Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрина, Пример строго псевдовыпуклой гомеоморфной шару области, к которой снаружи подклеивается комплексный диск, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 919–924

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:03:49

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПРИМЕР СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛОЙ ГОМЕОМОРФНОЙ ШАРУ ОБЛАСТИ, К КОТОРОЙ СНАРУЖИ ПОДКЛЕИВАЕТСЯ КОМПЛЕКСНЫЙ ДИСК

А. В. Домрина

0. Введение. В связи с известной проблемой о якобиане А. Г. Витушкиным был поставлен следующий вопрос.

Существуют ли разветвленное аналитическое накрытие $\tau: X \rightarrow Y$ (где X – некоторое комплексное многообразие, а Y – область в $\mathbb{C}^2$), биголоморфная шару область $\Omega \subset X$ и комплексный диск $D \subset X$ такие, что

- 1) Ω содержится в регулярной части накрывающей X ;
- 2) $\partial D \subset \partial \Omega$, $\text{int } D \subset X \setminus \overline{\Omega}$.

Здесь мы называем голоморфное сюръективное отображение $\tau: X \rightarrow Y$ из комплексного многообразия X комплексной размерности два в область $Y \subset \mathbb{C}^2$ *разветвленным аналитическим накрытием над Y* , если существует одномерное аналитическое множество $C \subset X$ такое, что τ локально биголоморфно на $X \setminus C$. При этом $X \setminus C$ назовем *регулярной частью разветвленной накрывающей X* .

В этой постановке вопрос остается открытым. В нашей заметке мы дадим утвердительный ответ на вопрос, аналогичный предыдущему, но сформулированный при более слабых ограничениях на область Ω , а именно, существуют ли разветвленное аналитическое накрытие $\tau: X \rightarrow Y$, строго псевдовыпуклая гомеоморфная шару область $\Omega \subset X$ и комплексный диск $D \subset X$ такие, что

- 1) Ω содержится в регулярной части накрывающей X ;
- 2) $\partial D \subset \partial \Omega$, $\text{int } D \subset X \setminus \overline{\Omega}$.

Если дополнительно потребовать $X = Y = \mathbb{C}^2$, $\tau = \text{id}$, то последний вопрос по-прежнему остается открытым.

Приведем теперь точную формулировку нашего результата.

УТВЕРЖДЕНИЕ 0.1. *Существуют комплексное многообразие X , разветвленное аналитическое накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{B}^4$ (где $\mathbb{B}^4$ – единичный шар в $\mathbb{C}^2$), строго псевдовыпуклая гомеоморфная четырехмерному шару область $\Omega \subset X$ и комплексный диск $D \subset X$ такие, что*

- 1) Ω содержится в регулярной части накрывающей X ;
- 2) $\partial D \subset \partial \Omega$, $\text{int } D \subset X \setminus \overline{\Omega}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–01218.

Отметим, что центральным местом конструкции является следующий результат Оревкова [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 0.2. *Существуют комплексное многообразие X комплексной размерности два, аналитический диск $M \subset X$, трансверсальный к ∂X , и разветвленное трехлистное аналитическое накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{B}^4$, где $\mathbb{B}^4$ – единичный шар в $\mathbb{C}^2$, обладающие следующими свойствами:*

- 1) $\text{int } X \setminus M$ гомеоморфно $\mathbb{R}^4$;
- 2) ограничение f на M является вложением;
- 3) f локально биголоморфно на $X \setminus M$;
- 4) f имеет ветвление порядка два вдоль M .

Всюду в дальнейшем будем считать, что комплексное многообразие X , комплексный диск M и отображение f обладают свойствами 1)–4) утверждения 0.2. В п. 1 приводится построение искомой области $\Omega \subset X$, а в п. 2 – доказательство того, что к ней подклеивается снаружи комплексный диск.

1. Построение области. Здесь будет построена строго псевдовыпуклая гомеоморфная шару область Ω вида $X \setminus U$, где U – окрестность диска M .

Анализируя конструкцию Оревкова, можно убедиться в том, что существуют комплексное многообразие X_1 , аналитический диск M_1 и голоморфное отображение f_1 из X_1 в некоторую окрестность единичного шара, обладающие свойствами 1)–4) утверждения 0.2 такие, что

$$X \Subset X_1, \quad M_1 \cap X = M, \quad f_1|_X = f.$$

Согласно работе Ройдена [2], в некоторой окрестности $U_1 \Subset X_1$ диска $\overline{M}$ существуют голоморфные координаты (z, w) , в которых

$$U_1 = \{|z| < 1, |w| < 1\}, \quad M_1 \cap U_1 = \{w = 0\}.$$

Сначала мы построим область $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1 = X \setminus T_{\varepsilon, \delta}$, где $T_{\varepsilon, \delta}$ – малая окрестность диска $\overline{M}$. При достаточно малых ε, δ область $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ будет гомеоморфна шару (см. следствие леммы 1.5). Кроме того, эта область будет строго псевдовыпуклой во всех своих граничных точках, исключая “ребра” $\partial X \cap \partial T_{\varepsilon, \delta}$ (см. утверждение 1.4). Искомая область Ω получается из области $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ сглаживанием около ребер. Возможность такого сглаживания следует из леммы 1.6.

