Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Чатырко, Аксиоматика размерности D
в классе слабо счетномерных компактов, *Матем.
заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 912–918

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:43:07

АКСИОМАТИКА РАЗМЕРНОСТИ D В КЛАССЕ СЛАБО СЧЕТНОМЕРНЫХ КОМПАКТОВ

В. А. Чатырко

Аксиоматическое описание размерностных функций является одной из старых задач теории размерности [1]–[3]. Требуется охарактеризовать ту или иную размерностную функцию d малым набором независимых свойств-аксиом на заданном классе $\mathfrak{A}$ топологических пространств. Необходимым условием размерностной функции, которое в дальнейшем мы не будем оговаривать особо, является ее топологическая инвариантность, заключающаяся в том, что $dX = dY$ для любых двух гомеоморфных пространств X и Y из класса $\mathfrak{A}$. Далее через I будем обозначать отрезок $[0, 1]$, I^0 – одноточечное пространство, I^{-1} – пустое множество.

Пусть $\mathfrak{A}_1$ – класс конечномерных метрических компактов, а d – размерностная функция на $\mathfrak{A}_1$, допускающая в качестве значений целые числа.

ТЕОРЕМА АЛЕКСАНДРОВА [1]. *Размерность $\dim$ есть единственная размерностная функция d в классе $\mathfrak{A}_1$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) $dI^n = n$, где n – целое число ≥ -1 ;
- 2) если компакт $X \in \mathfrak{A}_1$ есть объединение двух замкнутых в X подпространств X_1 и X_2 , то $dX = \max(dX_1, dX_2)$;
- 3) для каждого компакта $X \in \mathfrak{A}_1$ найдется такое положительное число ε , что если $f: X \rightarrow Y$ есть ε -отображение компакта X на компакт $Y \in \mathfrak{A}_1$, то $dX \leq dY$;
- 4) во всяком неодноточечном компакте $X \in \mathfrak{A}_1$ найдется такое замкнутое подмножество Y , что $dY < dX$ и Y разбивает X (т.е. $X \setminus Y$ несвязно).

Условия 1)–4) независимы между собой.

В [4] Хендерсон определил одно из возможных трансфинитных продолжений размерности $\dim$ в классе метрических пространств, размерность D . Пусть X – метрическое пространство, а $\alpha = p(\alpha) + n(\alpha)$ – разложе-

ние ординального числа α на предельное $p(\alpha)$ и непределное $n(\alpha) \geq 0$ слагаемые (0 – предельный ординал). Напомним

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [4]. $DX = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$. $DX \leq \alpha \Leftrightarrow$ существует замкнутое покрытие $\{A_\beta : \beta \leq p(\alpha)\}$ пространства X , состоящее из конечномерных в смысле $\dim$ подмножеств, для которых выполняются следующие условия:

- 1) для каждого $\delta \leq p(\alpha)$ множество $\bigcup\{A_\beta : \delta \leq \beta \leq p(\alpha)\}$ замкнуто в X ;
- 2) для каждого $x \in X$ существует наибольший ординал $\beta \leq p(\alpha)$: $x \in A_\beta$;
- 3) $\dim A_{p(\alpha)} \leq n(\alpha)$.

$DX = \alpha \Leftrightarrow DX \leq \alpha$ и $DX < \alpha$ не выполняется.

$DX = \Delta \Leftrightarrow DX > \alpha$ для всякого ординала α .

Здесь Δ – абстрактный символ, причем считается, что $\Delta > \beta$ для всякого ординального числа β .

Очевидно, если $DX \neq \Delta$, то в X найдется замкнутое подмножество Y , разбивающее пространство X и удовлетворяющее неравенству $DY < DX$, причем если $DX \geq \omega$, то можно дополнительно потребовать выполнение неравенства $DY < p(DX)$.

Пусть $DX \neq \Delta$. Напомним [4], что представление

$$X = \bigcup\{A_\beta : 0 \leq \beta \leq p(DX)\}$$

называется *приведенным*, если для каждого открытого в X множества V , пересекающегося с $A_{p(DX)}$, справедливо неравенство $D[V] \geq p(DX)$. Всякое пространство X с $DX \neq \Delta$ обладает приведенным представлением [4], причем если X – компакт, то $A_{p(DX)} \neq \emptyset$.

Пусть $\mathfrak{A}_2$ – класс всех метрических пространств, а d – размерностная функция на $\mathfrak{A}_2$, принимающая значения из множества $\{\alpha : \alpha - \text{порядковое число}\} \cup \{\Delta\}$.

