Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Свинолупов, И. Т. Хабибуллин, Интегрируемые граничные условия для многокомпонентных уравнений Бюргерса, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 888–901

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 07:34:00

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА

С. И. Свинолулов, И. Т. Хабибуллин

Среди нелинейных уравнений математической физики выделяется важный класс интегрируемых уравнений, которые либо интегрируются методом обратной задачи, либо линеаризуются дифференциальными подстановками (в терминологии Калоджеро [1] *S*-интегрируемые и *C*-интегрируемые уравнения). С точки зрения симметричного подхода (см. [2]) такие уравнения выделены тем, что они обладают бесконечным набором высших симметрий (коммутирующих потоков). С аналитической точки зрения интегрируемые уравнения характеризуются тем, что они допускают широкий класс явных и асимптотических решений. Наличие высших симметрий позволяет свести построение солитонных и конечнозонных решений уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Иногда требуется, чтобы искомое решение удовлетворяло некоторым дополнительным граничным условиям. В связи с этим возникает вопрос: каким граничным условиям может удовлетворять точное (построенное при помощи высших симметрий) решение. Иными словами, требуется описать граничные условия, совместимые с высшими симметриями (точное определение будет дано ниже). Впервые примеры нетривиальных граничных условий такого рода были получены Ю. Мозером [3] для цепочки Тоды и Е. К. Скляниным [4] для уравнений типа нелинейного уравнения Шрёдингера.

В работе [5] был предложен алгоритм построения интегрируемых граничных условий, заключающийся в нахождении дифференциальных редукций для некоторых систем дифференциальных уравнений, которые регулярным образом строятся по высшим симметриям исходного уравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, гранты MLY000 и RK2000, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-16088.

В настоящей работе рассматриваются построенные в [6] интегрируемые многокомпонентные обобщения уравнения Бюргерса, а именно системы N уравнений вида

$$u_t^i = u_{xx}^i + 2a_{jk}^i u^j u_x^k + b_{jkm}^i u^j u^k u^m, \quad i = 1, \dots, N, \quad (0.1)$$

где $u^i = u^i(t, x)$, a_{jk}^i, b_{jkm}^i – набор констант, удовлетворяющих некоторым полиномиальным тождествам, по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до N . Для таких систем найдена бесконечная серия совместимых с высшими симметриями граничных условий вида

$$f^i(U, U_x, \dots, U_k) \Big|_{x=0} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (0.2)$$

где $U = (u^1, \dots, u^N)$, $U_k = \partial^k U / \partial x^k$. Граничные условия из этой бесконечной серии могут быть получены в результате многократного применения к простейшим из них некоторого дифференциального оператора (по аналогии с рекурсионным оператором для симметрий его естественно назвать рекурсионным оператором для интегрируемых граничных условий). Отметим, что авторам в настоящее время неизвестны аналогичные рекурсионные операторы граничных условий для других интегрируемых уравнений.

Так как интегрируемые многокомпонентные полиномиальные системы тесно связаны с неассоциативными алгебраическими структурами, то при изложении результатов работы и в доказательствах по существу используется язык теории неассоциативных алгебр.

§ 1. Левосимметрические алгебры и многокомпонентные уравнения Бюргерса

В работе [6] было показано, что для того чтобы система (0.1) имела хотя бы одну высшую симметрию необходимо и достаточно, чтобы константы b_{jkm}^i определялись через константы a_{jk}^i при помощи формул

$$b_{jkm}^i = \frac{1}{3} \{ a_{jr}^i a_{km}^r + a_{kr}^i a_{mj}^r + a_{mr}^i a_{jk}^r - a_{rj}^i a_{km}^r - a_{rk}^i a_{mj}^r - a_{rm}^i a_{jk}^r \}, \quad (1.1)$$

а константы a_{jk}^i удовлетворяли набору тождеств

$$a_{jr}^i a_{km}^r - a_{kr}^i a_{jm}^r = a_{jk}^r a_{rm}^i - a_{kj}^r a_{rm}^i. \quad (1.2)$$

