Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Ильиных, О плоскости Геринга и ассоциированных с ней блок-схемах, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 873–881

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:52:29

О ПЛОСКОСТИ ГЕРИНГА И АССОЦИИРОВАННЫХ С НЕЙ БЛОК-СХЕМАХ

А. П. Ильиных

Плоскость Геринга π_H [1] и две связанные с ней блок-схемы [2] являются исключительными объектами в теории проективных плоскостей [3] и классификации блок-схем с 2-транзитивной группой автоморфизмов [4].

В [5] получена теорема, описывающая с точностью до изоморфизма конечные группоиды с 2-транзитивной группой автоморфизмов. В заключение этой теоремы возникает спорадический группоид X , где $\text{Aut } X \cong \text{Aut } \pi_H$. Для его построения необходима удобная для вычислений конструкция плоскости π_H . В данной работе построена аффинная плоскость $\mathcal{A}_f$ порядка q и вычислен ее тернар. При $q = 27$ получается простая конструкция плоскости Геринга π_H и группы $\text{Aut } \pi_H$ [6]. В п. 3 подробно изучены две указанные блок-схемы, информация о которых приведена в [2] без доказательства.

1. Плоскость $\mathcal{A}_f$. Пусть $f: x \mapsto x^f$ — автоморфизм аддитивной группы поля $F = \text{GF}(q)$, q нечетно, $F^* = F \setminus \{0\}$, $\Delta = \{x^f x \mid x \in F^*\}$, $-\Delta = \{-x \mid x \in \Delta\}$. Предположим, что

$$F^* = \Delta \cup -\Delta.$$

Поскольку $(-x)^f(-x) = x^f x$, то $|\Delta| \leq (q-1)/2$ и $\Delta \cap -\Delta = \emptyset$. Ясно, что $\Delta = \{x^{f^{-1}} x \mid x \in F^*\}$ и поэтому

$$F^* = \{ \varepsilon x^{f^\varepsilon} x \mid x \in F^*, \varepsilon = \pm 1 \}. \quad (1)$$

Рассмотрим группу $(\mathcal{P}, +)$, где $\mathcal{P} = \{(x, y) \mid x, y \in F\}$, $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$. Пусть $\mathcal{L}_0$ — множество подгрупп в группе $\mathcal{P}$, обозначенных через H , V и L_ε^k , где $k \in F^*$ и $\varepsilon = \pm 1$; при этом

$$\begin{aligned} H &= \{(x, 0) \mid x \in F\}, & V &= \{(0, x) \mid x \in F\}, \\ L_1^k &= \{(xk, x^f k^{-1}) \mid x \in F\}, & L_{-1}^k &= \{(-x^f k, xk^{-1}) \mid x \in F\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $L_\varepsilon^k = L_\varepsilon^{-k}$, $F^* = \Delta \cup -\Delta$, то

$$\mathcal{L}_0 = \{H, V\} \cup \{L_\varepsilon^k \mid k \in \Delta, \varepsilon = \pm 1\}, \quad (3)$$

$$L_\varepsilon^k = \{(\varepsilon xk, x^{f^\varepsilon} k^{-1}) \mid x \in F\}. \quad (4)$$

Рассмотрим инцидентностную структуру $\mathcal{A}_f = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, где $\mathcal{P}$ – множество точек, $\mathcal{L} = \{L + x \mid L \in \mathcal{L}_0 \text{ и } x \in \mathcal{P}\}$ – множество прямых. Если $p \in \mathcal{P}$, $M = L + x \in \mathcal{L}$, то pIM означает, что p – элемент смежного класса M .

Предложение 1. $\mathcal{A}_f$ – *аффинная плоскость трансляций*.

Доказательство. По [3, с. 131] достаточно проверить, что подгруппы $L \in \mathcal{L}_0$ образуют расщепление группы $\mathcal{P}$. Так как $|\mathcal{L}_0| \leq q+1$, $|L| = q$, $|\mathcal{P}| = q^2$, то нужно лишь установить, что любой элемент $p = (a, b)$ содержится в некоторой подгруппе $L \in \mathcal{L}_0$. Если $ab = 0$, то $p \in H$ или $p \in V$. Пусть $ab \neq 0$.

