Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О группе Брауэра вещественной алгебраической поверхности, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 935–938

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:41:18

О ГРУППЕ БРАУЭРА ВЕЩЕСТВЕННОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Краснов

Введение. Далее X – неособая полная вещественная алгебраическая поверхность, тогда группа Брауэра $\text{Br}(X)$ равна коhomологической группе Брауэра $\text{Br}'(X) = H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ (см. [1]). В работе [2] было доказано равенство

$$\text{Br}'(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}. \quad (1)$$

В этом равенстве $\rho_0(X)$ – число Лефшеца, которое равно размерности коядра гомоморфизма

$$(\text{Pic } X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-,$$

причем $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-$ – подпространство $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, антиинвариантное относительно инволюции комплексного сопряжения $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$; G – группа второго порядка, порожденная инволюцией g ; $\mathbb{Z}_-$ – постоянный пучок на $X(\mathbb{C})$ со слоем $\mathbb{Z}$, инволюция g на котором действует умножением на -1 ; $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}$ – подгруппа кручения эквивариантной группы коhomологий. Из (1), в частности, получаем следующее равенство:

$$\dim_2 \text{Br}(X) = \rho_0(X) + \dim_2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-), \quad (2)$$

где ${}_2\text{Br}(X)$, ${}_2H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ – 2-элементарные подгруппы. В работах [2]–[4] имеются частные результаты о размерности $\dim_2 \text{Br}(X)$, но окончательного ответа еще не было. Здесь мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, тогда выполняется равенство

$$\dim_2 \text{Br}(X) = \rho_0(X) - q(X) + k^1(Y) + 2s - 1,$$

где $q(X)$ – иррегулярность X , $Y = X(\mathbb{C})/G$ и $k^1(Y)$ равно размерности ядра гомоморфизма ограничения $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, s – число компонент связности множества $X(\mathbb{R})$.

Вычисление всей группы Брауэра $\text{Br}(X)$ является задачей более сложной. Заметим сначала, что если $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, то в [2] доказано равенство

$$\text{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2s-1}.$$

В этой заметке мы вычисляем группу Брауэра поверхности в случае, когда $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$. Соответствующая теорема обобщает результат о группе Брауэра поверхности Энрикеса в [2]. Прежде чем сформулировать эту теорему, сделаем несколько замечаний.

Так как $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, то $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$, образующую группы $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ обозначим через θ . Гомоморфизм $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ является вложением при $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, поэтому тогда группа $H^1(Y, \mathbb{F}_2)$ может быть равна либо 0, либо $\mathbb{F}_2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$ и $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, тогда справедливы утверждения:

- 1) если $\theta|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, то $\text{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2s-1}$;
- 2) если $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$, $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \neq 0$, то $\text{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2s}$;
- 3) если $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$, $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$, то $\text{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2s-2} \oplus \mathbb{Z}/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ. В силу равенства (2) для доказательства теоремы 1 достаточно установить равенство

$$\dim {}_2H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = k^1(Y) - q(X) + 2s - 1. \quad (3)$$

Покажем сначала, что

$$\dim {}_2H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = \dim H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) - \dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) - q(X). \quad (4)$$

Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \dim {}_2H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) &= \dim H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \\ &\quad - \text{rk } H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-), \\ \dim H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 &= \dim H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) - \dim {}_2H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-), \\ \text{rk } H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) &= \dim H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{Q} \\ &= \dim H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-) = \dim H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-. \end{aligned}$$

Осталось отметить, что гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^4(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом (см. [5]), поэтому

$$\dim {}_2H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = \dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

а также имеем равенство

$$\dim H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_- = q(X).$$

Итак, соотношение (4) доказано, следовательно, чтобы установить формулу (3), достаточно показать, что

$$\dim H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) - \dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = k^1(Y) + 2s - 1. \quad (5)$$

Для доказательства этого равенства заметим, что гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

дополняется до следующей точной последовательности (см. [5])

$$H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{j^*} H^3(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta} H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0, \quad (6)$$

где j^* – гомоморфизм Гизина, из которой вытекает равенство (5). Итак, теорема 1 доказана, перейдем к доказательству теоремы 2.

