}_{i'1}$ строки Y . Она равна

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_i^*} \gamma_{\bar{\kappa}} \delta_{\bar{\kappa} + \bar{e}_{i1}, \bar{\kappa}' + \bar{e}_{i'1}} = \gamma_{\bar{\kappa}'} \neq 0,$$

поскольку равенства $\bar{\kappa} + \bar{e}_{i1} = \bar{\kappa}' + \bar{e}_{i'1}$ возможны для $\bar{\kappa} \in \Omega^*$ лишь в случае $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}'$. Действительно, если это не так, то тогда либо $i < i'$ либо $i' < i$. В первом случае $\kappa_{i'1} = \kappa_{i1} + 1 > 0$, а это противоречит тому, что $\bar{\kappa}' \in \Omega_{i'}^*$; во втором $\kappa_{i'1} = \kappa_{i'1} + 1 > 0$, а это противоречит $\bar{\kappa} \in \Omega_i^*$. Таким образом, мы нашли ненулевую компоненту строки Y , что вступает в противоречие с равенством (15). Тем самым, доказана линейная независимость системы строк $\{Y_{\bar{\kappa}}\}_{\bar{\kappa} \in \Omega^*}$.

Подытожим сказанное выше в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Строки матрицы (12) с номерами из множества Ω^* образуют базис в системе строк этой матрицы.*

СЛЕДСТВИЕ. *Ранг переходной матрицы (12) равен*

$$\prod_{l=1}^m \binom{N + m_l - 1}{N} - \prod_{l=1}^m \binom{N + m_l - 2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 заключаем, что ранг матрицы (12) в точности равен

$$\omega^* = \text{Card } \Omega^* = \sum_{i=1}^m \omega_i^*, \quad \omega_i^* = \text{Card } \Omega_i^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Согласно лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \omega_i^* &= \text{Card}\{\bar{\kappa}_1 : |\bar{\kappa}_1| = N, \kappa_{11} = 0\} \times \dots \\ &\quad \times \text{Card}\{\bar{\kappa}_{i-1} : |\bar{\kappa}_{i-1}| = N, \kappa_{i-1,1} = 0\} \times \text{Card}\{\bar{\kappa}_i : |\bar{\kappa}_i| = N - 1\} \\ &\quad \times \text{Card}\{\bar{\kappa}_{i+1} : |\bar{\kappa}_{i+1}| = N\} \times \dots \times \text{Card}\{\bar{\kappa}_m : |\bar{\kappa}_m| = N\} \\ &= \prod_{l=1}^{i-1} \binom{N + m_l - 2}{N} \cdot \binom{N + m_i - 2}{N - 1} \cdot \prod_{l=i+1}^m \binom{N + m_l - 1}{N}, \\ &\quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \omega^* &= \sum_{i=1}^m \omega_i^* \\ &= \sum_{i=1}^m \binom{N + m_i - 2}{N - 1} \cdot \prod_{l=1}^{i-1} \binom{N + m_l - 2}{N} \cdot \prod_{l=i+1}^m \binom{N + m_l - 1}{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{l=1}^m \binom{N+m_l-1}{N} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\binom{N+m_i-2}{N-1}}{\binom{N+m_i-1}{N}} \prod_{l=1}^{i-1} \frac{\binom{N+m_l-2}{N}}{\binom{N+m_l-1}{N}} \\
&= \theta \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{m_i-1}{N+m_i-1}\right) \prod_{l=1}^{i-1} \frac{m_l-1}{N+m_l-1} \\
&= \theta \left(1 - \prod_{l=1}^m \frac{m_l-1}{N+m_l-1}\right) = \prod_{l=1}^m \binom{N+m_l-1}{N} - \prod_{l=1}^m \binom{N+m_l-2}{N}.
\end{aligned}$$

Последнее число и дает ранг матрицы (12).

