Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, Подпространство $C[0, 1]$, состоящее из функций, не имеющих конечных односторонних производных ни в одной точке, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 348–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:46:27

УДК 513.88

ПОДПРОСТРАНСТВО $C[0, 1]$, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ ФУНКЦИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНЫХ ОДНОСТОРОНИХ ПРОИЗВОДНЫХ НИ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Е. И. Бережной

Построено замкнутое бесконечномерное подпространство $G \subset C([0, 1])$, дающее утвердительный ответ на старый вопрос: *существует ли бесконечномерное замкнутое подпространство $G \subset C[0, 1]$ такое, что каждая отличная от тождественного нуля функция $y \in G$ не имеет ни в одной точке ни правой, ни левой конечной производной.*

Библиография: 5 названий.

В геометрической теории банаховых пространств значительный интерес представляет следующая задача (на нее обращалось внимание в [1]).

Существует ли бесконечномерное замкнутое подпространство $Y \subset C[0, 1]$ такое, что каждая отличная от тождественного нуля функция $y \in Y$ не имеет ни в одной точке ни правой, ни левой конечной производной.

Этим вопросом занимались многие математики [1]–[5]. Последнее достижение выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА FGK [1]. *Существует замкнутое бесконечномерное подпространство $E \subset C[0, 1]$ и подмножество A отрезка $[0, 1]$ лебеговой меры единица такое, что каждая отличная от тождественного нуля функция $x \in E$ нигде не дифференцируема на $(0, 1)$ и не имеет ни в одной точке множества A ни правой, ни левой конечной производной.*

Основным результатом настоящей статьи является окончательное решение задачи, приведенной в начале работы.

ТЕОРЕМА. *Существует замкнутое бесконечномерное подпространство $G \subset C([0, 1])$ такое, что каждая отличная от тождественного нуля функция $x \in G$ не имеет ни в одной точке $(0, 1)$ ни правой, ни левой конечной производной.*

Для доказательства основной теоремы нам потребуются некоторые предварительные построения.

Предположим сначала, что построены две бесконечные верхнетреугольные матрицы D и H

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & \dots \\ 0 & d_{2,2} & d_{2,3} & \dots \\ 0 & 0 & d_{3,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} & \dots \\ 0 & n_{2,2} & n_{2,3} & \dots \\ 0 & 0 & n_{3,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00428.

причем элементы $\{d_{j,k}\}$ при всех $j, k \in \mathbb{N}$ и $k \geq j$ являются положительными числами, а элементы $\{n_{j,k}\}$ при всех $j, k \in \mathbb{N}$ и $k \geq j$ являются натуральными числами.

Пусть, кроме того, для элементов матриц D и H выполнены соотношения:

для любых $j, k \in \mathbb{N}$ с $k > j$ справедливо неравенство

$$d_{j,k} > 2^{3+k} d_{j+1,k}; \quad (1)$$

для любых $j, k \in \mathbb{N}$ с $k \geq j$ справедливо неравенство

$$d_{j,k+1} > 2^3 d_{j,k}; \quad (2)$$

для любых чисел $j, k \in \mathbb{N}$ с $k \geq j$ справедливы соотношения

$$\frac{n_{k+1,k+1}}{8n_{1,k}} \in \mathbb{N}, \quad \frac{n_{j,k}}{8n_{j+1,k}} \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

т.е. эти числа являются натуральными;

для любого фиксированного $j \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} < \frac{d_{j,j}}{n_{j,j}} < 1; \quad (4)$$

для любого фиксированного j при всех $k = j, j+1, j+2, \dots$ справедливы неравенства

$$\frac{d_{j,k+1}}{n_{j,k+1}} \leq \frac{1}{8} \frac{d_{j,k}}{n_{j,k}}. \quad (5)$$

Матрицу D будем называть *матрицей производных*, а матрицу H будем называть *матрицей периодов*. Для элементов матрицы H положим $h_{j,k} = 1/n_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots$, $k = j, j+1, j+2, \dots$.

По матрице периодов H построим систему узлов, полагая $\tau_{j,k,l} = lh_{j,k}$, $l \in \mathbb{Z}$.

Для $t \in [0, 1]$ положим $\varphi_0(t) = 0, 25 - |t - 0, 5|$ и доопределим функцию φ_0 на всю ось периодически с периодом единица.

