Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Карасёв, Представление оператора эволюции через мембранные амплитуды, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 930–934

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:28:28

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ ЧЕРЕЗ МЕМБРАННЫЕ АМПЛИТУДЫ

М. В. Карасев

1. Мембранные амплитуды в виковском квантовании. Мы используем здесь схему квантования, основанную на понятии когерентного состояния [1], [2]. Пусть $\mathcal{L}$ – некоторое гильбертово пространство, а $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{2n}$ – связное и односвязное многообразие с комплексной структурой (т.е. с локальными комплексными координатами $z = (z^1, \dots, z^n)$). Пусть $\Pi: \mathfrak{X} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{L})$ – гладкое невырожденное отображение, удовлетворяющее условиям:

- I) для любого $x \in \mathfrak{X}$ оператор $\Pi(x)$ является ортогональным проектором на пространство, натянутое на некоторый ненулевой вектор $\pi(z(x)) \in \mathcal{L}$, причем семейство $\pi(z)$ локально голоморфно;
- II) имеет место разложение единицы: $\int_{\mathfrak{X}} \Pi(x) dm(x) = I$ (слабый интеграл) для некоторой меры dm на $\mathfrak{X}$;
- III) линейная оболочка проекторов $\{\Pi(x) \mid x \in \mathfrak{X}\}$ плотна в алгебре операторов Гильберта–Шмидта на $\mathcal{L}$.

Будем говорить, что Π – это *квантование* комплексного многообразия $\mathfrak{X}$ над гильбертовым пространством $\mathcal{L}$. На естественных классах функций f над $\mathfrak{X}$ можно определить отображение $f \rightarrow \hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{X}} f(x) \Pi(x) dm(x)$. Таким образом, $\hat{f}$ – это некоторый линейный оператор в $\mathcal{L}$. Функция f называется *антивиковским* (или контравариантным, или верхним) символом оператора $\hat{f}$; функция $x \rightarrow \text{tr}(\hat{f}\Pi(x))$ называется *виковским* символом оператора $\hat{f}$ (или ковариантным, или нижним); векторы $\pi(z)$ называются (голоморфными) *когерентными состояниями* [1]–[5]. Отметим, что аксиома III, введенная в [6], не встречалась в традиционных вариантах.

В [6]–[10] была развита конструкция квантования, основанная на понятии комплексного группоида, мембранных амплитуд и геометрических когерентных состояний над лагранжевыми подмногообразиями; в данной работе приведены некоторые следствия из этой общей конструкции.

Итак, пусть задано некоторое квантование Π многообразия $\mathfrak{X}$. Введем на $\mathfrak{X}$ кэлерову метрику и соответствующую 2-форму

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^\alpha \partial z^\beta} \ln \|\pi(z)\|_{\mathcal{L}}^2, \quad \omega = i \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta} d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\beta. \quad (1.1)$$

Форма ω аналитически продолжается на комплексный группоид, соответствующий многообразию $\mathfrak{X}$, т.е. на прямое произведение $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ (которое может рассматриваться как один из возможных вариантов комплексификации многообразия $\mathfrak{X}$; см. детали в [6], [8], [9]). Продолжение задается явной формулой:

$$\omega_{(x, x')} = i \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}'^\alpha} \frac{\partial}{\partial z^\beta} \ln(\pi(z), \pi(z'))_{\mathcal{L}} d\bar{z}'^\alpha \wedge dz^\beta, \quad (1.2)$$

где $z = z(x)$, $z' = z(x')$, $(x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. На диагонали $\text{diag}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) \approx \mathcal{X}$, т.е. при $x = x'$, форма (1.2) совпадает с (1.1), а на подмножестве точек, сопряженных относительно метрики g , эта форма имеет особенности.

Ниже, в п. 3 мы будем дополнительно предполагать, что метрика g представима в виде

$$g = g_0 + \bar{\partial}\partial \ln \det g_1/2, \quad (1.3)$$

где g_0 и g_1 — некоторые кэлеровы метрики на $\mathcal{X}$. Основной вывод из результатов [6]–[10], состоит в том, что через эти метрики и через соответствующие им 2-формы могут быть представлены квантовые (некоммутативные) деформации алгебр функций над фазовым многообразием $\mathcal{X}$, а также точные и квазиклассические решения квантовых уравнений (типа Шрёдингера, волнового, диффузии и др.) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$.

