Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Зайцев, К теории натуральных гамильтоновых систем, интегрируемых в эллиптических координатах, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 924–929

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:54:31

К ТЕОРИИ НАТУРАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

А. А. Зайцев

1. Недавно Маршалл и Войцеховский указали [1] новое семейство натуральных гамильтоновых систем, которые интегрируются в эллиптических координатах разделением переменных. Генетически эти системы связаны с рациональными первыми интегралами геодезического потока на эллипсоиде (в $\mathbb{R}^n$) $\sum_{i=1}^n x_i^2/a_i = 1$, $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ (задача Якоби; см. [2]),

$$f_k(x, p) = p_k^2 + \sum_{i \neq k} \frac{(x_k p_i - x_i p_k)^2}{a_k - a_i}, \quad p_k = \dot{x}_k, \quad (1)$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ (в скобках указаны декартовы координаты точек $x, p \in \mathbb{R}^{2n}$; всюду в статье индексы $i, k, m = \overline{1, n}$). Они коммутируют в $\mathbb{R}^n$ и $\sum_i f_i = 2T = |p|^2$. Естественно дополнить их слагаемыми $2u_k(x)$ так, чтобы функции

$$F_k(x, p) = f_k(x, p) + 2u_k(x) \quad (2)$$

снова попарно коммутировали, тогда они будут первыми интегралами гамильтонова потока g_h^t , где

$$h = T + u(x), \quad u(x) \equiv \sum_i u_i(x); \quad (3)$$

это приводит к новым интегрируемым системам с натуральными гамильтонианами.

ТЕОРЕМА 1 (Маршалл–Войцеховский [1]). Пусть функции $F_k(x, p)$ определены равенствами (2), тогда следующие условия эквивалентны:

- они есть первые интегралы гамильтонова потока с гамильтонианом (3);
- они образуют полный инволютивный набор первых интегралов;

в) потенциал $u(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} & (a_k - a_m)^{-1} \left(x_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_i} - x_k x_m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \right) \\ & = (a_k - a_i)^{-1} \left(x_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_i} - x_k x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} \right), \quad i \neq k, \quad k \neq m, \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} + 3(a_k - a_m)^{-1} \left(x_m \frac{\partial u}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) \\ & - (a_k - a_m)^{-1} \left(x_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} - x_k x_m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) \\ & + \sum_{i \neq k} (a_k - a_i)^{-1} \left(x_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} - x_k x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_i} \right) = 0, \quad k \neq m; \end{aligned} \quad (4)$$

г) полный интеграл стационарного уравнения Гамильтона–Якоби получается разделением переменных в эллиптических координатах.

Анализ, данный в [1], полезно дополнить. Например, особый интерес представляют гамильтонианы (3) с полиномиальными потенциалами $u(x)$, так как они возникают в задачах о взаимодействии ангармонических осцилляторов и др. В частности, системы Маршалла–Войцеховского содержат случай $u(x) = \sum_i a_i x_i^2 - |x|^4$, изученный Гарнье [3]. В [4] доказано, что решения системы Гарнье выражаются через собственные функции одномерного оператора Шрёдингера с конечнозначными потенциалами. В данной работе дается описание всех полиномиальных потенциалов в системах Маршалла–Войцеховского, приводится их производящая функция и производящая функция (по Мозеру) первых интегралов, излагается еще ряд фактов. Другой подход к проблеме и часть результатов изложены в заметке автора [5].

2. Так как функции f_k коммутируют с кинетической энергией T , то все F_k будут первыми интегралами гамильтонова потока g_h^t тогда и только тогда, когда $2\{u_k(x), T\} = \{u(x), f_k(x, p)\}$ ($\{\cdot, \cdot\}$ означает стандартную скобку Пуассона). Эти соотношения линейны по импульсам, поэтому расщепляются, давая систему уравнений

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = l_k u, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_m} = x_k \sigma_{km} u, \quad m \neq k, \quad (5)$$

где

$$\sigma_{kif} \equiv (a_k - a_i)^{-1} \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \quad i \neq k, \quad l_k f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{i \neq k} x_i \sigma_{ik} f.$$

