Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, О нормальной дилатации треугольных матриц, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 861–872

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:38:44

О НОРМАЛЬНОЙ ДИЛАТАЦИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Х. Д. Икрамов

1. Пусть R – вещественная или комплексная треугольная матрица порядка n , для определенности, верхнетреугольная. Спрашивается, существует ли нормальная $n \times n$ -матрица A , верхний треугольник которой совпадает с верхним треугольником R ? В вещественном случае ответ на этот вопрос очевиден и утвердителен: искомой нормальной матрицей может служить, например, симметричная матрица

$$A = R + R^T - \text{diag } R,$$

где

$$\text{diag } R = \{r_{11}, \dots, r_{nn}\}$$

– диагональная матрица, образованная диагональными элементами из R . Почти столь же очевиден положительный ответ для *комплексной* матрицы R с *вещественной* диагональю, поскольку такая матрица легко превращается в эрмитову. Матрицу R с чисто мнимыми диагональными элементами можно дополнить до косоэрмитовой. Более общо, если все диагональные элементы R принадлежат прямой

$$z = z_0 + e^{i\varphi_0}t, \quad -\infty < t < +\infty,$$

то R вкладывается в линейный многочлен

$$A = z_0 I + e^{i\varphi_0} H$$

от эрмитовой матрицы H , без труда восстанавливаемой по R . Наконец, нормальное дополнение существует для *всякой* матрицы R порядка 2, что следует из легко проверяемого описания комплексных нормальных 2×2 -матриц посредством формулы

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ be^{i\varphi} & c \end{bmatrix};$$

здесь $\varphi = 2(\arg(c-a) - \arg b + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, если $c \neq a$, $b \neq 0$; φ произвольно, если $c = a$ или $b = 0$.

Этим исчерпывается список ситуаций, когда треугольная матрица без особых затруднений может быть достроена до нормальной. Уже для произвольных треугольных матриц порядка 3 над $\mathbb{C}$ существование нормальных достраиваний – мы будем говорить о нормальных дилатациях – не было до сих пор доказано.

В настоящей статье устанавливается, что всякая верхнетреугольная 3×3 -матрица

$$R = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (1)$$

может быть вложена в нормальную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & d & e \\ y & z & f \end{bmatrix}.$$

Иначе говоря, система из шести уравнений с тремя неизвестными x, y, z , записывающая факт равенства нулю эрмитова коммутатора

$$C = AA^* - A^*A, \quad (2)$$

разрешима. Это утверждение, формулируемое в п. 3 как теорема, является простым следствием доказываемых в п. 2 вспомогательных положений.

Задача о нормальной дилатации треугольных матриц сообщена мне профессором Людвигом Эльзнером, за что я хочу выразить ему свою признательность.

2. Очевидно, что если для треугольной матрицы R нормальная дилатация возможна, то она возможна и для треугольных матриц следующего вида:

- а) $R + \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
- б) βR , $\beta \in \mathbb{C}$;
- в) $D^* R D$, D – диагональная унитарная матрица.

Это замечание позволяет вместо (1) рассматривать матрицу

$$R = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где b и c – вещественные неотрицательные числа. При этом можно считать, что

$$f_2 = \operatorname{Im} f \neq 0, \quad (4)$$

поскольку существование нормальной дилатации для матрицы R с вещественной диагональю уже известно. За исключением ограничения (4), которое многократно используется в дальнейшем, элементы $e = e_1 + ie_2$ и $f = f_1 + if_2$ могут принимать произвольные комплексные значения.

Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ x & 0 & e \\ y & z & f \end{bmatrix} \quad (5)$$

условия равенства нулю внедиагональных элементов (1, 2), (2, 3) и (1, 3) коммутатора (2) записываются соответственно уравнениями

$$x - y\bar{z} = \alpha, \quad (6)$$

$$\bar{y}x - f\bar{z} = \beta, \quad (7)$$

$$\bar{e}x + (\bar{f} - 1)y - bz = \gamma, \quad (8)$$

где мы положили

$$\alpha = b - ce, \quad \beta = bc - e\bar{f}, \quad \gamma = c(f - 1). \quad (9)$$

ЛЕММА 1. Система уравнений (6)–(8) совместна для любой матрицы (3).