ТЕОРЕМА ХЕНДЕРСОНА [4]. *Размерность D есть единственная размерностная функция d в классе $\mathfrak{A}_2$, удовлетворяющая следующим условиям (ниже $X \in \mathfrak{A}_2$):*

- 1) $dX = \dim X$, если выполняется одно из двух неравенств $dX < \omega$ или $\dim X \neq \infty$;
- 2) $dX = \text{l. u. b.}\{d_p X : p \in X\}$, где

$$d_p X = \min\{dN : N - \text{окрестность точки } p \text{ в } X\};$$

- 3) если F – замкнутое подмножество X , то $dX \leq d(X \setminus F) + dF$;
- 4) если $Y \subseteq X$, то $dY \leq dX$;
- 5) пусть A – замкнутое подмножество пространства X и γ – предельный ординал. Если любое открытое в X множество V , пересекающееся с множеством A , содержит для всякого ординала $\beta < \gamma$ замкнутое в X подмножество $B \subset X \setminus A$ с $dB \geq \beta$, то $dX \geq \gamma + \min\{dA, \omega\}$.

Известно [4], что условие 5) не вытекает из условий 1)–4) в классе сепарабельных метрических пространств.

Основным результатом данной работы является теорема 2, резюме которой вынесено в заглавие статьи. Все рассматриваемые далее пространства будут метрическими компактными. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *нульмерным*, если $\dim f^{-1}y \leq 0$ для всякой точки $y \in Y$. Очевидно, если $f: X \rightarrow Y$ – нульмерное отображение двух компактов, то $dX \leq dY$. Для всякого бесконечномерного компакта X положим $\dim X = \infty$. Будем считать, что $\infty > n$ для всякого конечного числа $n \geq -1$.

Пусть $\mathfrak{A}_3$ – подкласс класса счетномерных метрических компактов, содержащий все кубы I^n , $n \geq -1$, и монотонный по замкнутым подмножествам, т.е. для всякого компакта $X \in \mathfrak{A}_3$ любой подкомпакт Y также принадлежит классу $\mathfrak{A}_3$. Очевидно, $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_3$. Пусть d – размерностная функция на $\mathfrak{A}_3$, принимающая значения из множества $\{n : n \text{ – целое число } \geq -1\} \cup \{\infty\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Размерность $\dim$, принимающая значение ∞ на бесконечномерных компактах, есть единственная размерностная функция d в классе $\mathfrak{A}_3$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) $dI^n = n$, где n – целое число ≥ -1 ;
- 2) для всякого нульмерного отображения $f: X \rightarrow Y$ с $X, Y \in \mathfrak{A}_3$ выполнено неравенство $dX \leq dY$;
- 3) во всяком неодноточечном компакте $X \in \mathfrak{A}_3$ с $dX \neq \infty$ найдется такой компакт $Y \subset X$, что $dY < dX$ и Y разбивает X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем неравенство $dX \leq \dim X$. Если выполнено $\dim X = \infty$, то доказывать нечего. Пусть $\dim X = n < \infty$. Тогда по теореме Гуревича [1] существует нульмерное отображение $f: X \rightarrow I^n$. Согласно 1) $dI^n = n$. По теореме Небелинга–Понтрягина [1] $X \in \mathfrak{A}_3$, поэтому согласно 2) $dX \leq dI^n = n = \dim X$. Что и требовалось. Покажем обратное неравенство.

а) Пусть $\dim X < \infty$. Используем схему доказательства теоремы Александрова. Если $dX = -1$, то $X = \emptyset$, так как функция d монотонна по компактным подмножествам (см. 2)), а $dI^0 = 0$. Следовательно, $\dim X = -1$.

Предположим, что равенство $dX = \dim X$ доказано для всех компактов X , удовлетворяющих неравенству $dX \leq k - 1$. Докажем его для компактов X , для которых $dX = k$. Пусть X – такой компакт и пусть $\dim X = r > k$. Компакт X содержит r -мерное канторово многообразие Y и $dY \leq dX = k$. В силу условия 3) существует замкнутое множество $Z \subset Y$, которое разбивает компакт Y и для которого $dZ < dY \leq k$ и, значит, $dZ \leq k - 1 < r - 1$. В силу индуктивного предположения $\dim Z = dZ < r - 1$. Но Y – канторово многообразие размерности r , а множество $Z \subset Y$ его разбивает – получили противоречие.

б) Пусть теперь $\dim X = \infty$. Если $dX = \infty$, то доказывать нечего. Пусть $dX = n < \infty$. Так как X – счетномерный бесконечномерный компакт, в нем найдется компактное подмножество $Y \subset X$ с $\dim Y = n + 1$. Согласно пункту а) доказательства $dY = \dim Y = n + 1$. Но в силу монотонности функции d имеем $dY \leq dX = n$. Получили противоречие. Теорема доказана.