Ключевое наблюдение состоит в следующем. Для любых $x, y \in \mathcal{X}$ обозначим через $\Sigma(x, y)$ двумерную пленку (мембрану) в группоиде $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, граница которой составлена из отрезков путей

$$(x, x) \rightarrow (x, y) \rightarrow (y, y) \rightarrow (y, x) \rightarrow (x, x). \quad (1.4)$$

Здесь каждая из стрелок ($\rightarrow$) обозначает произвольный путь вдоль “горизонтالي” или “вертикали” в прямом произведении $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Имеет место следующая формула:

$$p(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(\Pi(x)\Pi(y)) = \exp\left\{-2\Im \int_{\Sigma(x, y)} \omega\right\}, \quad (1.5)$$

где $\Im$ обозначает взятие мнимой части. В правой части здесь появилась одна из простейших *мембранных амплитуд* с четырехугольной границей (1.4) (в других ситуациях амплитуды строятся по мембранам с более сложной конфигурацией [7]–[10]). Она называется *вероятностной функцией*. Это гладкая симметричная функция на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, принимающая значения между 0 и 1, причем $\int_{\mathcal{X}} p(x, y) dm(x) = 1$ для любого y . Интегральный оператор $\mathcal{P}$ с ядром $p(x, y)$ переводит антивиковские символы в виковские. Ортогональное дополнение в $L^2(\mathcal{X}, dm)$ к нуль-подпространству оператора $\mathcal{P}$ задает квантовую алгебру $\mathcal{F}$ функций на $\mathcal{X}$ (антивиковских символов), изоморфную алгебре операторов Гильберта–Шмидта в $\mathcal{L}$. Умножение в $\mathcal{F}$ описывается геометрически с помощью *функции голономии*, построенной по мембране с шестиугольной границей (см. [6], [8], [9]).

2. Геометрическое представление интеграла Клаудера. Используя мембранные амплитуды, можно чисто геометрически выразить виковский символ композиции нескольких операторов через антивиковские символы сомножителей и получить отсюда новое представление для интегралов по путям типа Клаудера [11], [12]. Пункт (а) следующей теоремы взят из [8], [9].

ТЕОРЕМА 2.1. (а) *Виковский символ композиции вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_N \Pi(x)) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} \exp\left\{i \int_{\Sigma(x_N, \dots, x_1, x)} \omega\right\} f(x_N) \cdots f(x_1) dm(x_N) \cdots dm(x_1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Через $\Sigma(x_N, \dots, x_1, x)$ обозначена мембрана в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ со следующей границей:

$$(x, x) \rightarrow (x, x_1) \rightarrow (x_1, x_1) \rightarrow (x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_2) \\ \rightarrow \dots \rightarrow (x_N, x_N) \rightarrow (x_N, x) \rightarrow (x, x),$$

где каждая из стрелок $\rightarrow$ обозначает отрезок пути вдоль “горизонталей” или “вертикалей” в группоиде $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

(b) Пусть $X = \{X(\tau) \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ – гёльдеров путь на многообразии $\mathcal{X}$, и пусть $x_j = X(j/N)$ ($j = 0, \dots, N$) – точки разбиения этого пути. Тогда при $N \rightarrow \infty$

$$\exp \left\{ i \int_{\Sigma(x_N, \dots, x_1, x_0)} \omega \right\} \simeq \exp \left\{ i \int_{\Sigma[X]} \omega \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N-1} d(x_{j+1}, x_j)^2 \right\}. \quad (2.2)$$

Здесь $\Sigma[X]$ – мембрана в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, чьей границей служит путь

$$(X(0), X(0)) \overset{X}{\rightrightarrows} (X(1), X(1)) \rightarrow (X(1), X(0)) \rightarrow (X(0), X(0)) \quad (2.3)$$

(причем звено, обозначенное двумя стрелками $\overset{X}{\rightrightarrows}$, идет вдоль пути X по диагонали $\text{diag}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) \approx \mathcal{X}$). Кроме того, в (2.2) участвует риманово расстояние d , заданное метрикой g (1.1).