Соотношения (1.2) допускают простую алгебраическую интерпретацию. Пусть A – N -мерная алгебра, $e_1, \dots, e_N$ – некоторый базис, умножение в алгебре задано формулами

$$e_j * e_k = a_{jk}^i e_i. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.2) эквивалентны тому, что умножение $'*$ ' удовлетворяет тождеству

$$\{X, Y, Z\} - \{Y, X, Z\} = 0, \quad \{X, Y, Z\} \stackrel{\text{def}}{=} (X * Y) * Z - X * (Y * Z) \quad (1.4)$$

для любых векторов $X, Y, Z \in A$. Алгебры, удовлетворяющие тождеству (1.4), называются *левосимметрическими*; они изучались в [7], [8]. Очевидно, что всякая ассоциативная алгебра является левосимметрической. Левосимметрические алгебры не исчерпываются ассоциативными.

ПРИМЕР 1.1 (см. [9]). Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в N -мерном векторном пространстве A , $a \in A$ – произвольный вектор. Определив умножение $'*$ ' при помощи формулы

$$X * Y = \langle X, Y \rangle a + \langle X, a \rangle Y, \quad (1.5)$$

мы наделяем векторное пространство A структурой левосимметрической алгебры.

Широкий класс левосимметрических алгебр можно построить исходя из алгебр Ли.

ПРИМЕР 1.2 (И.З. Голубчик, Г.В. Потемин). Пусть A – алгебра Ли, умножение в которой мы будем обозначать $[\cdot, \cdot]$. Пусть A обладает невырожденным 2-циклом, т.е. невырожденной билинейной кососимметричной формой ω , удовлетворяющей тождеству

$$\omega(X, [Y, Z]) + \omega(Y, [Z, X]) + \omega(Z, [X, Y]) = 0. \quad (1.6)$$

Определим на A новое умножение $'*$ ' при помощи формулы

$$\omega(X, Y * Z) = \omega(Z, [Y, X]) \quad (1.7)$$

для любых векторов $X, Y, Z \in A$. Можно проверить, что введенное умножение удовлетворяет тождеству (1.4).

Между левосимметрическими алгебрами и системами (0.1), правые части которых задаются набором констант a_{jk}^i, b_{jkm}^i , определенных формулами (1.1) и (1.2), имеет место взаимно однозначное соответствие. Переход к новому базису в алгебре соответствует линейной замене переменных

$$\tilde{u}^i = K_r^i u^r, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.8)$$

в системе (0.1).

Интегрируемые системы (0.1) можно записать в компактной инвариантной форме. Положим $U = u^i e_i$. Используя умножение $'*$ ', можем переписать интегрируемые системы (0.1) в виде

$$U_t = U_{xx} + 2U * U_x + U * (U * U) - (U * U) * U. \quad (1.9)$$

ПРИМЕР 1.3. Ассоциативной алгебре матриц соответствует хорошо известное матричное уравнение Бюргерса

$$U_t = U_{xx} + 2UU_x \quad (1.10)$$

(здесь U – матрица размерности $N \times N$ с компонентами $u^{ij}(t, x)$, умножение – обычное матричное умножение).

Левосимметрической алгебре из примера 1.1 соответствует “векторное” уравнение Бюргерса

$$U_t = U_{xx} + 2\langle U, U_x \rangle a + 2\langle U, a \rangle U_x + \langle U, a \rangle \langle U, U \rangle a - \langle a, a \rangle \langle U, U \rangle U. \quad (1.11)$$

В [6] было показано, что все интегрируемые системы (0.1) линеаризуются дифференциальной подстановкой, обобщающей хорошо известное преобразование Коула–Хопфа для скалярного уравнения Бюргерса. В связи с этим вопрос о рекурсионном операторе для симметрий в [6] не обсуждался. Однако, в настоящей работе рекурсионный оператор для симметрий понадобится для построения рекурсионного оператора для интегрируемых граничных условий.