Исключая из (5) u_k перекрестными дифференцированиями, получаем для основного потенциала $u(x)$ систему (4). Заметим, что $\sigma_{km} = \sigma_{mk}$; с помощью этого равенства доказывается

ТЕОРЕМА 2. Для решений системы (5) справедливы представления

$$u_k = x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad u = \sum_i x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

где функция φ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_m} = \sigma_{km} \sum_i x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad k \neq m.$$

Простейшее решение системы (5) есть

$$u_k = u_k^{(1)} \equiv x_k^2, \quad u = u^{(1)} \equiv |x|^2. \quad (6)$$

Размножить решения позволяет

ТЕОРЕМА 3. Если функции u_k, u удовлетворяют системе (5), то преобразование

$$\tilde{u}_k = a_k u_k - x_k^2 u, \quad \tilde{u} = \sum_i \tilde{u}_i \quad (7)$$

дает новые решения этой системы.

Это утверждение остается, разумеется, справедливым, если новые потенциалы $\tilde{u}_k$ дополнить произвольными константами. Итерируя решение (6) преобразованиями (7) в сочетании с операцией сложения с константами, получаем новые многочлены. Первая итерация дает потенциалы Гранье $u_k^{(2)} = x_k^2(a_k - |x|^2)$, $u^{(2)} = \sum_i a_i x_i^2 - |x|^4$.

Обозначим через $u_k^{(\nu)}, u^{(\nu)}, \nu \in \mathbb{N}$, потенциалы, получаемые из потенциалов (6) последовательными итерациями преобразования (7); для них справедливы рекуррентные соотношения

$$u_k^{(\nu+1)} = a_k u_k^{(\nu)} - x_k^2 u^{(\nu)}, \quad u^{(\nu)} = \sum_i u_i^{(\nu)}, \quad \nu \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Используя теорему 2, можно установить, что старшие однородные члены любых полиномиальных решений системы (5) есть $c_\nu x_k^2 |x|^{2(\nu-1)}$ (для u_k) и $c_\nu |x|^{2\nu}$ (для u). Следствием этого факта является

ТЕОРЕМА 4. Потенциалы $u_k^{(\nu)}, u^{(\nu)}, \nu \in \mathbb{N}$, образуют базис векторного пространства всех полиномиальных решений системы (5).

Многочлены, о которых идет речь в теореме 4, назовем *базисными*. Определим их производящие функции равенствами

$$w_k(\lambda, x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} u_k^{(\nu)} \lambda^{-\nu}, \quad w(\lambda, x) = \sum_i w_i(\lambda, x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} u^{(\nu)} \lambda^{-\nu}. \quad (9)$$

Значения производящих функций получаются умножением (8) на $\lambda^{-\nu}$ и суммированием по ν ; это дает

$$w_k(\lambda, x) = \frac{x_k^2}{(\lambda - a_k)(1 - Q_\lambda(x))}, \quad w(\lambda, x) = -\frac{Q_\lambda(x)}{1 - Q_\lambda(x)}, \quad (10)$$

где $Q_\lambda(x) = \sum_i x_i^2 / (a_i - \lambda)$.

Обратное преобразование к преобразованию (7) дается равенством

$$u_k = a_k^{-1} \frac{\tilde{u}_k + x_k^2 \sum_i \tilde{u}_i / a_i}{1 - Q_0(x)}.$$

Система (5) инвариантна относительно этого преобразования. Комбинируя его с прямым преобразованием (7) и операцией сложения с произвольными константами, получаем многочисленное семейство рациональных решений системы (5). Вероятно, этот способ дает все рациональные решения.