Определим теперь элемент объема $d\mathcal{M}$ в пространстве всевозможных путей $X: [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ следующим образом:

$$d\mathcal{M}[X] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \Re \left(\exp \left\{ i \int_{\Sigma(x_N, \dots, x_1, x_0)} \omega \right\} \right), \quad x_j = X(j/N),$$

где $\Re$ обозначает взятие вещественной части. В силу теоремы 2.1 (b) значения этого элемента объема на пространстве гёльдеровых путей можно вычислять по формуле

$$d\mathcal{M}[X] = p(X(0), X(1))^{1/2} \cos \left(\Re \int_{\Sigma[X]} \omega \right) \\ \times \prod_{\tau=0}^t dm(X(\tau)) e^{-d(X(\tau+\delta\tau), X(\tau))^2/4}, \quad (2.4)$$

где p – вероятностная функция (1.5), мембрана $\Sigma[X]$ определена в теореме 2.1 (b), форма ω – в (1.1), а d – риманово расстояние на $\mathcal{X}$, заданное метрикой (1.1).

Отметим, что лишь на гладких путях X гауссовы экспоненты в правых частях (2.2), (2.4) можно заменить единицей. Такие экспоненты не встречались ни в традиционных подходах к фейнмановским интегралам, ни в тех, которые основаны на теории когерентных состояний (см., например, [11]–[13]). Они существенно улучшают свойства элемента объема $d\mathcal{M}$ и приближают их к свойствам настоящей меры в пространстве путей (подобной мере Винера).

Обратим также внимание на дополнительные множители в (2.4), связанные с интегралом по мембране $\Sigma[X]$ и с вероятностной функцией $p(X(0), X(1))$. Эта последняя аппроксимирует δ -функцию с носителем в точке $X(0) = X(1)$ так, что элемент объема $d\mathcal{M}$ оказывается квазиклассически сосредоточенным на замкнутых путях X .

Теперь мы применим формулы (2.1), (2.2) для вычисления виковского символа оператора эволюции и виковского символа проекторов на собственные подпространства некоторого гамильтониана $\hat{H}$ с гладким вещественным антивиковским символом H . Пусть для простоты $\mathcal{X}$ компактно.

ТЕОРЕМА 2.2. (а) Виковский символ оператора $e^{-it\hat{H}}$ задается с помощью интеграла по путям (понимаемого как предел конечнократных аппроксимаций):

$$\mathrm{tr}(e^{-it\hat{H}}\Pi(x)) = \int_{X(0)=x} e^{-itH[X]} d\mathfrak{M}[X].$$

Здесь интегрирование ведется по путям $X = \{X(\tau) \mid 0 \leq \tau \leq 1\}$ на многообразии $\mathfrak{X}$, начинающимся в точке $x = X(0)$. Использовано также следующее обозначение: $H[X] = \int_0^1 H(X(\tau)) d\tau$. В частности, имеем: $\int_{X(0)=x} d\mathfrak{M}[X] = 1$.

(б) Число λ является собственным значением оператора $\hat{H}$ тогда и только тогда, когда интеграл $\int_{H[X]=\lambda} d\mathfrak{M}[X] \stackrel{\text{def}}{=} n^\lambda$ отличен от нуля (здесь интегрирование ведется по всем путям X , для которых $H[X] = \lambda$). В этом случае n^λ совпадает с кратностью собственного значения λ , т.е. $n^\lambda = \dim P^\lambda$. Виковский символ соответствующего собственного проектора P^λ (или функция Хусими) принимает положительные значения между 0 и 1 и задается формулой

$$\mathrm{tr}(P^\lambda \Pi(x)) = \int_{X(0)=x, H[X]=\lambda} d\mathfrak{M}[X].$$

Интегрируя левые и правые части по $x \in \mathfrak{X}$ с некоторой функцией f , получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.1. (а) Для любого $f \in C_0^\infty(\mathfrak{X})$ имеет место формула следа

$$\mathrm{tr}(e^{-it\hat{H}}\hat{f}) = \int e^{-itH[X]} f(X(0)) d\mathfrak{M}[X],$$

где интегрирование ведется по всевозможным путям X в $\mathfrak{X}$. В частности, $\int d\mathfrak{M} = \dim \mathcal{L} = \int_{\mathfrak{X}} dm$.

(б) Матричные элементы оператора $\hat{f}$ на собственных подпространствах оператора $\hat{H}$ задаются формулой

$$\mathrm{tr}(\hat{f}P^\lambda) = \int_{H[X]=\lambda} f(X(0)) d\mathfrak{M}[X].$$

3. Мембранные амплитуды как точные квантовые волновые функции. В предыдущих формулах вся содержательная часть вычисления квантовой эволюции скрыта за значком интеграла по путям. Однако, в некоторых случаях от интеграла удастся избавиться. Грубо говоря, это происходит, когда метод стационарной фазы дает точное значение интеграла, а не просто его асимптотику. Подобное, как известно, имеет место в формулах типа Дейстераа-Хекмана или в формулах локализации. Следующая теорема расширяет класс таких примеров и задает виковский символ некоторых специальных квантовых операторов эволюции в чисто геометрических (т.е. классических) терминах.