Подстановка $(x, y) \mapsto (xk, yk^{-1})$, $k \in F^*$, переставляет прямые из $\mathcal{L}_0$. Поэтому считаем $a = 1$, $p = (1, b)$. Тогда

$$\begin{aligned} (1, b) \in L_1^k, & \quad \text{если } b = (k^{-1})^f k^{-1}, \\ (1, b) \in L_{-1}^k, & \quad \text{если } b = -(k^{-1})^{f^{-1}} k^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

т.е.

$$(1, b) \in L_\varepsilon^k \quad \text{для } b = \varepsilon(k^{-1})^{f^\varepsilon} k^{-1} \text{ и } \varepsilon = \pm 1. \quad (6)$$

Предложение доказано.

Следуя [7, п. 20.3, рис. 11], введем координаты и найдем тернар плоскости $\mathcal{A}_f$. Пусть π – проективная плоскость с бесконечно удаленной прямой XY , соответствующая плоскости $\mathcal{A}_f$. Рассмотрим тернар R для четверки точек $(0, e, X, Y)$, где $0 = (0, 0)$, $e = (1, 1^f)$. При этом прямая $x = 0$ в π равна $V \cup \{Y\}$, прямая $y = 0$ равна $H \cup \{X\}$. Припишем точке (a, a^f) прямой $0e$ координаты $[a, a]$. Заметим, что координаты будут обозначаться прямыми скобками. Тогда

$$\text{точка } (a, b^f) \text{ имеет координаты } [a, b]. \quad (7)$$

По теореме 20.4.6 в [7] R – система Веблена–Веддербарна (квазитело), $R = (F, \oplus, \circ, 0, 1)$ и нужно лишь указать сумму $x \oplus b$ и произведение $x \circ t$ в R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Квазитело R плоскости $\mathcal{A}_f$ состоит из элементов поля F . Сложение в R совпадает со сложением в поле F , операция умножения 'о' однозначно определена следующими равенствами, где $a, b \in F$:*

$$a \circ (b^f b)^{f^{-1}} = ((ab)^f b)^{f^{-1}}, \quad (8)$$

$$a \circ (-b^{f^{-1}} b)^{f^{-1}} = -((ab)^{f^{-1}} b)^{f^{-1}}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть '⊕' – сложение в R и L – прямая $y = x \oplus b$ в плоскости π . Тогда $L = \{[x, x \oplus b] \mid x \in F\} \cup \{[1]\}$ и L имеет точки из $\mathcal{P}$ вида $(x, x^f + b^f)$. По (7) $(x, x^f + b^f) = [x, (x^f + b^f)^{f^{-1}}]$. Отсюда $x \oplus b = (x^f + b^f)^{f^{-1}} = x + b$, с учетом $f^{-1} \in \text{Aut}(F, +)$. Получили $x \oplus b = x + b$ для всех $x, b \in F$.

Найдем произведение $x \circ t$ для $x, t \in F$, где $t \neq 0$. Прямая $y = x \circ t$ содержит точки $[0, 0] = (0, 0)$ и $[1, t] = (1, t^f)$. По (6) при $b = t^f$ получаем $(1, t^f) \in L_\varepsilon^k$, где $t^f = \varepsilon(k^{-1})^{f^\varepsilon} k^{-1}$, $t = (\varepsilon(k^{-1})^{f^\varepsilon} k^{-1})^{f^{-1}}$. Из (4) и (7) $L_\varepsilon^k = \{[xk, \varepsilon(x^{f^\varepsilon} k^{-1})^{f^{-1}}] \mid x \in F\}$. Поэтому $xk \circ (\varepsilon(k^{-1})^{f^\varepsilon} k^{-1})^{f^{-1}} = \varepsilon(x^{f^\varepsilon} k^{-1})^{f^{-1}}$. Обозначив $a = xk$, $b = k^{-1}$, имеем

$$a \circ \varepsilon(b^{f^\varepsilon} b)^{f^{-1}} = \varepsilon((ab)^{f^\varepsilon} b)^{f^{-1}}. \quad (10)$$

При $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$ получим (8) и (9). Предложение доказано.

