Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Ковязина, Группы Батлера с одним τ -адическим соотношением, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 882–887

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1906>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:33:27

ГРУППЫ БАТЛЕРА С ОДНИМ τ -АДИЧЕСКИМ СООТНОШЕНИЕМ

Е. М. Ковязина

Абелева группа, которая может быть рассмотрена как

- 1) гомоморфный образ без кручения вполне разложимой абелевой группы конечного ранга, или
- 2) сервантная подгруппа вполне разложимой абелевой группы без кручения конечного ранга

называется *группой Батлера*. Эти группы ввел Батлер в 1965 году в статье [1], там он доказал эквивалентность условий 1) и 2). Впоследствии эти группы широко рассматривались. Мы подходим к изучению этих групп с другой стороны.

В работе [2] А. А. Фомин ввел понятие групп с одним τ -адическим соотношением (к которым, в частности, относятся группы ранга 2)) и описал этот класс групп с точностью до квазиизоморфизма при помощи τ -адических инвариантов. В нашей статье описаны τ -адические инварианты для групп Батлера с одним τ -адическим соотношением. Дадим необходимые определения.

Пусть $\mathbb{Z}p^\infty$ – кольцо целых p -адических чисел. Тогда назовем *кольцом универсальных чисел* $\mathbb{K} = \mathbb{Q} \otimes \prod_p \mathbb{Z}p^\infty$, где $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. Подкольцо этого кольца $I \otimes \prod_p \mathbb{Z}p^\infty$ называется *кольцом целых универсальных чисел*.

Для целого универсального числа (α_p) обозначим через h_p наибольший показатель степени простого числа p такой, что α_p делится на p^{h_p} в кольце целых p -адических чисел. Если $\alpha_p = 0$, то полагаем $h_p = \infty$. Последовательность (h_p) называется *характеристикой целого универсального числа α* . Характеристика (h_p) определяет тип $[(h_p)]$, который называется *типом целого универсального числа α* , $\text{тип}(\alpha) = [(h_p)]$. Для произвольного универсального числа α существует ненулевое целое m такое, что $m\alpha$ – целое универсальное число. Положим $\text{тип}(\alpha) = \text{тип}(m\alpha)$. Легко видеть, что тип универсального числа α не зависит от выбора числа m . Для каждого типа τ множество универсальных чисел

$$I(\tau) = \{\alpha \mid \text{тип}(\alpha) \geq \tau\}$$

Пусть группа B задана системой соотношений (2) с рациональными коэффициентами. Левые части соотношений можно рассматривать как элементы делимой оболочки группы B . Если левые части некоторых i -го и j -го соотношений линейно зависимы, то эти два соотношения будут эквивалентны следующему соотношению:

$$t_{i1}x_1 + \dots + t_{in}x_n = 0, \quad t_{i1}, \dots, t_{in} \in \mathbb{Q}(\tau_i \vee \tau_j).$$

Поэтому будем далее считать, что никакие две строки в системе типа (2) не являются линейно зависимыми.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть группа Батлера B задана системой соотношений (2) с рациональными коэффициентами. Группа B является группой с одним τ -адическим соотношением тогда и только тогда, когда для любых $i \neq j$ $\tau_i \wedge \tau_j = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть для некоторых $i \neq j$ $\tau_i \wedge \tau_j = \delta \neq 0$. Тогда в группе B выполняются соотношения

$$\begin{aligned} t_{i1}x_1 + \dots + t_{in}x_n &= 0, & t_{i1}, \dots, t_{in} &\in \mathbb{Q}(\delta), \\ t_{j1}x_1 + \dots + t_{jn}x_n &= 0, & t_{j1}, \dots, t_{jn} &\in \mathbb{Q}(\delta). \end{aligned}$$

Так как группа B является группой с одним τ -соотношением, то существует обратимое γ такое, что

$$t_{ik} = t_{jk}\gamma, \quad k = 1, \dots, n.$$

Откуда получаем, что левые части i -й и j -й строк линейно зависимы. Противоречие.

Достаточность. Пусть для любых $i \neq j$ $\tau_i \wedge \tau_j = 0$. Выберем систему идемпотентов $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, где ε_j — единица в $\mathbb{Q}(\tau_j)$. Тогда соотношение

$$\begin{aligned} (t_{11}\varepsilon_1 + \dots + t_{m1}\varepsilon_m)x_1 + \dots + (t_{1n}\varepsilon_1 + \dots + t_{mn}\varepsilon_m)x_n &= 0, \\ t_{ij} &\in \mathbb{Q}(\tau \vee \dots \vee \tau_m), \end{aligned} \quad (3)$$

задает группу B .

ТЕОРЕМА 2. Для абелевой группы B без кручения конечного ранга n с одним τ -соотношением следующие условия эквивалентны:

- 1) B — группа Батлера;
- 2) группу B можно задать конечной системой τ -адических соотношений (2) с рациональными коэффициентами;
- 3) существует τ -адическое соотношение с кусочно-рациональными коэффициентами, задающее группу B ;
- 4) существует τ -пространство размерности n , задающее группу B , элементы которого кусочно-рациональные τ -адические числа;
- 5) любое τ -пространство, задающее B , имеет вид γV , где γ — обратимое τ -адическое число, V — пространство размерности n , элементы которого кусочно-рациональные числа.