Иными словами, для любой треугольной 3×3 -матрицы R возможно достраивание до матрицы A с диагональным коммутатором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая (6) и (7) как систему линейных уравнений относительно x и $\bar{z}$ с коэффициентами, зависящими от y , и ненулевым определителем $|y|^2 - f$ (напоминаем, что выполнено (4)), имеем

$$x = \frac{\alpha f - \beta y}{f - |y|^2}, \quad z = \frac{\bar{\alpha}y - \bar{\beta}}{\bar{f} - |y|^2}. \quad (10)$$

Подставляя эти выражения в (8), получим уравнение относительно y :

$$\bar{e} \frac{\alpha f - \beta y}{f - |y|^2} + (\bar{f} - 1)y + b \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}y}{\bar{f} - |y|^2} = \gamma. \quad (11)$$

Всякий корень этого уравнения вместе с однозначно определяемыми им значениями x и z составляет решение системы (6)–(8). Остается показать, что уравнение (11) разрешимо.

Полагая

$$t = |y|^2,$$

перепишем (11) в виде

$$\varphi_2(t)y = \psi_2(t), \quad (12)$$

где φ_2, ψ_2 — многочлены от t степени ≤ 2 , причем степень φ_2 в точности равна 2. Действительно, коэффициент при t^2 этого многочлена равен $\bar{f} - 1$.

Перемножая равенства

$$y = \frac{\psi_2(t)}{\varphi_2(t)}$$

и

$$\bar{y} = \frac{\overline{\psi_2(t)}}{\overline{\varphi_2(t)}},$$

где $\overline{\psi_2}(\overline{\varphi_2})$ получается из $\psi_2(\varphi_2)$ взятием сопряжений от всех коэффициентов, приходим к вещественному алгебраическому уравнению для t :

$$t = \frac{\psi_2(t)\overline{\psi_2(t)}}{\varphi_2(t)\overline{\varphi_2(t)}}. \quad (13)$$

Это уравнение пятой степени, поэтому по меньшей мере один вещественный корень у него имеется. Формула (13) показывает, что любой вещественный корень t_0 этого уравнения обязан быть неотрицательным. Зная t_0 , определяем y из (12). Отметим лишь, что при $\varphi_2(t_0) = 0$ непременно будет $\psi_2(t_0) = 0$, поэтому (12) выполняется автоматически, а решением уравнения (11) является всякое комплексное число вида $y = t_0^{1/2} e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Система уравнений (6)–(8) в дальнейшем называется системой (А). Наряду с ней, мы изучим систему (В), получаемую присоединением к уравнениям (6) и (7) условий равенства нулю диагональных элементов коммутатора (2):

$$|x|^2 + |y|^2 = \xi, \quad (14)$$

$$|x|^2 - |z|^2 = \eta, \quad (15)$$

где

$$\xi = b^2 + c^2, \quad \eta = b^2 - |e|^2. \quad (16)$$

ЛЕММА 2. Система (В) совместна для любой матрицы (3).

Иными словами, для любой треугольной матрицы R порядка 3 возможно достраивание до матрицы A , в коммутаторе которой разве лишь элементы $(1, 3)$ и $(3, 1)$ отличны от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем сопряжения от всех членов уравнения (6), после чего умножим обе части на x . Складывая с полученным уравнением помноженное на z уравнение (7), имеем

$$|x|^2 - f|z|^2 = \bar{\alpha}x + \beta z. \quad (17)$$

Учитывая (15), выводим отсюда

$$|x|^2 = \delta x + \varepsilon z + \tau, \quad (18)$$

где

$$\delta = -\frac{\bar{\alpha}}{f-1}, \quad \varepsilon = -\frac{\beta}{f-1}, \quad \tau = \frac{\eta f}{f-1}. \quad (19)$$