ВОПРОС. Можно ли в теореме 1 избавиться от ограничения, связанного со счетномерностью?

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия 1)–3) из теоремы 1 независимы. Пусть $X \in \mathfrak{A}_3$.

а) Функция

$$dX = \begin{cases} \dim X + 1, & \text{если } \dim X \neq \infty; \\ \infty, & \text{если } \dim X = \infty, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 2) и 3), но не удовлетворяет условию 1).

б) Если бы условие 2) вытекало бы из условий 1) и 3), то условия 1) и 3) определяли бы размерность $\dim$ в классе $\mathfrak{A}_1$, что неверно (см. теорему Александрова).

в) Функция

$$dX = \begin{cases} -1, & \text{если } X = \emptyset; \\ 0, & \text{если } X \text{ не содержит дуги } [0, 1]; \\ \dim X & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1) и 2), но не удовлетворяет условию 3). Действительно, достаточно проверить выполнение для функции d условия 2). Пусть $f: X \rightarrow Y$ нульмерное отображение двух компактов из класса $\mathfrak{A}_3$. Если X не содержит дуги, то $dX = 0 \leq dY$. Если X содержит дугу I , то ее образ при отображении f неодноточечен, так как f нульмерно. Следовательно, компакт fI является пеановским континуумом, а значит, содержит дугу [5]. Поэтому $dX = \dim X \leq \dim Y = dY$. Как показал

Бинг [6], существуют неразложимые континуумы любой конечной размерности $\dim$ (очевидно, не содержащие дуг), следовательно, $d \neq \dim$. Значит, согласно теореме 1 условие 3) не следует из условий 1) и 2).

В [7] Люксембург определил метрические компакты P_β , $-1 \leq \beta < \omega_1$ ($P_\beta = I^\beta$, если $\beta < \omega$), и доказал для них следующее утверждение.

ТЕОРЕМА ЛЮКСЕМБУРГА [7]. Пусть X – метрический компакт, а β – счетный ординал. Тогда $DX \leq \beta \Leftrightarrow$ существует нульмерное отображение $f: X \rightarrow P_\beta$. В частности, $DP_\beta = \beta$. Кроме того, если $DX = \beta$, то существует вложение $f: X \rightarrow P_{\beta+n(\beta)+1}$.

Пусть $\mathfrak{A}_4$ – класс слабо счетномерных компактов. Напомним, что $\mathfrak{A}_4$ является подклассом счетномерных компактов, монотонным по замкнутым подмножествам [1]. Класс $\mathfrak{A}_4$ совпадает с классом метрических компактов X , для которых выполнено неравенство $DX \neq \Delta$ [8].

Пусть d – размерностная функция на $\mathfrak{A}_4$, допускающая в качестве значений счетные ординалы.

ТЕОРЕМА 2. Размерность D есть единственная размерностная функция на $\mathfrak{A}_4$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $dP_\beta = \beta$, $-1 \leq \beta < \omega_1$;
- 2) для всякого нульмерного отображения $f: X \rightarrow Y$, где $X, Y \in \mathfrak{A}_4$, выполнено неравенство $dX \leq dY$;
- 3) во всяком неодноточечном компакте $X \in \mathfrak{A}_4$ найдется такой компакт $Y \subset X$, что $dY < dX$ и Y разбивает X ;
- 4) пусть A – замкнутое подмножество в компакте $X \in \mathfrak{A}_4$ и γ – предельный ординал. Если любое открытое в X множество V , пересекающееся с множеством A , содержит для всякого ординала $\beta < \gamma$ замкнутое в X подмножество $B \subset X \setminus A$ с $dB \geq \beta$, то $dX \geq \gamma + \min\{dA, \omega\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем неравенство $dX \leq DX$. Пусть $DX = \beta \neq \Delta$. Тогда по теореме Люксембурга существует нульмерное отображение $f: X \rightarrow P_\beta$. Согласно 1) $dP_\beta = \beta$. Поэтому согласно 2) $dX \leq dP_\beta = \beta = DX$, что и требовалось. Покажем обратное неравенство.

Пусть $DX \neq \Delta$. Используем индукцию. Если $DX = n < \omega$, то $DX = \dim X = n$ (см. определение D). Рассмотрим на $\mathfrak{A}_4$ размерностную функцию

$$EY = \begin{cases} dY, & \text{если } dY < \omega; \\ \infty, & \text{если } dY \geq \omega. \end{cases}$$

Очевидно, функция E удовлетворяет всем трем условиям теоремы 1. Следовательно, $EY = \dim Y$ для всякого компакта $Y \in \mathfrak{A}_4$. В частности, $dX = EX = \dim X = DX$.