Вопрос о рекурсионном операторе для симметрий удобно изучать для систем, записанных в виде уравнения (1.9) на левосимметрической алгебре.

Введем некоторые понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем. Определим операторы левого и правого умножения в алгебре A на произвольный элемент X :

$$\begin{aligned} L(X): A &\rightarrow A, & L(X)Y &= X * Y, \\ R(X): A &\rightarrow A, & R(X)Y &= Y * X. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В терминах операторов левого умножения тождество (1.4) переписывается в виде

$$L(X)L(Y) - L(Y)L(X) = L(X * Y - Y * X), \quad (1.13)$$

т.е. операторы левого умножения в левосимметрической алгебре образуют алгебру Ли.

Определим на левосимметрической алгебре A новое умножение

$$[X, Y] = X * Y - Y * X. \quad (1.4)$$

Очевидно, что оно антисимметрично. Можно проверить, что в силу (1.4) умножение $[\cdot, \cdot]$ удовлетворяет тождеству Якоби. Таким образом, относительно умножения $[\cdot, \cdot]$ векторное пространство A является алгеброй Ли. Ниже мы будем обозначать левосимметрическую алгебру через $(A, *)$, а соответствующую ей алгебру Ли – $(A, [\cdot])$. Для любого $X \in A$ определим линейный оператор $\text{ad}(X)$

$$\text{ad}(X): A \rightarrow A, \quad \text{ad}(X) = L(X) - R(X). \quad (1.15)$$

Ясно, что если $(A, *)$ – левосимметрическая алгебра, то $\text{ad}(X)$ – оператор умножения в алгебре Ли $(A, [\cdot])$, т.е. $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $'\ast'$ – умножение в левосимметрической алгебре. Тогда оператор

$$M = (D + \text{ad}(U))(D + L(U))(D + \text{ad}(U))^{-1}, \quad (1.16)$$

где $D = d/dx$, является рекурсионным оператором для системы (1.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В случае скалярного ($N = 1$) уравнения Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \quad (1.17)$$

из формулы (1.16) мы получаем хорошо известный рекурсионный оператор

$$M = D + DuD^{-1} \quad (1.18)$$

(см., например, [10]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Симметрии, которые можно получить применением рекурсионного оператора (1.16) к правой части системы (1.9), имеют вид

$$U_{\tau_k} = (D + \text{ad}(U))(D + L(U))^{k-1}(U). \quad (1.19)$$

В частности, саму систему (1.9) можно записать в виде

$$U_t = (D + \text{ad}(U))(D + L(U))(U). \quad (1.20)$$

Доказательство теоремы 1.1 опирается на следующие две леммы.

ЛЕММА 1.1. Пусть $F = F(U, U_1, \dots, U_m)$, $H = H(U, U_1, \dots, U_s)$ – произвольные вектор-функции, $\text{ad}(U)$ – оператор умножения в произвольной алгебре Ли. Поток, заданный системами

$$U_t = (D + \text{ad}(U))(F), \quad U_\tau = (D + \text{ad}(U))(H),$$

коммутируют тогда и только тогда, когда

$$\partial_\tau(F) - \partial_t(H) + [H, F] = 0. \quad (1.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \partial_\tau(U_t) - \partial_t(U_\tau) &= (D + \text{ad}(U))(\partial_\tau(F) - \partial_t(H) + [H, F]) \\ &\quad + [[U, H], F] - [U, F], H - [U, [H, F]]. \end{aligned}$$

Сумма трех последних слагаемых в силу тождества Якоби равна нулю.