Как показано выше, уравнения (6) и (7) эквивалентны формулам (10). Вместе с равенством (18), последние дают выражение для $|x|^2$ через y . Подставляя это выражение в (14), приходим к уравнению для y :

$$\delta \frac{\alpha f - \beta y}{f - |y|^2} + \varepsilon \frac{\bar{\alpha} y - \bar{\beta}}{f - |y|^2} + |y|^2 = \xi - \tau. \quad (20)$$

Ниже будет показано, что уравнение (20) разрешимо. А сейчас мы проверим, что любое решение y этого уравнения вместе с вычисляемыми по формулам (10) значениями x и z составляет решение системы (В). Ясно, что тройка (x, y, z) удовлетворяет уравнениям (6) и (7), которые равносильны формулам (10). Как установлено выше, равенство (17) есть следствие из (6) и (7). Переписывая (20) в виде

$$|y|^2 + \delta x + \varepsilon z + \tau = \xi$$

и используя выражения (16), (19), имеем

$$|y|^2 - \frac{1}{f-1} \{ \bar{\alpha} x + \beta z \} + \frac{(b^2 - |e|^2)f}{f-1} = b^2 + c^2,$$

или, учитывая (17),

$$|y|^2 - \frac{1}{f-1} \{ |x|^2 - f|z|^2 \} + \frac{(b^2 - |e|^2)f}{f-1} = b^2 + c^2,$$

что можно записать как

$$f\{|y|^2 + |z|^2 - c^2 - |e|^2\} = |x|^2 + |y|^2 - b^2 - c^2. \quad (21)$$

Поскольку $\operatorname{Im} f \neq 0$, сопоставление мнимых частей в (21) дает

$$|y|^2 + |z|^2 = c^2 + |e|^2, \quad (22)$$

что превращает (21) в (14). Наконец, (15) есть следствие из (14) и (22).

Переходим теперь к доказательству разрешимости уравнения (20). При этом будем различать три случая: $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $\alpha\beta \neq 0$. Если, как и выше, положить $t = |y|^2$, то в первом и втором случаях (20) является уравнением только относительно t . Это означает, что система (В), если она совместна, определяет лишь *модуль* неизвестного y , т.е. число ее решений, вообще говоря, бесконечно.

Пусть вначале $\alpha = 0$, т.е. $b = ce$, $\beta = e(c^2 - \bar{f})$. Уравнение (20) редуцируется к виду

$$-\frac{\varepsilon\bar{\beta}}{\bar{f}-t} = \xi - \tau - t$$

и, как легко проверить, используя (16) и (19), удовлетворяется при $t_1 = c^2$.

При $\beta = 0$, т.е. $bc = e\bar{f}$, (20) превращается в уравнение

$$\frac{\delta\alpha f}{f-t} = \xi - \tau - t. \quad (23)$$

Имеем

$$\begin{aligned} S &\equiv (f-1)[(f-c^2)(\xi-\tau-c^2)-\delta\alpha f] \\ &= (|e|^2 f - b^2)(f-c^2) + |\alpha|^2 f = |e|^2 f^2 + b^2 c^2 - b^2 f - c^2 |e|^2 f + |\alpha|^2 f. \end{aligned}$$

Так как

$$|\alpha|^2 = |b - ce|^2 = b^2 + c^2 |e|^2 - 2bce_1,$$

то

$$\begin{aligned} S &= |e|^2 f^2 + b^2 c^2 - 2bce_1 f = |e|^2 f^2 + e^2 \bar{f}^2 - 2ee_1 |f|^2 \\ &= e(\bar{e}f^2 + e\bar{f}^2 - 2e_1 |f|^2) = 4f_2 e(e_2 f_1 - e_1 f_2) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\text{Im}(e\bar{f}) = \text{Im}(bc) = 0$. И так, $t_1 = c^2$ есть корень уравнения (23).