Пусть (x, y) – комплексные координаты в $\mathbb{C}^2$. Обозначим через $a(x, y) = |x|^2 + |y|^2 - 1$ определяющую функцию шара $\mathbb{B}^4$ в $\mathbb{C}^2$. Пусть $\varphi: X_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ задается формулой $\varphi(\xi) = a(f_1(\xi))$, $\xi \in X_1$. Из вида функции a и условий утверждения 0.2 имеем (см. [1])

$$\varphi(X) \subset [-1, 0], \quad \varphi|_{\partial X} = 0, \quad \text{grad } \varphi|_{\partial X \setminus \partial M} \neq 0,$$

φ строго плюрисубгармонична на $X_1 \setminus M_1$.

Из приведенных свойств функции φ вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Область $\text{int } X$ строго псевдовыпукла в точках множества $\partial X \setminus \partial M$.*

Зададим на $U_1 \setminus M_1$ функцию

$$\psi_{\varepsilon, \delta} = |w|^{-2} - |\varepsilon|^{-2} + \delta\varphi, \quad \varepsilon, \delta > 0.$$

Тогда для функции $\psi_{\varepsilon, \delta}$ выполнены следующие свойства:

$\psi_{\varepsilon, \delta}$ строго плюрисубгармонична на $U_1 \setminus M_1$;
для достаточно малых δ имеем $\text{grad } \psi_{\varepsilon, \delta} \neq 0$ на $U_1 \setminus M_1$.

Определим окрестность $T_{\varepsilon, \delta}$ диска M формулой

$$T_{\varepsilon, \delta} := \{\xi \in U_1 \setminus M_1 \mid \psi_{\varepsilon, \delta} \geq 0\} \cup M_1.$$

Пусть $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1 = X \setminus T_{\varepsilon, \delta}$. Тогда из приведенных выше свойств функции ψ и утверждения 1.2 следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. Для достаточно малых ε, δ область $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ строго псевдовыпукла в точках $\partial\Omega_{\varepsilon, \delta}^1 \setminus \{\partial X \cap \partial T_{\varepsilon, \delta}\}$.

Следующая лемма нужна для доказательства того, что область $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ гомеоморфна шару.

ЛЕММА 1.5. Существуют окрестность $V \subset X_1$ диска $\overline{M}$, числа $\varepsilon', \delta' > 0$ и функция $\xi: V \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что отображение

$$g: V \rightarrow W := \{|z| < 1 + \delta', |w| < \varepsilon'\}, \quad (z, w) \mapsto (\xi(z, w), w)$$

является гомеоморфизмом, а ограничение

$$g|_{V \setminus \{w=0\}}: V \setminus \{w=0\} \rightarrow W \setminus \{w=0\}$$

является диффеоморфизмом и $g(\partial X \cap V) = \{|\xi| = 1\}$.

СЛЕДСТВИЕ. Для достаточно малых ε, δ область $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ гомеоморфна шару.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{int } X \setminus M$ гомеоморфна шару, то достаточно доказать диффеоморфность $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ и $\text{int } X \setminus M$. Так как $\overline{M} \subset V$, то для достаточно малых ε имеем $V_\varepsilon := \text{int } X \cap \{|w| \leq 2\varepsilon\} \subset V$. Зафиксируем такое ε . По теореме о неявной функции для достаточно малых δ уравнение $\psi_{\varepsilon, \delta} = 0$ разрешимо относительно $|w|$ на множестве V_ε (здесь мы действуем в координатах (ξ, w) из леммы 1.5). Поэтому существует такая гладкая функция $\lambda(\theta, \xi)$, где $\theta \in \mathbb{R}$, $|\xi| \leq 1$, что

$$\partial T_{\varepsilon, \delta} \cap V_\varepsilon = \{(\xi, w) \in V_\varepsilon \mid |w| = \lambda(\arg w, \xi), |\xi| \leq 1\}.$$

Определим $\rho: V_\varepsilon \setminus T_{\varepsilon, \delta} \rightarrow V_\varepsilon \setminus \{w=0\}$ так:

$$\rho(\xi, w) = \left(\xi, wq(|w|, \lambda(\arg w, \xi)) \right),$$

где $q(t_1, t_2)$ — гладкая $\mathbb{R}$ -значная функция, определенная на

$$\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq 2\varepsilon, 0 \leq t_2 \leq \varepsilon\},$$

монотонно неубывающая по t_1 , равная единице в окрестности точки $t_1 = 2\varepsilon$ и равная нулю при $t_1 = t_2$.