В заключение этого параграфа укажем так же базис системы столбцов матрицы (12). Рассмотрим множество столбцов с номерами из

$$\Theta^* = \{\bar{s} \in \Theta : s_{11} + \dots + s_{m1} > 0\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Столбцы матрицы (12) с номерами из множества Θ^* образуют базис в системе столбцов этой матрицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополнение

$$\Theta \setminus \Theta^* = \{\bar{s} \in \Theta : s_{11} = s_{21} = \dots = s_{m1} = 0\},$$

имеет мощность

$$\text{Card } \Theta \setminus \Theta^* = \prod_{i=1}^m \text{Card}\{\bar{s}_i : |\bar{s}_i| = N, s_{i1} = 0\} = \prod_{i=1}^m \binom{N+m_i-2}{N}.$$

Поэтому

$$\theta^* = \text{Card } \Theta^* = \theta - \prod_{i=1}^m \binom{N+m_i-2}{N} = \omega^*,$$

а это в точности ранг переходной матрицы. Обозначая столбцы матрицы (12) через $\{X_{\bar{s}}\}_{\bar{s} \in \Theta}$, мы должны показать, что все столбцы с номерами из $\Theta \setminus \Theta^*$ выражаются через систему $\{X_{\bar{s}}\}_{\bar{s} \in \Theta^*}$, а это и означает, что столбцы последнего множества образуют базис. Нам понадобится понятие старшинства на множестве мультииндексов (взятых, вообще говоря, не обязательно из Θ , но имеющих размерность $(m_1, m_2, \dots, m_m)$ и неотрицательные компоненты). Мы будем писать $\bar{r} \leq \bar{s}$, т.е. $\bar{r}$ не старше $\bar{s}$, если $r_{ij} \leq s_{ij}$ для всех $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m_i$, и $\bar{r} < \bar{s}$, т.е. $\bar{r}$ младше $\bar{s}$, если $\bar{r} \leq \bar{s}$ и $\bar{r} \neq \bar{s}$. Отметим только, что отношение старшинства не есть отношение порядка. Для всех $\bar{s} \in \Theta \setminus \Theta^*$ справедливо следующее тождество, которое приводится здесь без доказательства:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\bar{r} \leq \bar{s}} \left(\prod_{i=1}^m \left((-1)^{|\bar{r}_i|} \frac{(|\bar{r}_i|)!}{r_{i2}! \dots r_{im_i}!} f_{i1}^{-|\bar{r}_i|}(z) f_{i2}^{r_{i2}}(z) \dots f_{im_i}^{r_{im_i}}(z) \right) \right) \\
&\quad \times X_{\bar{s} - \bar{r} + |\bar{r}_1| \bar{e}_{11} + |\bar{r}_2| \bar{e}_{21} + \dots + |\bar{r}_m| \bar{e}_{m1}} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Перенос в этом равенстве слагаемое из суммы для нулевого значения $\bar{r}$ в правую часть, мы как раз и получим требуемое выражение столбца $X_{\bar{s}}$, $\bar{s} \in \Theta \setminus \Theta^*$, через столбцы $\{X_{\bar{s}}\}_{\bar{s} \in \Theta^*}$.

§ 3. Оценка разности степени и порядка нуля функционального определителя

Отметим, прежде всего, что с помощью упомянутой выше леммы Зигеля можно добиться, чтобы θ^* линейных функциональных форм (4) $R_{\bar{s}}(z)$, $\bar{s} \in \Theta^*$, имели порядок нуля не ниже

$$K^* = \left\lfloor \frac{\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 + \dots + \omega_m M_m - \varepsilon M}{\theta^*} \right\rfloor,$$

в точке $z = 0$. Если теперь воспользоваться равенствами (11) и (16), то получится выражение для линейных форм $R_{\bar{s}}(z)$, $\bar{s} \in \Theta \setminus \Theta^*$, через уже построенные формы:

$$\sum_{\bar{r} \leq \bar{s}} \left(\prod_{i=1}^m \left((-1)^{|\bar{r}_i|} \frac{(|\bar{r}_i|)!}{r_{i2}! \dots r_{im_i}!} f_{i1}^{-|\bar{r}_i|}(z) f_{i2}^{r_{i2}}(z) \dots f_{im_i}^{r_{im_i}}(z) \right) \right) \times R_{\bar{s} - \bar{r} + |\bar{r}_1| \bar{e}_{11} + |\bar{r}_2| \bar{e}_{21} + \dots + |\bar{r}_m| \bar{e}_{m1}}(z) \equiv 0.$$