ЛЕММА 1.2. Пусть $f = f(U, U_1, \dots, U_m)$, $h = h(U, U_1, \dots, U_s)$ – произвольные вектор-функции, $L(U)$, $\text{ad}(U)$ – операторы умножения в произвольной левосимметрической алгебре, определенные формулами (1.12), (1.15). Потoki, заданные системами

$$\begin{aligned} U_t &= (D + \text{ad}(U))(D + L(U))(f), \\ U_\tau &= (D + \text{ad}(U))(D + L(U))(h), \end{aligned}$$

коммутируют тогда и только тогда, когда

$$\partial_\tau(f) - \partial_t(h) + (D + L(U))(h) * f - (D + L(U))(f) * h = 0. \quad (1.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 1.1. В ее обозначениях имеем

$$F = (D + L(U))(f), \quad H = (D + L(U))(h).$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} &\partial_\tau(F) - \partial_t(H) + [H, F] \\ &= (D + L(U))(\partial_\tau(f) - \partial_t(h) + (D + L(U))(h) * f - (D + L(U))(f) * h) + \eta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= (D + \text{ad}(U))(D + L(U))(h) * f - (D + \text{ad}(U))(D + L(U))(f) * h \\ &\quad + [(D + L(U))(h), (D + L(U))(f)] \\ &\quad - (D + L(U))((D + L(U))(h) * f - (D + L(U))(f) * h). \end{aligned}$$

Можно показать, что, в силу тождества левосимметричности (1.4), $\eta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Согласно замечанию 1.2 нам достаточно показать, что потоки, заданные системами (1.19) и (1.20), коммутируют. Воспользуемся леммой 1.2. Обозначим

$$S_k = (D + L(U))^k(U), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.23)$$

Соотношение (1.22) для рассматриваемых нами систем можно записать в виде

$$U_{\tau_k} - (S_{k-2})_t + S_{k-1} * U - S_1 * S_{k-2} = 0. \quad (1.24)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (1.24) эквивалентно соотношению

$$S_k - S_1 * S_{k-2} - (S_{k-2})_t = 0. \quad (1.25)$$

Соотношение (1.25) можно переписать в виде

$$(D + L(U))^{k-2}(S_1 * S_0) - (D + L(U))^{k-3}(B * S_0) - (D + L(U))^{k-4}(B * S_1) - \dots - B * S_{k-3} - S_1 * S_{k-2} = 0, \quad (1.26)$$

где через B обозначена правая часть системы (1.20), которую можно записать в виде

$$B = S_2 - S_1 * U.$$

Соотношение (1.26) тождественно выполнено. Для доказательства этого факта достаточно воспользоваться тождеством

$$(D + L(U))(S_1 * S_i) = B * S_i + S_1 * S_{i+1},$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой.

§ 2. Граничные условия для многокомпонентных уравнений Бюргера, совместимые с высшими симметриями

Рассмотрим задачу о поиске интегрируемых граничных условий вида (0.2) для системы (1.9).

Граничную задачу (0.2), (1.9) будем называть совместимой с симметрией

$$U_\tau = F, \quad (2.1)$$

если для достаточно широкого набора начальных данных системы (1.9) и (2.1) имеют совместное решение, удовлетворяющее условию (0.2). Поясним, что мы имеем в виду. Продифференцировав соотношения (0.2) по переменной τ , получаем соотношения

$$\sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^N \frac{\partial f^i}{\partial u_j^r} (u_j^r)_\tau = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

где производные по τ следует заменить в силу системы (2.1). Граничные условия совместимы с симметрией (2.1), если соотношения (2.2) тождественно выполняются в силу (0.2) и его дифференциальных следствий, получающихся при дифференцировании (0.2) по переменной t в силу самой системы (1.9). (Отметим, что поскольку соотношение (0.2) имеет место лишь в фиксированной точке $x = 0$, то (0.2) нельзя дифференцировать по переменной x .)