Заменив b на b^f в (9), получаем другой вид равенства (9)

$$a \circ -(b^f b)^{f^{-1}} = -((ab^f)^{f^{-1}} b^f)^{f^{-1}}. \quad (11)$$

2. Плоскость π_H . Рассмотрим пример плоскости $\mathcal{A}_f$. Пусть $F = \text{GF}(q)$ и $f \in \text{Aut}(F, +)$. Потребуем выполнения следующего условия:

$$(x^{-1})^f = \pm x^f x \quad \text{для всех } x \in F^* = F \setminus \{0\}, \quad (12)$$

где знак '±' зависит от элемента x . Ясно, что из (12) следует $F^* = \Delta \cup -\Delta$. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть F – поле, содержащее более 7 элементов, $f \in \text{Aut}(F, +)$, $1^f = 1$ и верно равенство (12). Тогда $q = 27$ и $x^f = x - \text{Tr } x = -x^3 - x^9$.*

Нам не понадобится это утверждение, поэтому доказательство опускается. Проверим лишь равенство (12). Пусть $F = \text{GF}(27)$, $x^f = -x^3 - x^9$.

Если $x \in (F^*)^2$, то $x^{13} = 1$, $(x^{-1})^f = -x^{-3} - x^{-9} = x^f x$. Если $x \in F^* \setminus (F^*)^2$, то $x^{13} = -1$, $(x^{-1})^f = -x^{-3} - x^{-9} = -x^f x$.

В оставшейся части работы используем следующие обозначения: $F = \text{GF}(27)$, $F^* = F \setminus \{0\} = \langle \theta \rangle$, где $\theta^3 = \theta - 1$, $(F^*)^2 = \{x^2 \mid x \in F^*\}$, $x^f = -x^3 - x^9$, $\Delta = \{x^f x \mid x \in F^*\}$. π_H – плоскость $\mathcal{A}_f$, G – группа коллинеаций плоскости π_H , G_0 – стабилизатор в G точки $(0, 0)$, T – группа трансляций, z – элемент из G_0 , где $(x, y)^z = (-x, -y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. а) *Плоскость π_H имеет множество точек $\mathcal{P} = \{(x, y) \mid x, y \in F\}$ и множество прямых $\mathcal{L} = \{L + x \mid L \in \mathcal{L}_0, x \in \mathcal{P}\}$. При этом $\mathcal{L}_0$ состоит из следующих подгрупп в $(\mathcal{P}, +)$, обозначенных через i_ε , где $i \in \text{PG}(1, 13) = \{\infty\} \cup \text{GF}(13) = \{\infty, 0, 1, \dots, 12\}$, $\varepsilon = \pm 1$:*

$$\begin{aligned} \infty_1 &= \{(x, 0) \mid x \in F\}, & \infty_{-1} &= \{(0, x) \mid x \in F\}, \\ i_1 &= \{(x\theta^i, (x - \text{Tr } x)\theta^{-i}) \mid x \in F\}, \\ i_{-1} &= \{((-x + \text{Tr } x)\theta^i, x\theta^{-i}) \mid x \in F\}, & i &\in \{0, 1, \dots, 12\}. \end{aligned} \quad (13)$$

б) *Квазитело R плоскости π_H , соответствующее четверке точек $(0, e, X, Y)$, где $0 = (0, 0)$, $e = (1, 1)$, состоит из элементов поля F . Сложение в R то же, что и в поле F . Умножение задается равенствами $a \circ 0 = 0$ и*

$$a \circ b = \begin{cases} ((ab^{-1})^f b^{-1})^{f^{-1}}, & \text{если } b - \text{квадрат в } F^*, \\ -((a(b^{-1})^f)^{f^{-1}} (b^{-1})^f)^{f^{-1}}, & \text{если } b - \text{не квадрат в } F^*. \end{cases} \quad (14)$$

Ядро квазитела R состоит из элементов $0, \pm 1$. Группа $\text{Aut } R$ совпадает с $\text{Aut } F$.

в) Пусть α, β, γ – подстановки множества $\mathcal{P}$, причем $\beta = \beta_0 \beta_1$ и

$$\begin{aligned} \alpha: (x, y) &\mapsto (x\theta, y\theta^{-1}), & \beta_0: (x, y) &\mapsto (x^3, y^3), & \beta_1: (x, y) &\mapsto (-y, x), \\ \gamma: (x, y) &\mapsto (x^\nu + y^{\nu^{-1}}, x^{\nu^{-1}} - y^\nu), \end{aligned} \quad (15)$$

где $x^\nu = xa + x^3a^9 + x^9a^3$ для всех $x \in F$, $a = \theta^5$.