Предположим, что равенство $dX = DX$ доказано для всех компактов X , удовлетворяющих неравенству $DX < \beta$. Докажем его для компактов, для которых $DX = \beta$. Пусть $\beta = \gamma + n$, где γ – предельное число, а $n \geq 0$.

Используем схему доказательства теоремы Хендерсона. Пусть $X = \bigcup \{A_\alpha : 0 \leq \alpha \leq \gamma\}$ – приведенное представление компакта X . Очевидно, $A_\gamma \neq \emptyset$ и для всякого открытого в X множества V , пересекающегося с A_γ , выполняется неравенство $D[V] \geq \gamma$.

Тогда по теореме Хендерсона (условие 3)) имеем $D([V] \setminus A_\gamma) \geq \gamma$. Следовательно, по той же теореме (условие 2)) для всякого $q < \gamma$ найдется точка $p \in V \setminus A_\gamma$, чьи окрестности имеют размерность $D \geq q$. Но для точки $p \in X \setminus A_\gamma$ можно найти окрестность U :

$$[U] \subset \left(\bigcup \{A_\alpha : 0 \leq \alpha \leq \delta\} \right) \cap (V \setminus A_\gamma),$$

где $\delta < \gamma$. Следовательно, $q \leq D[U] < \gamma$. По индуктивному предположению имеем $d[U] \geq q$. Применяя к множеству $A_\gamma \neq \emptyset$ условие 4), получаем $dX \geq \gamma + \min\{dA_\gamma, \omega\}$. Так как $\dim A_\gamma < \omega$, то $dA_\gamma = \dim A_\gamma < \omega$. Следовательно, $dX \geq \gamma + \dim A_\gamma = \beta = DX$. Что и требовалось. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия 1)–4) в теореме 2 независимы.

Пусть $X \in \mathcal{A}_4$.

1) Функция $dX = DX + 1$ удовлетворяет условиям 2)–4), но не удовлетворяет условию 1).

2) Функция

$$dX = \begin{cases} -1, & \text{если } X = \emptyset; \\ \min\{\beta : \text{существует вложение } f: X \rightarrow P_\beta\}, & \text{если } DX \geq \omega; \\ DX, & \text{если } DX < \omega, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1), 3), 4), но не удовлетворяет условию 2). Последнее вытекает из теоремы 2 и следующего примера.

Прежде всего напомним [7], что P_ω – одноточечная компактификация локально компактного локально конечномерного пространства и $\text{ind } P_\omega = \omega$, а $P_{\omega+1} = P_\omega \times I$, $P_{\omega+2} = P_\omega \times I^2$. Пусть C – окружность. Очевидно, компакт $P_\omega \times C$ нельзя вложить в $P_{\omega+1}$, но существует вложение $f: P_\omega \times C \rightarrow P_{\omega+2}$. Поэтому $dP_\omega \times C = \omega + 2 > \omega + 1 = DP_\omega \times C$.

3) Функция

$$dX = \begin{cases} -1, & \text{если } X = \emptyset; \\ 0, & \text{если компакт } X \text{ не содержит дуги } [0, 1] \text{ и } DX < \omega; \\ DX & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1), 2), 4), но не удовлетворяет условию 3). Последнее вытекает из теоремы 2 и существования n -мерных наследственно неразложимых континуумов.

4) Функция

$$dX = \begin{cases} -1, & \text{если } X = \emptyset; \\ p(DX), & \text{если компакт } X \text{ не содержит дуги } [0, 1] \text{ и } DX \geq \omega; \\ DX & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1)–3), но не удовлетворяет условию 4). Последнее вытекает из теоремы 2 и существования слабо счетномерных бесконечномерных компактов, не содержащих дуги, например, пусть L – псевдодуга [5], а $Y = \{*\} \cup \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^n$ – одноточечная компактификация прямой суммы $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^n$, тогда компакт $X = L \times Y$ не содержит дуги и $DX = \omega + 1 \neq \omega = dX$.

Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН

Поступило
12.09.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [2] Engelking R. Dimension Theory. Warszawa: PWN, 1978.
- [3] Федорчук В. В. Основы теории размерности // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 17. М.: ВИНТИ, 1987. С. 11–224.
- [4] Henderson D. W. D -dimension I. A new transfinite dimension // Pacif. J. Math. 1968. V. 26. P. 91–107.
- [5] Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Наука, 1969.
- [6] Bing R. H. Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. V. 71. P. 267–273.
- [7] Luxemburg L. A. On universal infinite-dimensional spaces // Fund. Math. 1984. V. 122. P. 129–147.
- [8] Henderson D. W. D -dimension II. Separable spaces and compactifications // Pacif. J. Math. 1968. V. 26. P. 109–113.