Для поиска интегрируемых граничных условий нам удобно выбрать новый набор динамических переменных: $U, V = U_x$ и все их производные по переменной t . Если переписать в этих динамических переменных симметрию (2.1)

$$U_\tau = P(U, V, U_t, V_t, \dots), \quad V_\tau = Q(U, V, U_t, V_t, \dots) \quad (2.3)$$

и граничные условия (0.2), то задача о построении интегрируемых граничных условий сведется к построению дифференциальных связей вида

$$f^i(U, V, U_t, V_t, \dots) = 0, \quad (2.4)$$

допускаемых системой (2.3).

Ясно, что переход к новым динамическим переменным является обратимым преобразованием. Все производные U по переменной x второго порядка и выше выражаются из системы (1.9) через динамические переменные из нового набора:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= U_t - 2U * U_x - U * (U * U) + (U * U) * U \\ &= U_t - 2U * V - U * (U * U) + (U * U) * U, \\ U_{xxx} &= V_t - 2U * U_t - 2V * V \\ &\quad + 3U * (U * V) - 2U * (V * U) + (U * U) * V \\ &\quad + 2(U * V) * U + 2U * (U * (U * U)) - 2U * ((U * U) * U) \end{aligned}$$

и т.д.

Рассмотрим симметрию четвертого порядка системы (1.9), которая получается согласно формуле (1.19) при $k = 4$. Переписав ее в новых динамических переменных, получаем систему

$$\begin{aligned} U_{\tau_4} &= U_{tt} + 2V * U_t + 2(U * U) * U_t - \{V, V, U\} \\ &\quad - 2\{V, U * U, U\} - \{U * U, U * U, U\}, \\ V_{\tau_4} &= V_{tt} + 2U_t * U_t + 2V * V_t + 2(U * U) * V_t - 2\{V, U_t, U\} \\ &\quad + 2V * (U_t * U) - 2U * (V * U_t) - 2\{U * U, U_t, U\} \\ &\quad + 2\{U, U, U * U_t\} - 2U * \{U, U, U_t\} + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Многоточием здесь обозначены слагаемые, не содержащие производных, которые мы не приводим в явном виде из-за громоздкости. Систему (2.5) можно значительно упростить, записав в виде

$$\begin{aligned} U_{\tau_4} &= U_{tt} + 2W * U_t + W * (W * U) - (W * W) * U, \\ W_{\tau_4} &= W_{tt} + 2W * W_t + W * (W * W) - (W * W) * W \end{aligned} \quad (2.6)$$

(ср. с системой (1.9)). Для этого достаточно сделать замену переменных $W = V + U * U$.

Покажем, что системе (2.6) соответствует левосимметрическая алгебра, которая строится по левосимметрической алгебре $(A, *)$ исходной системы (1.9) следующим образом. Определим действие алгебры $(A, *)$ на модуле B ($\dim B = \dim A$) при помощи формулы

$$X(Y) = X * Y$$

для любых векторов $X \in A, Y \in B$. Рассмотрим векторное пространство $A \oplus B$. Наделим его структурой алгебры, положив

$$B * B = 0, \quad B * A = 0.$$

Нетрудно видеть, что алгебра $(A \oplus B, *)$ является левосимметрической. Векторное пространство B является идеалом этой алгебры, а A – подалгеброй. Очевидно, что система типа (1.9), соответствующая левосимметрической алгебре $(A \oplus B, *)$, записывается в виде (2.6) ($W \in A, U \in B$).

Поскольку система (2.6) представляет собой систему типа (1.9), мы можем воспользоваться (1.9) и предъять в явном виде бесконечную серию высших симметрий:

$$\begin{pmatrix} U_{\tau_{2k}} \\ W_{\tau_{2k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t + \text{ad}(W) & -R(U) \\ 0 & D_t + \text{ad}(W) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_t + L(W) & 0 \\ 0 & D_t + L(W) \end{pmatrix}^{2k-1} \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

(обратим внимание, что здесь R и L – операторы умножения в алгебре A). Отметим, что (2.7) дает нам не все симметрии системы (2.6), а лишь те из них, которые получаются при переходе к новым динамическим переменным из симметрий четного порядка системы (1.9).