3. Эллиптические координаты $\{\xi_k\}$ точки $x \in \mathbb{R}^n$ определяются как корни уравнения $Q_\lambda(x) = 1$ (относительно λ). Вычисляя вычет функции $Q_\lambda(x)$ в полюсе $\lambda = a_k$, получаем формулу [2]

$$x_k^2 = \frac{D(\xi_k)}{\prod_{i \neq k} (a_k - a_i)}, \quad D(\xi_k) \equiv \prod_i (\xi_k - a_i), \quad (11)$$

которая выражает декартовы координаты точки x через эллиптические. Эллиптическая система координат ортогональная: в ней евклидова метрика имеет вид (вывод основан на формуле (11)) $ds^2 = \sum_k g_k d\xi_k^2$, где $g_k = -\prod_{i \neq k} (\xi_k - \xi_i)/4D(\xi_k)$. Диагональность метрического тензора равносильна тождеству

$$\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i - \xi_k)(a_i - \xi_m)} = 4g_k \delta_{km}$$

(здесь и далее под x_k^2 подразумевается выражение (11) этой величины через эллиптические координаты), из которого следует

ТЕОРЕМА 5. *Линейные преобразования*

$$s_m = \sum_k \frac{c_k}{a_k - \xi_m}, \quad c_k = x_k^2 \sum_i \frac{s_i}{4g_i(a_k - \xi_i)}, \quad (12)$$

являются однозначными и обратными друг к другу, причем имеют место квадратичное и билинейное тождества

$$4 \sum_k \frac{c_k^2}{x_k^2} = \sum_m \frac{s_m^2}{g_m}, \quad 4 \sum_k \frac{c_k c'_k}{x_k^2} = \sum_m \frac{s_m s'_m}{g_m},$$

где $\{c'_k\}$ и $\{s'_m\}$ — два других вектора, связанных преобразованием (12).

Преобразования (12) напоминают прямое и обратное дискретные преобразования Фурье; ниже воспользуемся ими для анализа рассматриваемых гамильтоновых систем.

В эллиптических координатах кинетическая энергия, импульсы и первые интегралы (1) геодезического потока на эллипсоиде выглядят следующим образом:

$$T = \sum_i \frac{g_i \xi_i^2}{2} = \sum_i \frac{\eta_i^2}{2g_i}, \quad \eta_k = g_k \dot{\xi}_k, \quad f_k = x_k^2 \sum_i \frac{\eta_i^2}{g_i(a_k - \xi_i)}.$$

Разлагая правые части формул (10) по убывающим степеням λ и сравнивая с (9), получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Базисные многочлены имеют следующее представление в эллиптических координатах:*

$$u_k^{(\nu)} = x_k^2 \sum_i \frac{\xi_i^{\nu-1}}{4g_i(a_k - \xi_i)}, \quad u^{(\nu)} = \sum_i \frac{\xi_i^{\nu-1}}{4g_i}. \quad (13)$$

Для гамильтониана и первых интегралов потока g_h^t в этом случае справедливы равенства

$$h = \sum_i \frac{\eta_i^2 + \xi_i^{\nu-1}/2}{g_i}, \quad F_k = x_k^2 \sum_i \frac{\eta_i^2 + \xi_i^{\nu-1}/2}{g_i(a_k - \xi_i)}.$$

Представления типа (13) являются характеристическими для представлений в эллиптических координатах $\{\xi_k\}$ любых решений системы (5). В этих координатах система (5) имеет вид

$$\frac{\partial(u_k - x_k^2 u / (a_k - \xi_m))}{\partial \xi_m} = 0. \quad (14)$$

С помощью теоремы 5 доказывается

ТЕОРЕМА 6. *Общее решение системы (14) дается формулами*

$$u_k = x_k^2 \sum_i \frac{v_i(\xi_i)}{g_i(a_k - \xi_i)}, \quad u = \sum_i \frac{v_i(\xi_i)}{g_i}, \quad (15)$$

где v_i – произвольные дифференцируемые функции.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Система уравнений (5) имеет решениями многочлены тогда и только тогда, когда в представлениях (15) все функции v_i совпадают, $v_i(\xi_i) = v(\xi_i)$, и являются многочленами.*