Тогда $G_0 = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ и

$$\begin{aligned} (i_\varepsilon)^\alpha &= (i + 1)_\varepsilon, & (i_\varepsilon)^\beta &= (10 \cdot i)_{-\varepsilon}, \\ (i_\varepsilon)^\gamma &= \begin{cases} (-i^{-1})_{-\varepsilon}, & \text{если } i - \text{не квадрат в } \text{GF}(13), \\ (-i^{-1})_\varepsilon & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $\mathcal{D}$ – совокупность всех двухэлементных множеств $d_i = \{i_\varepsilon, i_{-\varepsilon}\}$, где $i_\varepsilon \in \mathcal{L}_0$. Группа G_0 действует 2-транзитивно на $\mathcal{D}$, причем

$$(d_i)^\alpha = d_{i+1}, \quad (d_i)^\beta = d_{10i}, \quad (d_i)^\gamma = d_{-i-1}. \quad (17)$$

Ядро действия равно $\langle z \rangle$. Группа G_0 изоморфна $\text{SL}(2, 13)$ и действует транзитивно на $\mathcal{P} \setminus \{(0, 0)\}$. Группа G 2-транзитивна на $\mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Обозначим $F_1 = \{\theta^i \mid 0 \leq i \leq 12\}$. Так как $L_\varepsilon^k = L_\varepsilon^{-k}$, то $\{L_\varepsilon^k \mid k \in F^*\} = \{L_\varepsilon^k \mid k \in F_1\}$. Из (2) получаем, что прямые в $\mathcal{L}_0$ имеют вид (13).

б) Если $b \in (F^*)^2$, то справедливо $(b^f b)^{f^{-1}} = b^{-1}$. Из (8) получаем $a \circ b^{-1} = ((ab)^f b)^{f^{-1}}$. Заменяя b на b^{-1} , получаем первое равенство в (14). Если b – не квадрат в F^* , то $-(b^f b)^{f^{-1}} = b^{-1}$. Из (11) $a \circ b^{-1} = -((ab^f)^{f^{-1}} b^f)^{f^{-1}}$. Заменяя b на b^{-1} , и получим второе равенство в (14). Пусть $b = -1$ в равенстве (14). Тогда $a \circ (-1) = -a^{f^{-2}}$. Так как $|f| = 3$, то $a \circ (-1) = -a^f = -a + \text{Tr } a$. Поскольку $(-1) \circ a = -a$, то

$$-1 \circ a = a \circ (-1) \iff \text{Tr } a = 0. \quad (18)$$

Поэтому R не является полем. Пусть R_0 – ядро квазитела R , $n = \dim_{R_0} R$ (см. [3, с.132]). Так как $\{0, \pm 1\} \subseteq R_0 \subset R$, $|R_0|^n = 27$, $n > 1$, то $|R_0| = 3$, т.е. $R_0 = \{0, \pm 1\}$. Пусть $\varphi \in \text{Aut } F$. Так как $\varphi f = f\varphi$, то из (14) получаем $(a \circ b)^\varphi = a^\varphi \circ b^\varphi$, т.е. $\text{Aut } F \subseteq \text{Aut } R$. Предположим, что существует элемент $\varphi \in \text{Aut } R \setminus \text{Aut } F$. Если $\text{Tr } a = 0$, то по (18) $-1 \circ a^\varphi = a^\varphi \circ (-1)$, $\text{Tr } a^\varphi = 0$. Пусть $A = \{a \in F \setminus \{0, \pm 1\} \mid \text{Tr } a = 0\}$. Тогда $A^\varphi = A$ и $A = \{\pm \theta^i \mid i \in \{1, 3, 9\}\}$. Заменяя φ на $\varphi\psi$, где $\psi \in \text{Aut } F$, считаем, что 1) $\theta^\varphi = \theta$ или 2) $\theta^\varphi = -\theta$. Если $\theta^\varphi = \theta$, то φ фиксирует элементы 1, θ , $\theta \circ \theta = \theta^4 = \theta^2 - \theta$. Тогда $\varphi = 1$, противоречие с $\varphi \notin \text{Aut } F$. Для вычисления произведений в R по (14) используем разложение f в произведение циклов, записывая вместо θ^i букву i :

$$f = (2, 21, 12)(4, 18, 7)(5, 20, 17)(6, 11, 10)(8, 25, 15)(19, 24, 23).$$

Если $\theta^\varphi = -\theta$, то $\theta^{\varphi^2} = \theta$ и поэтому $\varphi^2 = 1$; вместе с тем $(\theta \circ \theta)^\varphi = \theta^\varphi \circ \theta^\varphi$, $(\theta^4)^\varphi = (-\theta) \circ (-\theta)$, $(\theta^2 - \theta)^\varphi = \theta^{21}$, $(\theta^2)^\varphi = \theta^{21} - \theta = 1 - \theta + \theta^2$.