Согласно этому равенству имеем

$$\text{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}(z) \geq K = K^* - N \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{ord}_{z=0} f_{i1}(z) \right\}, \quad \bar{s} \in \Theta \setminus \Theta^*.$$

Новое значение величины K значительно превосходит старое в условии (5) для достаточно больших N и M . В дальнейшем мы будем пользоваться именно новым значением.

Для того чтобы получить как можно более сильную оценку порядка нуля в точке $z = 0$ определителя (6), необходимо с помощью невырожденного линейного преобразования заменить часть столбцов этого определителя (с номерами из некоторого множества $\Omega' \subset \Omega$) на как можно больше столбцов линейных форм $R_{\bar{s}}^{[n]}(z)$, $n = 0, 1, \dots, \omega - 1$, $\bar{s} \in \Theta$. При этом требуется менять прежде всего столбцы многочленов, у которых порядок нуля в точке $z = 0$ меньше. Примером такого множества Ω' служит согласно сказанному в предыдущем параграфе Ω^* . В результате соответствующего линейного преобразования столбцы с номерами из $\Omega_1^*, \dots, \Omega_m^*$ заменятся на линейные функциональные формы, для которых справедлива оценка (9). При этом порядок нуля определителя подрастет (по сравнению с порядком нуля $\Delta(z)$) на $O(\omega^*)$ и будет ввиду (8), (9) не превосходить

$$\theta^* K + \sum_{i=1}^m (\omega_i - \omega_i^*) (M - M_i) - O(\omega^2) \geq \omega M - \varepsilon M - \sum_{i=2}^m \omega_i^* (M - M_i) - O(\omega^2),$$

откуда

$$\operatorname{ord}_{z=0} \Delta(z) \geq \omega M - \varepsilon M - \sum_{i=2}^m \omega_i^* (M - M_i) - O(\omega^2).$$

Кроме того, из (7) имеем тривиальную оценку

$$\deg \Delta(z) \leq \omega M + O(\omega^2).$$

Следовательно,

$$\deg \Delta(z) - \operatorname{ord}_{z=0} \Delta(z) \leq \varepsilon M + \sum_{i=2}^m \omega_i^* (M - M_i) + O(\omega^2).$$

Величина, стоящая в правой части последней оценки, не равна $o(M)$ за счет второго слагаемого. На самом деле, соотношение (10) в методе Зигеля дает оценку сверху порядка нуля определителя $\Delta(z)$ в рациональной точке α , отличной от нуля и особых точек системы (1). Именно это используется в числовых приложениях. А.И. Галочкин в работе [6] предложил принципиально новый метод оценки величины $\operatorname{ord}_{z=\alpha} \Delta(z)$, использующий арифметические (а не алгебраические, как выше) свойства построенных многочленов (3). При этом необходимость в соотношении (10) отпадает. Подробная реализация градуированных приближений Паде с помощью результата Галочкина [6] описана в работе [2].

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: wadim@ipsun.ras.ru

Поступило
17.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chudnovsky G. V. On some applications of diophantine approximations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. March. P. 1926–1930.
- [2] Зудилин В. В. Об оценках снизу многочленов от значений некоторых целых функций // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 57–86.
- [3] Зудилин В. В. О рациональных приближениях значений одного класса целых функций // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 4. С. 89–124.
- [4] Зудилин В. В. О мере иррациональности значений G -функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 87–114.
- [5] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [6] Галочкин А. И. Оценки числа нулей некоторых функций с алгебраическими коэффициентами рядов Тейлора // Матем. заметки. 1997 (в печати).