Тогда ρ — диффеоморфизм, тождественный в окрестности $|w| = 2\varepsilon$. Продолжив ρ тождественным отображением на $\text{int } X \setminus V_\varepsilon$, получаем диффеоморфизм

$$\rho': \text{int } X \setminus T_{\varepsilon, \delta} \rightarrow \text{int } X \setminus M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.5. Поскольку M – диск с гладкой границей, то существует диффеоморфизм некоторой окрестности M (как подмножества M_1) на окрестность единичного круга, переводящий M в единичный круг. Поэтому в некоторой окрестности $\overline{M}$ в X_1 определены гладкие координаты, которые мы вновь обозначим через (z, w) , такие, что $\overline{M} = \{|z| \leq 1, |w| = 0\}$. (При этой замене w остается прежней.)

В силу трансверсальности ∂X и M существуют окрестность V_1 множества ∂M и гладкая функция $\rho: V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\partial X \cap V_1 = \{\rho = 0\}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{V_1} \neq 0.$$

Пусть ε_1, δ_1 таковы, что $\{|z| \in [1 - \delta_1, 1 + \delta_1], |w| < \varepsilon_1\} \subset V_1$.

При каждом фиксированном θ зададим на множестве $\{w = te^{i\theta}, |t| < \varepsilon_1\}$ векторное поле X_θ по формуле

$$X_\theta(z, e^{i\theta}t) = \left(-\frac{\partial \rho / \partial w}{\partial \rho / \partial z} e^{i\theta} \chi(|z|), e^{i\theta} \right),$$

где $\chi(x)$ – гладкая функция, равная нулю вне $[1 - \delta_1, 1 + \delta_1]$ и равная единице в окрестности точки $x = 1$.

Семейство X_θ непрерывно зависит от θ и при каждом фиксированном θ поле X_θ трансверсально к $w = 0$ и касается ∂X .

Обозначим через

$$z = z(t, \theta, z_0), \quad w = w(t, \theta, z_0)$$

интегральные кривые поля X_θ , выходящие из точки $(z, 0)$. Из вида X_θ следует, что $w(t, \theta, z_0) = te^{i\theta}$. Для достаточно малых ε', δ' отображение ψ из множества $W := \{|z| < 1 + \delta', |w| < \varepsilon'\}$ в некоторую окрестность V диска $\overline{M}$, задаваемое формулой

$$\begin{aligned} \psi(z_0, w_0) &= (z(|w_0|, \arg(w_0), z_0), w_0) \quad \text{при } w_0 \neq 0, \\ \psi(z_0, 0) &= (z_0, 0). \end{aligned}$$

является гомеоморфизмом, а ограничение ψ на $W \setminus \{w = 0\}$ является диффеоморфизмом $W \setminus \{w = 0\}$ на $V \setminus \{w = 0\}$. Поскольку для любого θ поле X_θ касается ∂X , то $\psi(|z| = 1) \subset \partial X$.

Тогда отображение g , обратное ψ , удовлетворяет условиям доказываемой леммы, а функция ξ определяется из соотношения $g(z, w) = (\xi(z, w), w)$. Доказательство леммы 1.5 закончено.

Область Ω получается сглаживанием $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ около множества $\partial X \cap \partial T_{\varepsilon, \delta}$. Возможность такого сглаживания следует из применения приведенной ниже леммы 1.6 к областям $D_1 = X \setminus M$ и $D_2 = U_1 \setminus T_{\varepsilon, \delta}$.

ЛЕММА 1.6. Пусть $D_1, D_2, D := D_1 \cap D_2$ – области на комплексном многообразии Y , причем $D \Subset Y$, и существует открытое $U \supset \partial D$ такое, что при $i = 1, 2$ область D_i строго псевдовыпукла в точках $\partial D_i \cap U$. Пусть ∂D_1 и ∂D_2 пересекаются трансверсально. Тогда для любого открытого $U' \supset \partial D_1 \cap \partial D_2$ существует гомеоморфная D строго псевдовыпуклая область D' такая, что $D \setminus D' \subset U'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [3, § 20, п. 55] с помощью разбиения единицы можно доказать, что существуют открытые множества $V_1 \subset U$ и $V_2 \subset U$ и строго плюрисубгармонические функции $\varphi_1 \in C^2(V_1)$ и $\varphi_2 \in C^2(V_2)$ такие, что

$$\operatorname{grad} \varphi_i|_{V_i} \neq 0, \quad D_i \cap V_i = \{\xi \in V_i \mid \varphi_i(\xi) < 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда из трансверсальности ∂D_1 и ∂D_2 имеем, что

$$\partial D_1 \cap \partial D_2 = \{\xi \in V_1 \cap V_2 \mid \varphi_1(\xi) = 0, \varphi_2(\xi) = 0\}$$