ЛЕММА 1. Для любых $t, s \in \mathbb{R}$ и $j, k \in \mathbb{N}$, $k \geq j$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{n_{j,k}} \{ \varphi_0(n_{j,k}t) - \varphi_0(n_{j,k}s) \} \right| \leq |t - s|; \quad (6)$$

если $\tau_{j,k,l} \leq t, s \leq \tau_{j,k,l+1}$, то справедливо равенство

$$\left| \frac{1}{n_{j,k}} \{ \varphi_0(n_{j,k}t) - \varphi_0(n_{j,k}s) \} \right| = |t - s|; \quad (7)$$

если

$$t < \tau_{j,k,l} < t + h_{k+1,k+1}, \quad (8)$$

то справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{n_{j,k}} \left\{ \varphi_0 \left(n_{j,k} \left(t + \frac{h_{1,k}}{2} \right) \right) - \varphi_0(n_{j,k}t) \right\} \right| \geq \frac{1}{4} h_{1,k}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (6) и (7) очевидны.

Докажем (9). Из условий (3) и (8) следует, что $h_{1,k}/2 + t \in [\tau_{j,k,l}, \tau_{j,k,l+1}]$. Поэтому (9) следует из (3), (6), (7) и цепочки неравенств

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n_{j,k}} \left\{ \varphi_0 \left(n_{j,k} \left(t + \frac{h_{1,k}}{2} \right) \right) - \varphi_0(n_{j,k}t) \right\} \right| \\ & \geq \left| \frac{1}{n_{j,k}} \left\{ \varphi_0 \left(n_{j,k} \left(t + \frac{h_{1,k}}{2} \right) \right) - \varphi_0(n_{j,k}\tau_{j,k,l}) \right\} \right| \\ & \quad - \left| \frac{1}{n_{j,k}} \{ \varphi_0(n_{j,k}\tau_{j,k,l}) - \varphi_0(n_{j,k}t) \} \right| \\ & \geq \left| t + \frac{h_{1,k}}{2} - \tau_{j,k,l} \right| - |\tau_{j,k,l} - t| \geq \frac{h_{1,k}}{2} - h_{k+1,k+1} - h_{k+1,k+1} \\ & = \frac{h_{1,k}}{2} - 2h_{k+1,k+1} = \frac{h_{1,k}}{2} \left(1 - 4 \frac{h_{k+1,k+1}}{h_{1,k}} \right) \geq \frac{1}{4} h_{1,k}. \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ с помощью матриц D, H по функции $\varphi_0(t)$ построим новые функции

$$\psi_j(t) = \sum_{l=j}^{\infty} d_{j,l} h_{j,l} \varphi_0(n_{j,l}t).$$

Для $k > j$ положим

$$\psi_{j,k}^1(t) = \sum_{l=j}^k d_{j,l} h_{j,l} \varphi_0(n_{j,l}t), \quad \psi_{j,k}^2(t) = \sum_{l=k+1}^{\infty} d_{j,l} h_{j,l} \varphi_0(n_{j,l}t).$$

Легко видеть, что для всех $k \geq j$ справедливо равенство

$$\psi_j(t) = \psi_{j,k}^1(t) + \psi_{j,k}^2(t). \quad (10)$$

Сразу же отметим, что из (3) следуют соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{h_{j,j+k}}{h_{j,j+k+1}} \in \mathbb{N}, \\ & \frac{h_{j,j+k}}{h_{j,j+k+1}} = \frac{n_{j,j+k+1}}{n_{j,j+k}} = \frac{n_{j,j+k+1}}{n_{j+1,j+k+1}} \frac{n_{j+1,j+k+1}}{n_{j+2,j+k+1}} \dots \frac{n_{j+k+1,j+k+1}}{n_{1,j+k}} \frac{n_{1,j+k}}{n_{2,j+k}} \dots \frac{n_{j-1,j+k}}{n_{j,j+k}} \\ & \geq 8^{k+1+j}. \end{aligned}$$

Поэтому период функции $\psi_{j,k}^2(t)$ равен $h_{j,k+1}$ и, следовательно, согласно (3) периодами этой функции будут числа $h_{1,k}/2$ и $h_{k+1,k+1}$.