Отсюда $(\theta^2)^\varphi = 1 + \theta + 1 - \theta + \theta^2 = -1 + \theta^2$. Противоречие с $\varphi^2 = 1$. Поэтому $\text{Aut } R = \text{Aut } F$.

в) Первые два равенства в (16) непосредственно следуют из (13) и (15). При этом

$$(i_\varepsilon)^{\beta_0} = (3i)_\varepsilon, \quad (i_\varepsilon)^{\beta_1} = (-i)_{-\varepsilon}. \quad (19)$$

Также очевидны необходимые в дальнейшем равенства $\nu^2 = f^{-1}$ и

$$\begin{aligned}(x, y)^{\gamma^2} &= (x, y)^{\beta_1^2} = (-x, -y), \quad \text{т.е. } \gamma^2 = \beta_1^2 = z, \\ |\alpha| &= 26, \quad |\beta_0| = 3, \quad |\beta_1| = 4, \quad \beta_0\beta_1 = \beta_1\beta_0, \\ \beta_0\gamma &= \gamma\beta_0^{-1}, \quad \beta_1\gamma = \gamma\beta_1^{-1}, \quad \gamma^{-1}g\gamma = g^{-1} \quad \text{для всех } g \in \langle \beta \rangle.\end{aligned}\quad (20)$$

Третье равенство в (16) очевидно, если $i = 0, \infty$. Проверим его для $i \in \{1, 2, \dots, 12\}$. Для любого i по (16) существует $g \in \langle \beta \rangle$ с условием $(x_\varepsilon)^g = (x \cdot i)_{\delta_\varepsilon}$, $\delta(g) = \delta(g^{-1}) = \pm 1$ или $(x_\varepsilon)^g = (x \cdot i/2)_{\delta_\varepsilon}$. Тогда $(i_\varepsilon)^\gamma = (1_{\delta_\varepsilon})^{\gamma\gamma^{-1}g\gamma} = (1_{\delta_\varepsilon})^{\gamma g^{-1}}$ или $(i_\varepsilon)^\gamma = (2_{\delta_\varepsilon})^{\gamma\gamma^{-1}g\gamma} = (2_{\delta_\varepsilon})^{\gamma g^{-1}}$. Поэтому достаточно проверить равенства $(1_\varepsilon)^\gamma = (-1)_\varepsilon$, $(2_\varepsilon)^\gamma = 6_{-\varepsilon}$. Множество $\{(xk, x^fk^{-1}) \mid x \in F\}$ будем записывать в кратком виде $\{(xk, x^fk^{-1})\}$. Имеем

$$\begin{aligned}1_1 &= \{(x\theta, x^f\theta^{-1})\} = \{(x, (x\theta^{-1})^f\theta^{-1})\} = \{(x, x^{\varphi_1})\}, \\ -1_1 &= \{(x\theta^{-1}, x^f\theta)\} = \{(x, (x\theta)^f\theta)\} = \{(x, x^{\varphi_2})\}.\end{aligned}$$

При этом $x^{\varphi_1} = (x\theta^{-1})^f\theta^{-1}$, $x^{\varphi_2} = (x\theta)^f\theta$; φ_1, φ_2 – линейные преобразования F с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисе $1, \theta, \theta^2$. Равенство $(1_1)^\gamma = -1_1$ означает

$$\begin{aligned}\{(x^{\nu+\varphi_1\nu^{-1}}, x^{\nu^{-1}-\varphi_1\nu})\} &= \{(x, x^{\varphi_2})\}, \\ (\nu + \varphi_1\nu^{-1})\varphi_2 &= \nu^{-1} - \varphi_1\nu,\end{aligned}$$

т.е. $(M + A_1M^{-1})A_2 = M^{-1} - A_1M$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрицы ν и ν^{-1} . Подставляя матрицы M и M^{-1} , проверяем справедливость равенства. Из $(1_1)^\gamma = -1_1$, имеем $(1_1)^{\gamma\beta_1} = (-1_1)^{\beta_1}$. Так как $\gamma\beta_1 = \beta_1\gamma^{-1}$, то $(1_1)^{\beta_1\gamma^{-1}} = (-1_1)^{\beta_1}$, $(1_{-1})^\gamma = -1_{-1}$. Аналогично доказывается равенство $(2_\varepsilon)^\gamma = 6_{-\varepsilon}$. Поэтому справедливы равенства (16).