Рассмотрим, наконец, уравнение (20) при $\alpha\beta \neq 0$:

$$\delta \frac{\alpha f - \beta y}{f-t} + \varepsilon \frac{\bar{\alpha} y - \bar{\beta}}{\bar{f}-t} = \xi - \tau - t.$$

Приводя члены к общему знаменателю, запишем это уравнение в виде

$$\mu y = \psi_3(t), \quad (24)$$

где по-прежнему $t = |y|^2$,

$$\mu = 2i\varepsilon\bar{\alpha}f_2, \quad (25)$$

$$\psi_3(t) = |f-t|^2(\xi-\tau-t) + (\delta\alpha f - \varepsilon\bar{\beta})t + (\varepsilon\bar{\beta}f - \delta\alpha|f|^2). \quad (26)$$

То обстоятельство, что коэффициент при y оказывается константой, объясняется равенством $\delta\beta = \varepsilon\bar{\alpha}$. Это же равенство вместе с предположением $\alpha\beta \neq 0$ и условием (4) обеспечивает то, что константа (25) не равна нулю.

Несложными, хотя и громоздкими выкладками может быть проверено равенство

$$(f-1)\mu c = -\overline{[(f-1)\psi_3(c^2)]}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что, определив y формулой

$$y = \frac{\psi_3(c^2)}{\mu}, \quad (28)$$

мы получим число с модулем c , удовлетворяющее уравнению (20). Хотя этим лемма 2 уже обоснована, мы установим еще, в целях доказательства основной теоремы, что почти при всех значениях параметров b, c, e и f корень с модулем c у уравнения (20) только один, а именно, корень (28). Между тем, хотя бы еще одно решение этого уравнения должно существовать. В самом деле, умножая (24) на сопряженное уравнение, получим

$$|\mu|^2 t = \psi_3(t) \overline{\psi}_3(t). \quad (29)$$

Это вещественное алгебраическое уравнение 6-й степени относительно t . Наличие вещественного корня $t_1 = c^2$ влечет за собой существование еще по меньшей мере одного вещественного корня t_2 . Если $t_2 \neq t_1$, то (20) имеем решение

$$y_2 = \frac{\psi_3(t_2)}{\mu}, \quad (30)$$

отличное от (28).

Решение (30) отсутствует (или совпадает с (28)), если t_1 – кратный корень уравнения (29). Это возможно лишь, если

$$|\mu|^2 = 2 \operatorname{Re}(\overline{\psi}_3(c^2) \psi'_3(c^2)). \quad (31)$$

Мы покажем, что равенство (31) влечет за собой алгебраические соотношения между вещественными параметрами b, c, e_1, e_2, f_1 и f_2 . Это означает, что условие (31) может выполняться разве лишь на нигде не плотном подмножестве в пространстве указанных параметров.

Сразу отметим, что (31) невозможно в случае $c = 0$. Действительно, в этом случае $t_1 = 0$ и уравнение (29) дает $\psi_3(0) = 0$. В то же время $\mu \neq 0$. Поэтому в дальнейшем считаем $c \neq 0$.

Используя вытекающее из (27) представление для $\psi_3(c^2)$, а также формулы (19) и (25), приведем (31) к виду

$$|\mu|^2 = -4cf_2|f-1|^{-2} \operatorname{Im}[\overline{\alpha}\beta(f-1)\psi'_3(c^2)]. \quad (32)$$

Дифференцируя (26), получим

$$(f-1)\psi'_3(c^2) = -(f-1)|f-c^2|^2 + 2(c^2-f_1)(|e|^2f-b^2) + |\beta|^2 - |\alpha|^2f.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &\equiv \operatorname{Re}[(f-1)\psi'_3(c^2)] \\
 &= -f_1|f|^2 + (1+|e|^2)|f|^2 + 2(c^2-|e|^2)f_1^2 \\
 &\quad + (b^2+c^2|e|^2-2c^2-c^4)f_1 - 2bce_2f_2 + (c^4-b^2c^2), \\
 \pi_2 &\equiv \operatorname{Im}[(f-1)\psi'_3(c^2)] \\
 &= -f_2|f|^2 + 2(c^2-|e|^2)f_1f_2 + (c^2|e|^2-b^2-c^4+2bce_1)f_2, \\
 \rho_1 &\equiv \operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta) = (c|e|^2-be_1)f_1 - be_2f_2 + (b^2c-bc^2e_1), \\
 \rho_2 &\equiv \operatorname{Im}(\overline{\alpha}\beta) = -be_2f_1 + (be_1-c|e|^2)f_2 + bc^2e_2.
 \end{aligned}$$