ЛЕММА 2. Пусть заданы натуральные числа j, k с $k > j$. Если при некотором l верны неравенства $\tau_{j,k,l} \leq t < t + h_{k+1,k+1} \leq \tau_{j,k,l+1}$, то справедливо неравенство

$$|\psi_j(t + h_{k+1,k+1}) - \psi_j(t)| \geq \frac{3}{4} d_{j,k} h_{k+1,k+1}. \quad (11)$$

Если при некотором l верны неравенства $t < \tau_{j,k,l} < t + h_{k+1,k+1}$, то справедливо неравенство

$$\left| \psi_j \left(t + \frac{h_{1,k}}{2} \right) - \psi_j(t) \right| \geq \frac{1}{4} d_{j,k} \frac{h_{1,k}}{2}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (11). Из представления (10) и периодичности функции $\psi_{j,k}^2(t)$ с периодом $h_{k+1,k+1}$ получим

$$\begin{aligned} |\psi_j(t + h_{k+1,k+1}) - \psi_j(t)| &= |\psi_{j,k}^1(t + h_{k+1,k+1}) - \psi_{j,k}^1(t)| \\ &= \left| \sum_{l=j}^k d_{j,l} h_{j,l} \varphi_0(n_{j,l}(t + h_{k+1,k+1})) - \sum_{l=j}^k d_{j,l} h_{j,l} \varphi_0(n_{j,l}t) \right| \\ &\geq d_{j,k} h_{j,k} |\varphi_0(n_{j,k}(t + h_{k+1,k+1})) - \varphi_0(n_{j,k}t)| \\ &\quad - \sum_{l=j}^{k-1} d_{j,l} h_{j,l} |\varphi_0(n_{j,l}(t + h_{k+1,k+1})) - \varphi_0(n_{j,l}t)|. \end{aligned}$$

Далее применим равенство (7) из леммы 1 и условие (2). Тогда получим

$$|\psi_j(t + h_{k+1,k+1}) - \psi_j(t)| \geq d_{j,k} h_{k+1,k+1} - h_{k+1,k+1} \sum_{l=j}^{k-1} d_{j,l} \geq \frac{3}{4} h_{k+1,k+1} d_{j,k}.$$

Неравенство (11) доказано.

Для доказательства (12) нужно действовать аналогично, используя неравенство (9) из леммы 1.

Лемма полностью доказана.

Положим $G = \overline{\text{span}\{\psi_i / \|\psi_i\| C[0,1]\}}_{i=1}^\infty$.

ЛЕММА 3. Пространство G является замкнутым подпространством пространства $C[0,1]$, изоморфным пространству ℓ^1 , причем базис $\{\psi_i / \|\psi_i\| C[0,1]\}_{i=1}^\infty$ пространства G эквивалентен единичному базису пространства ℓ^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, покажем, что при всех $i \in \mathbb{N}$ верны неравенства

$$\frac{6}{7} d_{i,i} h_{i,i} \leq \|\psi_i\| C[0,1] \leq \frac{8}{7} d_{i,i} h_{i,i}. \quad (13)$$

Действительно, из (5) следует, что

$$\|\psi_i\| C[0,1] \leq \sum_{l=i}^\infty d_{i,l} h_{i,l} \leq d_{i,i} h_{i,i} \left(1 + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \dots\right) = \frac{8}{7} d_{i,i} h_{i,i}$$

и

$$\begin{aligned} \|\psi_i\| C[0,1] &\geq \|d_{i,i} h_{i,i} \varphi_0(n_{i,i}t) C[0,1]\| - \left\| \sum_{l=i+1}^\infty d_{i,l} h_{i,l} \varphi_0(n_{i,l}t) C[0,1] \right\| \\ &\geq d_{i,i} h_{i,i} - \sum_{l=i+1}^\infty d_{i,l} h_{i,l} \geq d_{i,i} h_{i,i} \left(1 - \frac{1}{7}\right). \end{aligned}$$

Положим $e^i(t) = \psi_i(t) / \|\psi_i\| C[0,1]$ и покажем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого набора чисел $\{a_i\}$ верны неравенства

$$\frac{5}{16} \sum_{i=1}^k |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^k a_i e^i C[0,1] \right\| \leq \sum_{i=1}^k |a_i|. \quad (14)$$

Правое неравенство в (14) очевидно.

Перейдем к доказательству левого неравенства в (14). Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и образуем множества

$$D(i, k)_+ = \left\{ t \in [\tau_{i,i,k}, \tau_{i,i,k+1}] : \varphi_0(n_{i,i}t) \geq \frac{1}{2} \right\},$$

$$D(i, k)_- = \left\{ t \in [\tau_{i,i,k}, \tau_{i,i,k+1}] : \varphi_0(n_{i,i}t) \leq -\frac{1}{2} \right\}.$$

Напомним, что $\{\tau_{i,i,k}\}$ есть система узлов, построенная по матрице H для функции $\varphi_0(n_{i,i}t)$.