есть гладкое компактное подмногообразие в Y . Вновь используя трансверсальность ∂D_1 и ∂D_2 , получаем, что для достаточно малых ε множество $U_\varepsilon := \{\xi \in V_1 \cap V_2 \mid |\varphi_1| < \varepsilon, |\varphi_2| < \varepsilon\}$ содержится в U' и существует диффеоморфизм π множества U_ε на гладкое многообразие $\{\partial D_1 \cap \partial D_2\} \times \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |t_1| < \varepsilon, |t_2| < \varepsilon\}$. При этом

$$\pi(\{\varphi_1(\xi) = a_1, \varphi_2(\xi) = a_2\}) = \{\partial D_1 \cap \partial D_2\} \times (a_1, a_2) \quad (1)$$

(см., например, [4, § 3]).

Пусть D' – область, совпадающая с D вне $U_{\varepsilon/2}$, а на $U_{\varepsilon/2}$ заданная формулой

$$\left(\varphi_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 + \left(\varphi_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 < 0.$$

Поскольку для достаточно малых ε векторы $\operatorname{grad} \varphi_1$ и $\operatorname{grad} \varphi_2$ линейно независимы, то легко проверить, что для достаточно малых ε область D' будет $\mathbb{C}^2$ -гладкой и строго псевдовыпуклой. Диффеоморфность D и D' следует из (1) и из того, что

$$\begin{aligned} \pi(U_\varepsilon \cap D) &= \{\partial D_1 \cap \partial D_2\} \times \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\varepsilon < t_1 < 0, -\varepsilon < t_2 < 0\}, \\ \pi(U_{\varepsilon/2} \cap D') &= \{\partial D_1 \cap \partial D_2\} \\ &\quad \times \left\{ (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(t_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 + \left(t_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1.6 закончено.

Сглаживая границу области $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ около “ребер” $\partial X \cap \partial T_{\varepsilon, \delta}$, получаем искомую область Ω , удовлетворяющую условиям утверждения 0.1.

2. Подклейка диска. Фиксируем внутреннюю точку a диска M . Без ограничения общности можно считать a началом координат (z, w) , определенных в начале п. 1. Далее, мы будем действовать в обозначениях п. 1. Пусть $A = \{(z, w) \in U_1 \mid z = 0\}$ – аналитическое множество в U_1 , проходящее через точку a . Пусть $A_{\varepsilon, \delta} = A \cap (X \setminus \Omega_{\varepsilon, \delta}^1)$. Для достаточно малых ε имеем $\partial A_{\varepsilon, \delta} \subset \operatorname{int} X \cap \partial T_{\varepsilon, \delta}$. Поскольку

$$\partial A_{\varepsilon, \delta} = \{|w|^{-2} - |\varepsilon|^{-2} + \delta \varphi(0, w) = 0, z = 0\},$$

то для достаточно малых δ множество $\partial A_{\varepsilon, \delta}$ диффеоморфно окружности, поэтому $A_{\varepsilon, \delta}$ – комплексный диск. Пусть, кроме того, ε, δ столь малы, что выполняется следствие леммы 1.5. Тогда к гомеоморфной шару области $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ подклеивается снаружи комплексный диск $D := A_{\varepsilon, \delta}$, т.е.

$$\partial D \subset \partial \Omega_{\varepsilon, \delta}^1, \quad \operatorname{int} D \subset X \setminus \overline{\Omega}_{\varepsilon, \delta}^1.$$

Пусть область Ω получена по схеме п. 1 сглаживанием $\Omega_{\varepsilon, \delta}^1$ вне ∂D . Тогда

$$\partial D \subset \partial \Omega, \quad \text{int } D \subset X \setminus \overline{\Omega}.$$

Искомые область Ω и диск D , удовлетворяющие условиям утверждения 0.1, построены.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику А. Г. Витушкину за постановку задачи и помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
08.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orevkov S. Yu. Rudolph diagrams and analytical realization of Vitushkin's covering. Preprint, 1995.
2. Royden H. L. // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 43. P. 306–310.
3. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1976.
4. Lamotke K. // Topology. 1981. V. 20. P. 15–51.