Рассмотрим группу $G_1 = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Из (16) следует, что G_1 действует на множестве $\mathcal{D}$ и выполнены равенства (17). Пусть N – ядро этого действия. Ясно, что $z \in N$, т.е. $|N| \geq 2$. Из (17) непосредственно

следует, что $G/N \cong \text{PSL}(2, 13)$ и G_1 2-транзитивна на $\mathcal{D}$. Получили $|G_1| = |N| \cdot |\text{PSL}(2, 13)| \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$. Отождествим элемент $x(1, 0) + y(\theta, 0) + z(\theta^2 - 1, 0) + p(0, 1) + q(0, \theta) + r(0, \theta^2)$, где $x, y, z, p, q, r \in \text{GF}(3)$, со строкой (x, y, z, p, q, r) . Непосредственными вычислениями получаем $i_1 = l_i$, $i_{-1} = l_{i+13}$, где $0 \leq i \leq 12$; $\infty_1 = 26$, $\infty_{-1} = 27$ для прямых l_i из таблицы 2.1 из [6]. Поэтому π_H – плоскость Геринга. По [6] $|\text{Aut } \pi_H| = 3^6 \times |\text{SL}(2, 13)|$, $|G_0| \leq |G_1|$. Так как $G_1 \subseteq G_0$, то $G_1 = G_0$, $|N| = 2$, $N = \langle z \rangle$. Легко видеть, что $|G_{0,x}| = 3$ и G_0 транзитивна на $\mathcal{P} \setminus \{(0, 0)\}$, G 2-транзитивна на $\mathcal{P}$. Предложение доказано.

3. Блок-схемы $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Пусть U_1 и U_2 – подгруппы в $(\mathcal{P}, +)$, где

$$U_1 = \{(x, y) \mid x, y \in F_0\}, \quad U_2 = \{(x - y\theta, y) \mid x, y \in F_0\}, \quad (21)$$

$F_0 = \text{GF}(3) = \{0, \pm 1\}$. Для $i = 1, 2$ рассмотрим блок-схему $\mathcal{H}_i$ с множеством точек $\mathcal{P}$ и множеством блоков $U_i^g + x$, где $g \in G_0$, $x \in \mathcal{P}$. Пусть $\delta = \alpha^{-2}\gamma\alpha^2$, $Q_1 = \langle \beta_1, \gamma \rangle$, $Q_2 = \langle \delta, \beta_0^{-1}\delta\beta_0 \rangle$, $X_1 = \langle Q_1, \beta_0 \rangle$, $X_2 = \langle Q_2, \beta_0 \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Указателем $I(B)$ блока $B = U_i^g$, $g \in G_0$, называется множество произведений ab , где (a, b) пробегает все элементы из $B \setminus \{(0, 0)\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Блок-схемы $\mathcal{H}_i$ являются системами Штейнера $S(2, 9, 3^6)$, $G \subseteq \text{Aut } \mathcal{H}_i$ и группа $\text{Aut } \mathcal{H}_i$ 2-транзитивна на $\mathcal{P}$. Стабилизатор блока U_i в G_0 равен X_i , причем Q_i – группа кватернионов, $X_i = Q_i \langle \beta_0 \rangle$, $\beta_0 \triangleleft X_1$, $Q_2 \triangleleft X_2$, $X_1 / \langle z \rangle$ – группа диэдра порядка 12, $X_2 \cong \text{SL}(2, 3)$.

Блоки U_1^g , $g \in G_0$, имеют вид A_k , B_k^i , C_k^i , где $k \in (F^*)^2$, $i = 0, 1, 2$; элементы x, y принимают все значения из F_0 :

$$\begin{aligned} A_k &= \{(xk, yk^{-1})\}, \quad I(A_k) = \{0, \pm 1\}, \\ B_k^i &= \{((x\theta - y\theta^8)^{3^i}k, (x\theta - y\theta^2)^{3^i}k^{-1})\}, \quad I(B_k^i) = \{\pm\theta^{-3^{i+1}}, \pm\theta^{2 \cdot 3^i}\}, \\ C_k^i &= \{((x\theta^{-2} + y\theta^2)^{3^i}k, (x\theta^{-3} + y\theta^{-1})^{3^i}k^{-1})\}, \\ I(C_k^i) &= \{\pm\theta^{3^i}, \pm\theta^{-2 \cdot 3^{i+2}}\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Блоки U_2^g , $g \in G_0$, имеют вид D_k , D'_k , E_k , E'_k , F_k^i , где $k \in (F^*)^2$,