Теперь мы можем представить (32) как алгебраическое уравнение вида

$$F(f_1, f_2) = 0$$

с коэффициентами, зависящими от параметров b, c, e_1 и e_2 . Покажем, что F не является нулевым многочленом тождественно по значениям параметров. Действительно, переписывая (32) как

$$4cf_2(\pi_1\rho_2 + \pi_2\rho_1) + |\mu|^2|f-1|^2 = 0,$$

найдем, что коэффициент при старшем (относительно лексикографического упорядочения) члене $f_1^4f_2$ равен $4bce_2$.

Итак, чтобы многочлен F вырождался необходимо, чтобы $b = 0$ либо $e \in \mathbb{R}$ (напомним, что $c \neq 0$).

Можно резюмировать ситуацию следующим образом. Чтобы имело место соотношение (31) необходимо подчинить значения параметров хотя бы одному из условий

$$b = 0, \quad e_2 = 0, \quad F(f_1, f_2) = 0, \quad (33)$$

где при $be_2 \neq 0$ многочлен F нетривиален. Если ни одно из условий (33) не выполнено, то $t_1 = c^2$ не может быть кратным корнем уравнения (29).

ЗАМЕЧАНИЕ. Ввиду важности факта, установленного в последней части доказательства леммы, мы сформулируем его как отдельное следующее предложение.

ЛЕММА 3. *За исключением нигде не плотного подмножества в пространстве параметров b, c, e_1, e_2, f_1, f_2 , система (В) имеет решение (x_0, y_0, z_0) такое, что $|y_0| \neq c$.*

Мы установим ниже связь между решениями систем (А) и (В). Однако, вначале будут доказаны два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 4. Для нормальной матрицы вида (5) равенства

$$|x| = b, \quad |y| = c, \quad |z| = |e| \quad (34)$$

выполняются или не выполняются одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предполагая выполненным, например, первое равенство (34), мы получим два других из соотношений (14)–(16).

ЛЕММА 5. Пусть a и b – заданные комплексные числа, причем $|a| \neq |b|$. Тогда уравнение относительно $z \in \mathbb{C}$

$$az - b\bar{z} = c \quad (35)$$

имеет для любого $c \in \mathbb{C}$ единственное решение, выражаемое формулами

$$\operatorname{Re} z = \frac{\operatorname{Re}[\bar{c}(a + b)]}{|a|^2 - |b|^2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{\operatorname{Im}[\bar{c}(b - a)]}{|a|^2 - |b|^2}. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если положить $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$, $z = x + iy$, то (35) эквивалентно вещественной системе линейных уравнений

$$(a_1 - b_1)x - (a_2 + b_2)y = c_1, \quad (a_2 - b_2)x + (a_1 + b_1)y = c_2$$

с ненулевым определителем $|a|^2 - |b|^2$. Записывая x и y по формулам Крамера, получим (36).

Мы переходим теперь к доказательству важнейшего утверждения в данном пункте.

ЛЕММА 6. Пусть (x, y, z) – решение системы (B) такое, что $|y| \neq c$. Тогда (x, y, z) удовлетворяет системе (A), а потому и всей системе, образованной уравнениями (6)–(8), (14), (15). Соответствующая матрица (5) является нормальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|y| \neq c$, то согласно лемме 4 $|z| \neq |e|$. Перепишывая уравнения (7) и (8) (первое из них – после взятия сопряжения от обеих частей) в виде

$$\bar{e}f - z\bar{f} = bc - \bar{x}y, \quad (37)$$

$$c(f - 1) - y(\bar{f} - 1) = \bar{e}x - bz, \quad (38)$$

замечаем, что в силу леммы 5 уравнения (37) и (38) эквивалентны соответственно парам формул

$$f_1 = \frac{\operatorname{Re}[(bc - x\bar{y})(\bar{e} + z)]}{|e|^2 - |z|^2}, \quad (39)$$

$$f_2 = \frac{\operatorname{Im}[(bc - x\bar{y})(z - \bar{e})]}{|e|^2 - |z|^2} \quad (40)$$

