Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Купш, О. Г. Смолянов, О моделях симметричной алгебры Фока, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 939–942

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:00:58

О МОДЕЛЯХ СИММЕТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ ФОКА

И. Купш, О. Г. Смолянов

Описываются две реализации суперпространства, соответствующего рассмотренной в [1] (см. также [2]) суперсимметричной алгебре Фока, порождаемой гильбертовым пространством E . В обеих реализациях важную роль играет свободный модуль E_Λ над некоторой алгеброй Λ , порождаемый E (он и называется суперпространством, соответствующим E). При этом в одной из рассматриваемых реализаций используется (супер) пространство (некоторых) функций на E_Λ , принимающих значения в Λ ; в другой реализации используется прямая сумма симметризованных (конечных) тензорных произведений суперпространства. Обе эти реализации аналогичны (восходящим к Фоку, Фридрихсу и Сигалу) представлениям (“бозонного”) пространства Фока. Пространство E_Λ наделяется так называемой гауссовской супермерой [3], [4], что позволяет автоматически получать аналоги гауссовских комбинаторных соотношений. В то же время, использование пространства функций, принимающих значения в супералгебре, позволяет связать умножение в супералгебре Фока с поточечным умножением этих функций. Кроме того, в заметке описываются некоторые бесконечномерные (супер) дифференциальные операторы, являющиеся гамильтонианами (бесконечномерных) супераналогов квантового ангармонического осциллятора, и рассматриваются связи между их различными представлениями. В частности, вводится оператор, который можно назвать производящим оператором процесса Орнштейна–Уленбека в суперпространстве, и его обобщения. Результаты первой части заметки можно распространить на случай, когда вместо гильбертова пространства используется ядерное пространство Фреше.

1. Обозначения, терминология и предварительные сведения. Термины и обозначения из [5] используются без пояснений. Все топологические пространства предполагаются отделимыми. Векторное пространство называется Z_2 -градуированным, если оно является прямой суммой двух своих векторных подпространств, индексированных символами 0 и 1 и называемых, как и их элементы, соответственно *четным* и *нечетным*; если $E = E_0 \oplus E_1$ – Z_2 -градуированное векторное пространство, то через p_E обозначается функция на $(E_0 \cup E_1) \setminus \{0\}$, равная нулю на элементах из E_0 и единице – на элементах из E_1 (для всякого $a \in (E_0 \cup E_1) \setminus \{0\}$ число $p_E(a)$ называется *четностью* a). Супералгебра (над полем K) – это Z_2 -градуированное векторное пространство $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ над полем K , наделенное ассоциативным умножением $(a, b) \mapsto ab$, обладающим следующими свойствами: если $a, b \in (E_0 \cup E_1) \setminus \{0\}$, то $a, b \in E_0 \cup E_1$, причем если $ab \neq 0$, то $p_E(ab) = |p_E(a) - p_E(b)|$. Супералгебра называется (супер) коммутативной, если при тех же предположениях $ab = (-1)^{p_E(a)p_E(b)}ba$. Далее предполагается, что поле скаляров – это поле комплексных или поле вещественных чисел. Банахова (гильбертова) супералгебра – это супералгебра, на которой определена норма (гильбертова норма), превращающая ее в банахову алгебру. Всюду далее $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – коммутативная гильбертова супералгебра над полем вещественных чисел, Λ^c – ее комплексификация; предполагается, что $\{\lambda \in \Lambda : \forall \eta \in \Lambda_1 \lambda \eta = 0\} = \{0\}$ (при этом каноническое вложение Λ в пространство всех Λ -линейных отображений Λ в Λ оказывается инъективным). Типичный пример такой супералгебры – это пополнение грассмановой алгебры

со счетным числом образующих по подходящей гильбертовой норме. Если H – (сепарабельное) гильбертово пространство, то (Λ) -суперпространством над H называется Z_2 -градуированный Λ -модуль

$$H_\Lambda = (H_\Lambda)_0 \oplus (H_\Lambda)_1 = (\Lambda_0 \otimes H) \oplus (\Lambda_1 \otimes H) (= \Lambda \otimes H).$$