$i = 0, 1, 2$; элементы x, y пробегают все значения из F_0 :

$$\begin{aligned} D_k &= \{((x - y\theta)k, yk^{-1})\}, \quad I(D_k) = \{0\} \cup \{-\theta^{3^i} \mid i = 0, 1, 2\}, \\ D'_k &= \{(-b, a) \mid (a, b) \in D_k\}, \quad I(D'_k) = -I(D_k), \\ E_k &= \{((x + y\theta^3)k, (x + y\theta)k^{-1})\}, \quad I(E_k) = \{1\} \cup \{-\theta^{-3^i} \mid i = 0, 1, 2\}, \\ E'_k &= \{(-b, a) \mid (a, b) \in E_k\}, \quad I(E'_k) = -I(E_k), \\ F_k^i &= \{((x\theta + y\theta^8)^{3^i}k, (x\theta - y)^{3^i}k^{-1})\}, \quad I(F_k^i) = \{\pm\theta^{2 \cdot 3^i}, \pm\theta^{-2 \cdot 3^{i+2}}\}. \end{aligned} \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По (20) получаем, что Q_1 – группа кватернионов, $Q_1 \subseteq N_{G_0}(\langle\beta_0\rangle)$, $X_1/\langle z \rangle = D_{12}$. Из (15), (21) и $X_1 = \langle\beta_0, \beta_1, \gamma\rangle$ следует, что $U_1^g = U_1$ для $g \in X_1$. Так как X_1 – максимальная подгруппа в G_0 , то X_1 – стабилизатор множества U_1 в G_0 . Рассмотрим запись ν в произведение циклов, причем единичные циклы опущены и вместо θ^i записана буква i :

$$\begin{aligned} \nu &= (1, 16)(2, 11, 12, 6, 21, 10)(3, 14)(4, 18, 7)(5, 20, 17) \\ &\quad (8, 23, 15, 24, 25, 19)(9, 22). \end{aligned} \quad (24)$$

Непосредственными вычислениями проверяем, что $(1, 0)^{\beta_0} = (1, 0)$, $(-\theta, 1)^{\beta_0} = (-\theta + 1, 1) \in U_2$, т.е. $U_2^{\beta_0} = U_2$. Учитывая (15), получаем $(1, 0)^\delta = (\theta, -1) \in U_2$, $(-\theta, 1)^\delta = (1, 0) \in U_2$, т.е. $U_2^\delta = U_2$. Так как $|G_{0,x}| = 3$ для $x \neq 0$, то $|X_2| \leq 24$. Поскольку β_0 фиксирует в U_2 лишь элементы $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$ и $(1, 0)^\delta = (\theta, -1)$, то $\delta \notin N_{G_0}(\langle\beta_0\rangle)$. Отсюда $X_2 \cong \text{SL}(2, 3)$, $Q_2 = \langle\delta, \beta_0^{-1}\delta\beta_0\rangle$ – группа кватернионов, $X_2 = Q_2\langle\beta_0\rangle$ – стабилизатор множества U_2 в G_0 .

Пусть $i = 1$ или $i = 2$. Так как G_0 транзитивна на $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{(0, 0)\}$, то каждый элемент из $\mathcal{P}^*$ лежит в некотором блоке $B = U_i^g$, $g \in G_0$. Число блоков равно $|G_0|/|X_i| = 91$, т.е. блок B единственен. Следовательно, блоки $U_i^g + x$, $g \in G_0$, $x \in \mathcal{P}$, образуют блок-схему $\mathcal{H}_i$, являющуюся системой Штейнера $(2, 9, 3^6)$. При этом $G \subseteq \text{Aut } \mathcal{H}_i$ и $\text{Aut } \mathcal{H}_i$ 2-транзитивна на $\mathcal{P}$.