и

$$f_1 - 1 = \frac{\operatorname{Re}[(e\bar{x} - b\bar{z})(c + y)]}{c^2 - |y|^2}, \quad (41)$$

$$f_2 = \frac{\operatorname{Im}[(e\bar{x} - b\bar{z})(y - c)]}{c^2 - |y|^2}. \quad (42)$$

Так как x, y, z удовлетворяют уравнению (7), то формулы (39) и (40) справедливы. Если мы покажем, что выражения (41) и (42) для f_1 и f_2 согласованы с выражениями (39), (40), то это и будет означать, что уравнение (38) также удовлетворяется.

Подставляя в числитель формулы (40) соотношение

$$x = y\bar{z} + b - ce, \quad (43)$$

вытекающее из (6) и (9), после преобразований получаем ($y_1 = \operatorname{Re} y$, $y_2 = \operatorname{Im} y$ и т.д.)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[(bc - x\bar{y})(z - \bar{e})] &= bc z_1 - b \operatorname{Im}(\bar{y}z) + c \operatorname{Im}(e\bar{y}z) + bce_2 \\ &\quad - |y|^2 \operatorname{Im}(ez) - b \operatorname{Im}(ey) + c|e|^2 y_2. \end{aligned}$$

Если же подставить (43) в числитель формулы (42) и проделать аналогичные преобразования, то оказывается, что

$$\operatorname{Im}[(e\bar{x} - b\bar{z})(y - c)] = -\operatorname{Im}[(bc - x\bar{y})(z - \bar{e})]. \quad (44)$$

С другой стороны, равенство

$$|y|^2 + |z|^2 = c^2 + |e|^2$$

дает

$$|e|^2 - |z|^2 = -(c^2 - |y|^2). \quad (45)$$

Отсюда и из (44) следует справедливость формулы (42).

Сопоставим теперь правые части формул (39) и (41). Снова используя (43), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \nu_1 &\equiv \operatorname{Re}[(bc - x\bar{y})(\bar{e} + z)] = bce_1 - |y|^2 \operatorname{Re}(ez) - b \operatorname{Re}(ey) \\ &\quad + c|e|^2 y_1 + bc z_1 - |y|^2 |z|^2 - b \operatorname{Re}(\bar{y}z) + c \operatorname{Re}(e\bar{y}z), \\ \nu_2 &\equiv \operatorname{Re}[(e\bar{x} - b\bar{z})(c + y)] = c \operatorname{Re}(e\bar{y}z) + bce_1 - c^2 |e|^2 \\ &\quad - bc z_1 + |y|^2 \operatorname{Re}(ez) + b \operatorname{Re}(ey) - c|e|^2 y_1 - b \operatorname{Re}(\bar{y}z). \end{aligned}$$

Несложно проверить, что $\nu_1 + \nu_2 = |y|^2 - c^2$. В силу (45) это означает совпадение выражений для f_1 , даваемых формулами (39) и (41).

В случаях $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, выделенных в доказательстве леммы 2, справедливо более сильное утверждение, чем лемма 6.

ЛЕММА 7. Если $\alpha\beta = 0$, то системы (А) и (В) имеют общее решение (x, y, z) такое, что $|y| = c$. Соответствующая матрица (5) является нормальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $\alpha = 0$, т.е. $b = ce$. Заменяя в (11) $|y|$ через c , приходим к следующему уравнению для y :

$$\left\{ \bar{f} - 1 - \frac{\bar{e}\beta}{f - c^2} \right\} y = c(f - 1) - \frac{b\bar{\beta}}{\bar{f} - c^2}. \quad (46)$$

Если $c = 0$, то $b = 0$, и $y = 0$, очевидно, удовлетворяет (46). Если $c \neq 0$, то $e \in \mathbb{R}$. Полагая

$$\varkappa = f - c^2, \quad \theta = \bar{f} - 1 - \frac{e\beta}{\varkappa}, \quad (47)$$