Из рассмотрения графика функции $\varphi_0(n_{i,i}t)$ легко видеть, что множества $D(i, k)_+$, $D(i, k)_-$ представляют собой отрезки длины $h_{i,i}/4$. Отметим, что для $t \in D(i, k)_+$ выполняется неравенство

$$\psi_i(t) \geq d_{i,i}h_{i,i}\varphi_0(n_{i,i}t) - \sum_{l=i+1}^{\infty} d_{i,l}h_{i,l} \geq d_{i,i}h_{i,i}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \frac{5}{14}d_{i,i}h_{i,i}, \quad (15)$$

а для $t \in D(i, k)_-$ выполняется неравенство

$$\psi_i(t) \leq d_{i,i}h_{i,i}\varphi_0(n_{i,i}t) + \sum_{l=i+1}^{\infty} d_{i,l}h_{i,l} \leq -d_{i,i}h_{i,i}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = -\frac{5}{14}d_{i,i}h_{i,i}. \quad (16)$$

Из соотношений (3) следует, что

$$\frac{h_{i,i}}{h_{i+1,i+1}} \in \mathbb{N},$$

$$\frac{h_{i,i}}{h_{i+1,i+1}} = \frac{n_{i+1,i+1}}{n_{i,i}} = \frac{n_{i+1,i+1}}{n_{1,i}} \frac{n_{1,i}}{n_{2,i}} \dots \frac{n_{i-1,i}}{n_{i,i}} \geq 8^i.$$

Поэтому каждый из отрезков $D(i, k)_+$, $D(i, k)_-$ содержит не менее двух периодов функции $e^{i+1}(t)$.

Теперь у нас все готово для доказательства левого неравенства в (14). Без ограничения общности можно считать, что $a_1 \geq 0$. Положим $T_1 = D(1, 0)_+$. Если $a_2 \geq 0$, то найдется отрезок $T_2 = D(2, l_2)_+ \subset T_1$, если же $a_2 < 0$, то найдется отрезок $T_2 = D(2, l_2)_- \subset T_1$; если $a_3 \geq 0$, то найдется отрезок $T_3 = D(3, l_3)_+ \subset T_2$, если же $a_3 < 0$, то найдется отрезок $T_3 = D(3, l_3)_- \subset T_2$ и т.д. Из построения, (13) и (15), (16) следует, что для всех $t \in T_k$ выполнено соотношение

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i e^i(t) \right| = \sum_{i=1}^k |a_i| \cdot |e^i(t)| = \sum_{i=1}^k |a_i| \frac{|\psi_i(t)|}{\|\psi_i|C[0, 1]\|}$$

$$\geq \frac{5}{14} \sum_{i=1}^k |a_i| \frac{d_{i,i}h_{i,i}}{\|\psi_i|C[0, 1]\|} \geq \left(\frac{5}{14} : \frac{8}{7}\right) \sum_{i=1}^k |a_i| = \frac{5}{16} \sum_{i=1}^k |a_i|.$$

Таким образом, и левое неравенство в (14) доказано. Из (14) непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть построены матрицы D и H , удовлетворяющие (1)–(5). Тогда любая отличная от тождественного нуля функция из G не имеет ни в одной точке $(0, 1)$ ни правой, ни левой конечной производной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что любая функция

$$f(t) = \sum_{i=j}^{\infty} a_i \psi_i(t)$$

с $a_j \neq 0$, для которой

$$\sum_{i=j}^{\infty} |a_i| \leq 1, \quad (17)$$

ни в одной точке не имеет ни правой, ни левой конечной производной.

Покажем, что ни в одной точке сегмента $[0, 1)$ данная функция не имеет конечной правой производной.

Зафиксируем $t_0 \in [0, 1)$. При каждом $k \in \mathbb{N}$, $k > j$, для которого $h_{k,k} < 1 - t_0$, рассмотрим точки $t_0, t_0 + h_{k+1,k+1}$. У нас имеются две возможности.