Наша ближайшая цель – построить простейшую дифференциальную связь, допускаемую системой (2.6) и всеми ее симметриями (2.7). Рассмотрим связи, не зависящие от производных и разрешенные относительно одного из векторов U, W , например,

$$U = P(W), \quad (2.8)$$

где P – произвольная вектор-функция. Продифференцировав соотношение (2.8) по переменной τ_4 в силу системы (2.6) и заменив U и его производные по переменной t в силу (2.8), получаем, что

$$U = MW + c, \quad (2.9)$$

где линейный оператор $M: A \rightarrow A$ удовлетворяет условию

$$M(X * Y) - (X * MY) = 0, \quad (2.10)$$

а вектор c – условию

$$\{X, Y, c\} = 0 \quad (2.11)$$

для любых векторов $X, Y \in A$. Тождество (2.10) означает, что линейный оператор M коммутирует со всеми операторами левого умножения в алгебре A . Нетрудно видеть, что c , удовлетворяющий тождеству (2.11), –

это такой элемент алгебры A , для которого оператор правого умножения $R(c)$ удовлетворяет тождеству (2.10).

Ясно, что всегда можно положить $c = 0$, а в качестве M выбрать тождественный оператор. Но для многих левосимметрических алгебр наборы операторов M и векторов c , удовлетворяющих тождествам (2.9), (2.10), не исчерпываются этим тривиальным случаем. Например, ясно, что для ассоциативных алгебр в качестве c можно взять произвольный вектор, а в качестве оператора M – оператор правого умножения на произвольный вектор m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Дифференциальная связь (2.9) допускается всеми высшими симметриями вида (2.7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (2.7) высшие симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} U_{\tau_{2k}} &= (D_t + L(W))^{2k}(U) - R(U)(D_t + L(W))^{2k-1}(W), \\ W_{\tau_{2k}} &= (D_t + \text{ad}(W))(D_t + L(W))^{2k-1}(W). \end{aligned}$$

Наложив на первое уравнение связи (2.9), получаем, что в силу второго уравнения должно выполняться тождество

$$\begin{aligned} M(D_t + \text{ad}(W))(D_t + L(W))^{2k-1}(W) - (D_t + L(W))^{2k}(MW + c) \\ + R(MW + c)(D_t + L(W))^{2k-1}(W) = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В операторной форме тождество (2.10) можно переписать либо в виде

$$[L(X), M] = 0, \quad (2.13)$$

либо в виде

$$MR(X) - R(MX) = 0. \quad (2.14)$$

В силу (2.13) и (2.14) тождество (2.12) эквивалентно тождеству

$$(D_t + L(W))^{2k}(c) - \left((D_t + L(W))^{2k-1}(W)\right) * c = 0. \quad (2.15)$$

Тождество (2.15) справедливо в силу того, что, как нетрудно проверить, для любого вектора V

$$\begin{aligned} (D_t + L(W))(V * c) &= V_t * c + W * (V * c) = V_t * c + (W * V) * c \\ &= \left((D_t + L(W))(V)\right) * c. \end{aligned}$$

Отметим, что если рассматривать связи $W = P(U)$, то аналогичным образом получаем, что $W = MU + c$. Более того, можно проверить, что с высшими симметриями (2.7) совместима любая линейная связь

$$KW + MU + c = 0, \quad (2.16)$$

где линейные операторы K, M и вектор c удовлетворяют соотношениям (2.10) и (2.11).

Возвратившись от дифференциальных связей к интегрируемым граничным условиям, можно сформулировать следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Всякая система (1.9) допускает интегрируемые граничные условия вида*

$$U_x + (U * U) = 0.$$

ПРИМЕР 2.1. Матричное уравнение Бюргерса (1.10) (см. пример 1.3) допускает интегрируемое граничное условие вида

$$U_x A + U^2 A + UB + C = 0, \quad (2.17)$$

где A, B, C – произвольные матрицы.