Возможно, тем же свойством обладают любые рациональные решения системы (5), с той лишь разницей, что $v(\xi_i)$ есть рациональная функция.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть потенциал $u(x)$ в гамильтониане (3) и потенциалы u_k в первых интегралах (2) в эллиптических координатах имеют представление (15). Тогда*

$$h = \sum_i \frac{\eta_i^2 + 2v_i(\xi_i)}{g_i}, \quad F_k = x_k^2 \sum_i \frac{\eta_i^2 + 2v_i(\xi_i)}{g_i(a_k - \xi_i)}. \quad (16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Преобразованию (7) соответствует преобразование $v_i(\xi_i) \rightarrow \xi_i v_i(\xi_i)$ в представлении (15).*

Определим производящую функцию первых интегралов F_k , имеющих представление (15), равенством

$$\Phi_\lambda(x, p) = \sum_k \frac{F_k(x, p)}{a_k - \lambda}.$$

Здесь мы следуем Мозеру [2], который точно так же определил производящую функцию интегралов (1). Используя значение производящей функции Мозера, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для производящей функции $\Phi_\lambda(x, p)$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(x, p) &= Q_\lambda^2(x, p) + (1 - Q_\lambda(x))(Q_\lambda(p) + 2V_\lambda(x)), \\ Q_\lambda(x, p) &\equiv \sum_i \frac{x_i p_i}{a_i - \lambda}, \quad V_\lambda(x) \equiv \sum_i \frac{v_i(\xi_i)}{g_i(\xi_i - \lambda)}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 7. *Функции $\Phi_\lambda(x, p)$ и $\Phi_\mu(x, p)$ коммутируют:*

$$\{\Phi_\lambda(x, p), \Phi_\mu(x, p)\} = 0.$$

Эта теорема обобщает соответствующую теорему Мозера [2] для его производящей функции и доказывается аналогично.

4. Вдоль траекторий натуральной гамильтоновой системы с потенциалом $u(x)$, имеющего в эллиптических координатах представление (15),

$$x_k^2 \sum_i \frac{\eta_i^2 + 2v_i(\xi_i)}{g_i(a_k - \xi_i)} = F_k = \text{const}$$

(см. формулу (16)). Теорема 5 позволяет разрешить эти соотношения относительно импульсов:

$$\eta_k^2 + 2v_k(\xi_k) = r(\xi_k) \equiv \sum_i \frac{F_i}{4(a_i - \xi_k)}.$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения траекторий в виде

$$\dot{\xi}_k = \frac{S_k(\xi_k)}{g_k}, \quad S_k(\xi_k) \equiv \sqrt{r(\xi_k) - 2v_k(\xi_k)}. \quad (17)$$

Наконец, тождество

$$\sum_i \frac{\xi_i^{k-1}}{g_i D(\xi_i)} = -4\delta_{kn}$$

дает возможность преобразовать уравнения (17) к квадратурам:

$$\sum_i \frac{\xi_i^{k-i} \dot{\xi}_i}{D(\xi_i) S_i(\xi_i)} = -4\delta_{kn} \Rightarrow \sum_i \int \frac{\xi_i^{k-i} d\xi_i}{D(\xi_i) S_i(\xi_i)} = -4\delta_{kn}(t - t_0). \quad (18)$$

Формулы (18) можно получить также методом Гамильтона–Якоби. В случае полиномиального потенциала $u(x)$ знаменатели подынтегральных выражений в (18) есть радикалы от одинаковых многочленов, т.е. возникает задача Якоби обращения гиперэллиптических интегралов.

Автор благодарит С. Б. Лебле за обсуждение результатов и Ю. Н. Фёдорова за полезные замечания.

Калининградский государственный университет

Поступило
03.12.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marshall I., Wojcichowsky S. // J. Math. Phys. 1988. V. 29. №6. P. 1338–1346.
2. Мозер Ю. // УМН. 1981. Т. 36. №5. С. 109–151.
3. Garnier R. // Rend. Sirc. Matem. Palermo. 1919. V. 43. №4. P. 155–191.
4. Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1978. V. 286. №5. P. 1075–1078.
5. Zaitsev A. A. // Proceedings of the 8th International Workshop Nonlinear Equations & Dynamical Systems. Need's-92 / ed. V. Makhankov. Singapore: World Scientific, 1993. P. 463–466.