Из (15) и действия элемента ν получаем равенства

$$\begin{aligned} A_1 &= U_1, \quad B_1^i = U_1^{\alpha\gamma\beta_0^{i-1}}, \quad C_1^i = U_1^{\alpha^2\gamma\beta_0^i}, \\ D_1 &= U_2, \quad D_1' = U_2^{\beta_1}, \quad E_1 = U_2^{\gamma\beta_0}, \quad E_1' = U_1^{\beta_1}, \quad F_1^i = U_2^{\alpha\gamma\beta_0^{i-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому все множества в (22) имеют вид U_1^g и все множества в (23) имеют вид U_2^g , где $g \in G_0$.

Учитывая в блоках из (22) пары (a, b) , получающиеся при $(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1)\}$, непосредственно получим указатели блоков. Так как

$F = \{0, \pm 1\} \cup \{\pm \theta^{\pm 3^i}, \pm \theta^{\pm 2 \cdot 3^i}\}$, то указатели блоков из (22) исчерпывают все элементы из F . Это означает, что в (22) ровно 91 блок, т.е. все блоки U_1^g . Аналогично получаем, что в (23) входят все блоки U_2^g . Предложение доказано.

Правило для нахождения блока B , содержащего точки $p, q \in \mathcal{P}$, весьма простое. Так как группа трансляций содержится в $\text{Aut } \mathcal{H}_i$, то считаем $q = (0, 0)$. Пусть, например, $p = (\theta, \theta^4)$ и $i = 1$. Так как $\theta \cdot \theta^4 = \theta^5 \in I(B_k^2)$, то $(\theta, \theta^4) \in B_k^2$ для некоторого k . Существуют $x, y \in F_0$ такие, что

$$\begin{aligned}(x\theta - y\theta^8)^9 k &= \theta, & (x\theta - y\theta^2)^9 k^{-1} &= \theta^4, \\ (x\theta - y\theta^8)k^3 &= \theta^3, & (x\theta - y\theta^2)k^{-3} &= \theta^{12}.\end{aligned}$$

Отсюда $(x\theta - y\theta^8)(x\theta - y\theta^2) = \theta^{15}$, $x = 1, y = -1, k = \theta^8$.

Пусть U — подгруппа в $\mathcal{P}$ порядка 9, неподвижная относительно X_i , где $i = 1$ или $i = 2$. Если $i = 1$, то из $\langle \beta_0 \rangle \triangleleft X_1$ следует $U = \{x \in \mathcal{P} \mid x^{\beta_0} = x\} = U_1$. Если $i = 2$, то β_0 фиксирует ровно 2 элемента $\pm x \neq (0, 0)$ в $U \setminus \{(0, 0)\}$, $x = (a, b)$, $a, b \in F_0$. Если $x = (1, 0)$, то из $(1, 0)^\delta = (\theta, -1)$ заключаем $U = \langle (1, 0), (\theta, -1) \rangle = U_2$. Случаи $x = (0, \pm 1)$, $x = (\pm 1, \pm 1)$ невозможны, так как проверка показывает, что $|\langle x, x^\delta, x^{\delta\beta_0} \rangle| > 9$. Итак, для $i = 1, 2$ подгруппа U_i является единственной подгруппой в $\mathcal{P}$ порядка 9, устойчивой относительно X_i . Поэтому, если U — подгруппа порядка 9 в $\mathcal{P}$ и множества U_i^g , $g \in G_0$, $x \in \mathcal{P}$, образуют систему Штейнера $S = S(2, 9, 3^6)$, то $S = \mathcal{H}_1$ или $S = \mathcal{H}_2$.

Уральский государственный
педагогический университет

Поступило
21.10.92

Исправленный вариант
25.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hering C. Eine nicht-desarguessche zweifach transitive affine Ebene der Ordnung 27 // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1970. V. 34. P. 203–208.
- [2] Hering C. Two new sporadic doubly transitive linear spaces // Lect. Notes Pure Appl. Math. 1985. V. 103. P. 127–129.
- [3] Dembowsky P. Finite geometries. Berlin: Springer Verlag, 1968.
- [4] Kantor W. Homogeneous designs and geometric lattices // J. Comb. Theory. Ser. A. 1985. V. 38. P. 66–74.
- [5] Ильиных А. П. Классификация конечных группоидов с 2-транзитивной группой автоморфизмов // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 6. С. 51–79.
- [6] Rao N., Rao K., Sataynarayana K. On Hering's flag transitive plane of order 27 // Bull. Austral. Math. Soc. 1982. V. 25. P. 117–123.
- [7] Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.