Простейшая линейная связь (2.16) порождает бесконечную серию нелинейных дифференциальных связей, допускаемых системой (2.6) и всеми ее высшими симметриями (2.7). Эти дифференциальные связи можно построить, многократно применяя к (2.16) дифференциальный оператор $(D_t + L(W))$, который естественно назвать *рекурсионным оператором для дифференциальных связей*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Всякая система (2.6) и ее высшие симметрии (2.7) допускают дифференциальные связи*

$$P_m = (D_t + L(W))^m (KW + MU + c) = 0, \quad (2.18)$$

где K, M – произвольные линейные операторы, удовлетворяющие условию (2.10), c – произвольный вектор, удовлетворяющий соотношению (2.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения мы покажем, что

$$(P_m)_{\tau_{2k}} = \left((D_t + L(W))^{2k} - L(S) \right) P_m, \quad (2.19)$$

где

$$S = (D_t + L(W))^{2k-1}(W).$$

Нетрудно проверить, что в силу тождества левосимметричности (1.4) и формулы (2.7) мы имеем, что

$$[D_t + L(W), L(S)] = L(W_{\tau_{2k}}). \quad (2.20)$$

Воспользовавшись тождеством (2.20), можно показать, что

$$\left((D_t + L(W))^m \right)_{\tau_{2k}} = [(D_t + L(W))^m, L(S)].$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\begin{aligned} (P_m)_{\tau_{2k}} &= \left((D_t + L(W))^m \right)_{\tau_{2k}} (KW + MU + c) \\ &\quad + (D_t + L(W))^m (KW_{\tau_{2k}} + MU_{\tau_{2k}}) \\ &= -L(S)P_m + (D_t + L(W))^m Q, \end{aligned}$$

где

$$Q = L(S)(KW + MU + c) + KW_{\tau_{2k}} + MU_{\tau_{2k}}. \quad (2.21)$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости формулы (2.19), нам остается показать, что вектор-функцию Q , определенную формулой (2.21), можно переписать в виде

$$Q = (D_t + L(W))^{2k} (KW + MU + c). \quad (2.22)$$

Воспользовавшись тем, что линейные операторы $K, M, R(c)$ удовлетворяют тождествам (2.13) и (2.14), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} L(S)(KW) + KW_{\tau_{2k}} &= R(KW)S + K(D_t + L(W))^{2k}(W) - KR(W)S \\ &= K(D_t + L(W))^{2k}(W) = (D_t + L(W))^{2k}(KW), \\ L(S)(MU) + MU_{\tau_{2k}} &= R(MU)S + M(D_t + L(W))^{2k}(U) - MR(U)S \\ &= M(D_t + L(W))^{2k}(U) = (D_t + L(W))^{2k}(MU), \\ L(S)c &= R(c)S = (D_t + L(W))^{2k-1}(R(c)W) \\ &= (D_t + L(W))^{2k-1}(W * c) = (D_t + L(W))^{2k}(c), \end{aligned}$$

т.е. соотношение (2.22) выполнено.

Аналогично предложению 2.2 доказывается чуть более сильное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Всякая система (2.6) и ее высшие симметрии (2.7) допускают дифференциальные связи*

$$\sum_{i=0}^m (D_t + L(W))^i (K_i W + M_i U + c_i) = 0, \quad (2.23)$$

где K_i, M_i – произвольные линейные операторы, удовлетворяющие условию (2.10), c_i – произвольные векторы, удовлетворяющие соотношению (2.11).

Сравнивая утверждения двух последних предложений, легко видеть, что для системы (2.6) любая линейная комбинация связей вида (2.18) вновь является дифференциальной связью, допускаемой системой и ее высшими симметриями. Иными словами, имеет место принцип линейной суперпозиции дифференциальных связей (и, следовательно, принцип линейной суперпозиции интегрируемых граничных условий).