Найдется индекс l такой, что эти точки лежат между узлами набора $\tau_{j,k,l}$, т.е.

$$t_0, t_0 + h_{k+1,k+1} \in [\tau_{j,k,l}, \tau_{j,k,l+1}], \quad (18)$$

или найдется индекс l такой, что справедливо неравенство

$$t_0 < \tau_{j,k,l} < t_0 + h_{k+1,k+1}. \quad (19)$$

Рассмотрим первую возможность. Сначала отметим, что согласно (3) при всех $l = k+1, k+2, \dots$ верно соотношение

$$\psi_l(t + h_{k+1,k+1}) \equiv \psi_l(t).$$

Кроме того, из (3) следует, что при всех $i = j, j+1, \dots, k$ верно соотношение

$$\psi_{i,k}^2(t + h_{k+1,k+1}) \equiv \psi_{i,k}^2(t).$$

Поэтому

$$f(t + h_{k+1,k+1}) - f(t) = \sum_{i=j}^k a_i \{ \psi_{i,k}^1(t + h_{k+1,k+1}) - \psi_{i,k}^1(t) \}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f(t_0 + h_{k+1,k+1}) - f(t_0)| &\geq |a_j \{ \psi_{j,k}^1(t_0 + h_{k+1,k+1}) - \psi_{j,k}^1(t_0) \}| \\ &\quad - \sum_{i=j+1}^k |a_i| \cdot |\psi_{i,k}^1(t_0 + h_{k+1,k+1}) - \psi_{i,k}^1(t_0)| \\ &= A_1 - A_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Для оценки A_1 воспользуемся леммой 2:

$$A_1 = |a_j| \cdot |\psi_{j,k}^1(t_0 + h_{k+1,k+1}) - \psi_{j,k}^1(t_0)| \geq |a_j| \frac{3d_{j,k}}{4} h_{k+1,k+1}. \quad (21)$$

Для оценки A_2 воспользуемся леммой 1 и соотношениями (1), (2) и (17):

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{i=j+1}^k |a_i| \cdot |\psi_{i,k}^1(t_0 + h_{k+1,k+1}) - \psi_{i,k}^1(t_0)| \\ &\leq h_{k+1,k+1} \sum_{i=j+1}^k |a_i| \sum_{l=i}^k d_{i,l} \leq \frac{8}{7} h_{k+1,k+1} \sum_{i=j+1}^k |a_i| d_{i,k} \\ &\leq \frac{8}{7} h_{k+1,k+1} \sum_{i=j+1}^k d_{i,k} \leq \frac{64}{49} h_{k+1,k+1} d_{j+1,k}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (20)–(22) с учетом соотношения (1) следует, что если найдется подпоследовательность $\{h_{k+1,k+1}\}_{k=j}^\infty$, удовлетворяющая (18), то в точке t_0 нет конечной правой производной.

Случай выполнения соотношений (19) рассматривается аналогично, только нужно заменить $h_{k+1,k+1}$ на $h_{1,k}/2$ и вместо неравенства (11) из леммы 2 использовать неравенство (12) из той же леммы.

Так как у последовательности $\{h_{k+1,k+1}\}_{k=j}^\infty$ обязательно найдется подпоследовательность, удовлетворяющая или (18), или (19), то у заданной функции нет в точке t_0 конечной правой производной.

Аналогично показывается, что у функции f ни в одной точке сегмента $(0, 1]$ нет конечной левой производной.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Продemonстрируем конструкцию матриц D и H . Выберем сначала $n_{1,1}$ произвольно. Затем выберем $d_{1,1}$ так, чтобы выполнялось условие (4). Затем выберем $n_{2,2}$ так, чтобы выполнялось условие (3), затем выберем $d_{2,2}$ так, чтобы выполнялось условие (4), потом выберем $d_{1,2}$ так, чтобы выполнялись условия (1), (2), потом выберем $n_{1,2}$ так, чтобы выполнялись условия (3) и (5) и т.д.

Для окончания доказательства основной теоремы осталось воспользоваться леммой 4.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fonf V. P., Gurariy V. I., Kadets M. I. An infinite-dimensional subspace $C[0, 1]$ consisting of nowhere differentiable functions // C. R. Acad. Bulg. Sci. 1999. V. 52. № 11–12. P. 13–16.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [3] Петрушев П. П., Троянски С. Л. О теореме Банаха–Мазура об универсальности $C[0, 1]$ // Comp. rend. Acad. Bulg. Sci. 1984. V. 37. № 3. P. 283–285.
- [4] Гуарий В. И. Линейное пространство состоящее из всюду недифференцируемых функций // Comp. rend. Acad. Bulg. Sci. 1991. V. 44. № 5. P. 13–15.
- [5] Rodriguez-Piazza I. Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. № 12. P. 3650–3654.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: ber@uniyar.ac.ru

Поступило
15.12.2000
Исправленный вариант
14.12.2001