имеем

$$\begin{aligned} \beta &= (c^2 - \bar{f})e, \quad \theta = \bar{f} - 1 + e^2 \frac{\varkappa}{\varkappa}, \\ c(f - 1) - \frac{b\bar{\beta}}{\varkappa} &= c \left\{ f - 1 + e^2 \frac{\varkappa}{\varkappa} \right\} = c\bar{\theta}. \end{aligned}$$

Поэтому при $\theta \neq 0$ (46) определяет число $y = c\bar{\theta}/\theta$ с модулем c . При $\theta = 0$ значение y в (46) произвольно. Остается вспомнить, что уравнение (20) при $\alpha = 0$ удовлетворяется для любого числа c с модулем c .

При $\beta = 0$, т.е. $bc = e\bar{f}$, уравнение (11) приводится к виду (см. (47))

$$\left\{ \bar{f} - 1 - \frac{\bar{\alpha}b}{\varkappa} \right\} y = c(f - 1) - \frac{\alpha\bar{e}f}{\varkappa}. \quad (48)$$

Если $c = 0$, то либо e , либо f равны нулю, и $y = 0$ есть решение (48). При $c \neq 0$ находим

$$\Delta \equiv c(f - 1) - \frac{\alpha\bar{e}f}{\varkappa} = c \left\{ f - 1 - \frac{\alpha}{\varkappa} \frac{\bar{e}f}{c} \right\} = c \left\{ f - 1 - \frac{\alpha b}{\varkappa} \right\},$$

и при $\Delta \neq 0$ уравнение (48) определяет единственное значение y , причем его модуль равен c . При $\Delta = 0$ годится любое y такое, что $|y| = c$.

Для доказательства основной теоремы потребуются еще две простые леммы.

ЛЕММА 8. Для нормальной матрицы вида (5) справедливо равенство

$$|x|^2 + 2|y|^2 + |z|^2 = b^2 + 2c^2 + |e|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно сложить (14) и равенство

$$|y|^2 + |z|^2 = c^2 + |e|^2.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть R – верхнетреугольная 3×3 -матрица, представляемая как верхнетреугольная часть нормальной матрицы A . Тогда

$$\|A\|_E^2 \leq 3\|R\|_E^2.$$

ЛЕММА 9. Пусть Γ_3 – множество верхнетреугольных 3×3 -матриц, реализуемых как верхнетреугольные части нормальных 3×3 -матриц. Множество Γ_3 замкнуто относительно любой нормы пространства $\mathbb{C}^{3,3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку все нормы конечномерного линейного пространства эквивалентны, будем для определенности говорить об евклидовой норме. Пусть $\{R_k\}$ – последовательность матриц из Γ_3 , сходящаяся к некоторой матрице R_0 . При достаточно больших k имеем

$$\|R_k\|_E \leq M \quad \text{при} \quad M = \|R_0\|_E + 1.$$

Для нормальных матриц A_k , отвечающих R_k , в силу следствия из леммы 8

$$\|A_k\|_E \leq \sqrt{3}M.$$

Преобразование, сопоставляющее всякой матрице ее верхнетреугольную часть, очевидно, непрерывно, а потому компакт, состоящий из нормальных матриц с нормой $\|A\| \leq \sqrt{3}M$, переводится этим преобразованием в компакт. Найдется, следовательно, нормальная матрица A_0 , чей образ совпадает с R_0 .

3. Из лемм, доказанных в предыдущем пункте, уже тривиально выводится теорема о нормальной дилатации.

ТЕОРЕМА. Для всякой верхнетреугольной 3×3 -матрицы R найдется нормальная 3×3 -матрица A , чья верхнетреугольная часть совпадает с R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммам 3 и 6 Γ_3 разве лишь нигде не плотным множеством может отличаться от пространства $\mathcal{R}_3$ всех верхнетреугольных 3×3 -матриц. Однако, в силу леммы 9 Γ_3 должно быть замкнуто, а потому $\Gamma_3 = \mathcal{R}_3$.

Автор выражает признательность Н. В. Савельевой за проведение предварительных компьютерных экспериментов по достраиванию треугольных матриц с помощью системы символьных вычислений MAPLE.