Согласно равенству (1) достаточно установить утверждения:

- 1') если $\theta|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, то $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}} = (\mathbb{Z}/2)^{2s-1}$;
- 2') если $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$, $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \neq 0$, то $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}} = (\mathbb{Z}/2)^{2s}$;
- 3') если $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$, $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$, то $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}} = (\mathbb{Z}/2)^{2s-2} \oplus \mathbb{Z}/4$.

Для вычисления группы $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_\text{tors}$ рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^{\text{ev}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

где $H^{\text{ev}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Этот гомоморфизм дополняется до следующей точной последовательности (см. [5])

$$H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{j'^*} H^3(Y, \mathbb{Z}') \xrightarrow{i^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H^{\text{ev}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbb{F}_2, \quad (7)$$

где $\mathbb{Z}' = f_*^G(\mathbb{Z}_-)$, $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ – проекция, а j'^* – аналог гомоморфизма Гизина, он устроен следующим образом. Пусть $a = [\Gamma]^* \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, где Γ – кривая на $X(\mathbb{R})$, U – замкнутая G -инвариантная окрестность Γ в $X(\mathbb{C})$, $V = U/G$, тогда группа $H^3(V, \partial V; \mathbb{Z}')$ равна $\mathbb{F}_2$. Обозначим образ образующей этой группы в $H^3(Y, \mathbb{Z}')$ через A , тогда $j'^*(a) = A$. Вычислим теперь группу $H^3(Y, \mathbb{Z}')$. Для этого рассмотрим точную последовательность пучков на Y

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow f_*(\mathbb{Z}_-) \xrightarrow{1+g^*} \mathbb{Z}' \longrightarrow 0.$$

Так как гомоморфизм $H^q(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(Y, f_*(\mathbb{Z}))$ совпадает с гомоморфизмом $f^*: H^q(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, то из этой точной последовательности и из наших предположений следует, что гомоморфизм

$$1 + g^*: H^3(Y, f_*(\mathbb{Z}_-)) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}')$$

является изоморфизмом (см. [2]). Таким образом, имеем равенства

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = H^3(Y, f_*(\mathbb{Z}_-)) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2.$$

Если отождествить согласно этим равенствам группу $H^3(Y, \mathbb{Z}')$ с $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, то из определения гомоморфизма j'^* следует, что он совпадает с гомоморфизмом Гизина

$$j^*: H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2). \quad (8)$$

Теперь мы можем доказать утверждение 1'). Действительно, если $\theta|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, то гомоморфизм (8) эпиморфен, поэтому эпиморфен гомоморфизм j'^* , а тогда из точной последовательности (7) следует равенство

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = (\mathbb{Z}/2)^{2s-1}.$$

Предположим теперь, что $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$, тогда рассмотрим гомоморфизм редукции по mod 2

$$R: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

он продолжается до гомоморфизма точной последовательности (6) в точную последовательность (7), т.е. имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{j'^*} & H^3(Y, \mathbb{Z}') & \xrightarrow{i^*} & H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z} -) & & \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow R & & \\
 H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{j^*} & H^3(Y, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{i^*} & H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & & \\
 & & & & \xrightarrow{\beta} & H^{\text{ev}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0 \\
 & & & & & \downarrow & \parallel \\
 & & & & \xrightarrow{\beta} & H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0
 \end{array} \quad . \quad (9)$$

Рассмотрим гомоморфизм $H^3(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow H^3(Y, \mathbb{F}_2)$ в ней. Если отождествить группу $H^3(Y, \mathbb{Z}')$ с $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, то этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{F}_2)$, который называют трансфером. Он будет эпиморфизмом. Используя этот факт, теперь нетрудно вывести из диаграммы (9) утверждения 2'), 3').

Ярославль

Поступило
15.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grothendieck A. // Le groupe de Brauer. Dix Exposes sur la Cohomologie des Schemas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 46–188.
2. Краснов В. А. // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
3. Nikulin V. V. // J. Reine Angew. Math. 1993. V. 444. P. 115–154.
4. Nikulin V. V. // Algebraic geometry and its applications. Proc. of the 8th Algebraic Geometry Conference. Yaroslavl', 1992. С. 113–136.
5. Краснов В. А. Эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61 (в печати).