Переходя от дифференциальных связей системы (2.6) к граничным условиям системы (1.9), получаем, что доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. *Всякая система (1.9) допускает граничное условие*

$$\left(\sum_{i=0}^m (D_t + L(U_x + U * U))^i (K_i (U_x + U * U) + M_i U + c_i) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.24)$$

где K_i, M_i – произвольные линейные операторы, удовлетворяющие условию (2.10), c_i – произвольные векторы, удовлетворяющие соотношению (2.11), D_t – оператор дифференцирования по переменной t в силу системы (1.9). Граничные условия (2.24) совместимы со всеми высшими симметриями (1.19) четного порядка.

ПРИМЕР 2.2. Левосимметрическая алгебра из примера 1.1 такова, что линейные операторы, удовлетворяющие условию (2.10), исчерпываются тождественным оператором. Интегрируемые граничные условия (2.24) для векторного уравнения Бюргерса (1.11) представляют собой линейную комбинацию граничных условий вида

$$\begin{aligned} ((D_t + L)^i(U)) \Big|_{x=0} &= 0, \\ ((D_t + L)^i(U_x + \langle U, a \rangle U + \langle U, U \rangle a)) \Big|_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где матрица L определяется формулой

$$\begin{aligned} L &= p \text{Id} + a \otimes U_x + \langle U, a \rangle a \otimes U + \langle a, a \rangle U \otimes U, \\ p &= \langle U_x, a \rangle + \langle U, a \rangle^2 + \langle a, a \rangle \langle U, U \rangle, \end{aligned} \quad (2.26)$$

через Id обозначена единичная матрица.

В заключение отметим, что в настоящее время для многих скалярных уравнений (нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Кортевега–де Фриза и т.д.) граничные условия, совместимые с интегрируемостью, уже построены (см., например, [5], [11]). Для интегрируемых многокомпонентных обобщений этих уравнений (см. [12], [13]), связанных с неассоциативными алгебрами, можно построить интегрируемые граничные условия. При этом, по-видимому, эти граничные условия так же, как и (2.24), можно компактно записать в терминах соответствующих неассоциативных алгебр.

Башкирское отделение
института математики РАН

Поступило
20.10.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Calogero F. Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable? // What is integrability?/ ed. V. E. Zakharov. Berlin: Springer Verlag, 1991.
- [2] Mikhailov A. V., Shabat A. B., Sokolov V. V. The symmetry approach to classification of integrable equations // What is integrability?/ ed. V. E. Zakharov. Berlin: Springer Verlag, 1991.
- [3] Moser J. Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential integrable system // Lecture Notes in Phys. 1975. V. 38. P. 467–498.
- [4] Скланин Е. К. Граничные условия для интегрируемых уравнений // Функцион. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 1. С. 86–87.
- [5] Gurel B., Gurses M., Habibullin I. T. Boundary value problems compatible with symmetries // Phys. Letts A. 1994. V. 190. P. 231–237.
- [6] Svinolupov S. I. On the analogues of the Burgers equation // Phys. Letts A. 1989. V. 135. P. 32–36.
- [7] Винберг Е. Б. Теория однородных выпуклых конусов // Тр. ММО. 1963. Т. 12. С. 303–358.
- [8] Medina A. Sur quelques algebres symetriques a gaushé dont l'algebre de Lie sous-jacente est resoluble // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1978. V. 286. № 3. P. 173–176.
- [9] Свинолупов С. И., Соколов В. В. Векторно-матричные обобщения интегрируемых уравнений математической физики // ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 214–218.
- [10] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [11] Habibullin I. T. Symmetries of boundary problems // Phys. Letts A. 1993. V. 178. P. 369–375.
- [12] Svinolupov S. I. Generalized Schroedinger equations and Jordan pairs // Comm. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 559–575.
- [13] Свинолупов С. И. Йордановы алгебры и обобщенное уравнение Кортевега–де Фриза // ТМФ. 1991. Т. 87. № 3. С. 391–403.