Введем на $\mathfrak{X}$ меру $dm' \stackrel{\text{def}}{=} (M^2 / \det g_1) d\bar{z} dz$, где M – это локальная плотность меры $dm = M d\bar{z} dz$. Обозначим через γ^t поток гамильтонова векторного поля $\mathrm{ad}(H)$ на $\mathfrak{X}$, порожденного вещественной функцией H и симплектической формой

$$\omega_0 = ig_0 d\bar{z} \wedge dz. \quad (3.1)$$

Следуя [6], [9], определим *квантовую деформацию* символа H по формуле $H_1 \stackrel{\text{def}}{=} H - i \operatorname{div}'(\operatorname{ad}(H)_+)/2$. Здесь $\operatorname{ad}(H)_+$ — это $(1, 0)$ -компонента векторного поля $\operatorname{ad}(H)$ относительно комплексной поляризации, а дивергенция div' берется относительно меры dm' . Положим

$$\Delta^t(x) = \left| \frac{\mathcal{D}z^t}{\mathcal{D}z} \right| \left(\frac{\det g_1(\gamma^t(x))}{\det g_1(x)} \right)^{1/2},$$

$$\nu^t(x) = \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mathcal{D}z^t/\mathcal{D}z}{\mathcal{D}\bar{z}^t/\mathcal{D}\bar{z}} - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \ln \det g_1 \right) (\gamma^t(x)) z^t \right],$$

где $z \equiv z(x)$, $z^t \equiv z(\gamma^t(x))$. Функцию Δ^t мы называем *модулярной функцией*, а форму $\nu^t dt$ — *фундаментальной формой* на траектории потока γ^t (см. [9]). Они допускают инвариантное геометрическое описание [7], [10].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть задано квантование Π комплексного многообразия $\mathcal{X}$, и пусть квантовая метрика представима в виде (1.3). Предположим, что гамильтонов поток γ^t , порожденный функцией H и симплектической формой (3.1), сохраняет поляризацию на $\mathcal{X}$. Тогда

$$\operatorname{tr}(e^{-it\hat{H}} \Pi(x)) = \exp \left\{ i \int_{\Sigma^t(x)} \omega - i \int_0^t \nu^\tau(x) d\tau - itH(x) \right\} \Delta^t(x)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Здесь $\Sigma^t(x)$ — это мембрана $\Sigma[X]$ с границей (2.3), в которой $X = \{\gamma^\tau(x) \mid 0 \leq \tau \leq t\}$ — это траектория потока γ^t .

В случае функций H , чьи гамильтоновы потоки не сохраняют поляризацию, в формуле типа (3.2) для ковариантного символа оператора эволюции присутствует еще дополнительная амплитуда, подчиненная некоторому уравнению. Это новое квантовое уравнение (инвариантно определенное на графике гамильтонова потока) элементарно решается в квазиклассическом приближении, см. [6], [9], [10].

Московский институт электроники и математики
E-mail: karasev@qds.amath.msk.ru

Поступило
27.06.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klauder J. R. // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1058–1073.
2. Березин Ф. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. С. 1134–1167.
3. Simon B. // Comm. Math. Phys. 1980. V. 71. P. 247–276.
4. Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
5. Rawnsley J. H. // Quart. J. Math. Oxford. 1977. V. 28. P. 403–415.
6. Karasev M. V. // Quantiz., Coherent States and Complex Struct. / ed. J.-P. Antoine et al. N. Y.: Plenum, 1995. P. 185–199.
7. Karasev M. V. // Russ. J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 4. P. 523–526.
8. Karasev M. V. // Russ. J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 4. P. 445–462.
9. Karasev M. V. // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 3. P. 393–400.
10. Karasev M. V. // Contemp. Math. 1994. V. 179. P. 83–113.
11. Klauder J. R. // Ann. Phys. 1960. V. 11. P. 123–168.
12. Klauder J. R. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 897–899.
13. Casdavid A. C., Nakashima M. // Lett. Math. Phys. 1991. V. 23. P. 111–123.