Здесь символ ' $\otimes$ ' обозначает пополнение предгильбертова пространства, представляющего собой тензорное произведение соответствующих гильбертовых пространств, наделенное (единственной) гильбертовой нормой, являющейся произведением (гильбертовых) норм перемножаемых пространств (это частный случай определения из [3], см. также [6]). Супералгебра Λ далее отождествляется с суперпространством над $\mathbb{R}^1$. Если E и G – два гильбертовых пространства, то символом $\mathcal{L}_2(E_\Lambda, G_\Lambda)$ обозначается Λ -модуль всех Λ -гомоморфизмов E_Λ в G_Λ , являющихся Λ -линейными продолжениями отображений Гильберта–Шмидта пространства E в пространство G ; таким образом, $\mathcal{L}_2(E_\Lambda, G_\Lambda)$ изоморфно Λ -модулю $\Lambda \otimes \mathcal{L}_2(E, G)$ (где $\mathcal{L}_2(E, G)$ – гильбертово пространство всех отображений Гильберта–Шмидта из E в G), и мы предполагаем, что $\mathcal{L}_2(E_\Lambda, G_\Lambda)$ наделено структурой гильбертова пространства, определяемой этим изоморфизмом (таким образом, $\mathcal{L}_2(E_\Lambda, G_\Lambda)$ является некоммутативной гильбертовой супералгеброй). Отображение $f: E_\Lambda \rightarrow G_\Lambda$ называется (*супер*) дифференцируемым в точке $x \in E_\Lambda$, если оно дифференцируемо в этой точке по Фреше как отображение гильбертова пространства E_Λ в гильбертово пространство G_Λ , причем его производная Фреше $f'(x)$ в точке x (называемая в этом случае также *суперпроизводной*) является элементом пространства $\mathcal{L}_2(E_\Lambda, G_\Lambda)$. Кратная дифференцируемость, производные высших порядков и аналитичность отображения определяются естественным образом. Отметим еще, что если отображение (открытой части) суперпространства E_Λ в Λ n раз дифференцируемо в точке $x \in E_\Lambda$, то сужение производной $f'(x)$ на $(E_\Lambda)_1$ можно отождествить с элементом тензорного произведения $\Lambda \otimes \bigwedge_n E$, где символ $\bigwedge_n E$ обозначает гильбертово пространство, представляющее собой замкнутое векторное подпространство пространства $E \otimes E \otimes E \otimes \dots \otimes E$ (n раз), порожденное (алгебраическим) внешним произведением n экземпляров пространства E [3], [4].

2. Супермера и суперскалярное произведение. Пусть H – (сепарабельное) гильбертово пространство. *Суперскалярным произведением* в H_Λ называется непрерывное Λ -билинейное отображение $b: H_\Lambda \times H_\Lambda \rightarrow \Lambda$, обладающее следующими свойствами: сужения b на $(H_\Lambda)_0 \times (H_\Lambda)_1$ и на $(H_\Lambda)_1 \times (H_\Lambda)_0$ равны нулю; сужение b на $(H_\Lambda)_1 \times (H_\Lambda)_1$ совпадает с сужением на это множество Λ -билинейного продолжения на $H_\Lambda \times H_\Lambda$ некоторого невырожденного антисимметричного билинейного функционала на H , а сужение b на $(H_\Lambda)_0 \times (H_\Lambda)_0$ – с сужением на это множество Λ -билинейного продолжения на $H_\Lambda \times H_\Lambda$ (обычного) скалярного произведения на H . Пусть еще $\mathcal{F}(H)$ – (Z_2 -градуированное) пространство всех аналитических отображений f суперпространства H_Λ в Λ^c таких, что если

$$(Df)(x) = \left(f(x), f'(x) \upharpoonright (H_\Lambda)_1, \dots, f^{(n)}(x) \upharpoonright \left(\left(\bigwedge_n H \right)_\Lambda \right)_1, \dots \right),$$

то $(Df)(x) \in \Lambda^c \otimes (\wedge H)$, где $\wedge H$ – это гильбертова сумма семейства $\{\bigwedge_n H\}$ гильбертовых пространств. Отметим, что каждая функция $f \in \mathcal{F}(H)$ однозначно определяется своим сужением на канонический образ H_0 пространства H в H_Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [3]). *Супермерой на H_Λ называется борелевская счетно аддитивная мера на H_0 , принимающая значения в $\Lambda^c \otimes \Lambda H$.*

Если ν – супермера на H_Λ , то интеграл функции $f \in \mathcal{F}(H)$ по супермере ν , обозначаемый символом $\int f d\nu$, определяется равенством $\int f d\nu = \int_H ((Df)(x), \nu(dx))$; здесь и далее символ $(\cdot, \cdot)$ обозначает подходящее продолжение скалярного произведения в H . Преобразование Фурье супермеры ν на H_Λ – это функция F_ν на H_Λ , определяемая так: $F_\nu(x) = \int \exp i(x, z) \nu(dz)$. Супермера ν на суперпространстве H_Λ называется *гауссовской*, если на H_Λ существует такое (называемое *корреляционным функционалом меры ν*) суперскалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, что $F_\nu(x) = \exp(-\langle x, x \rangle/2)$, где $x \in H_\Lambda$. Супермера ν на суперпространстве H_Λ называется (*супер*) *дифференцируемой в направлении $h \in H_\Lambda$* , если существует такое ν -интегрируемое отображение $\beta(h, \cdot): H_\Lambda \rightarrow \Lambda$ (называемое *логарифмической производной супермеры ν в направлении $h \in H_\Lambda$*), что для всякой функции $\varphi \in \mathcal{F}(H)$

$$\int \varphi'(x) h d\nu = - \int \varphi \beta(h, x) d\nu,$$

когда оба интеграла существуют.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ν – гауссовская супермера на суперпространстве H_Λ , причем существует такое отображение $B: H_\Lambda \rightarrow H_\Lambda$ (называемое *корреляционным оператором супермеры ν*), что $\langle x, z \rangle = (Bx, z)$ ($x, z \in H_\Lambda$). Тогда если $h \in \text{Im } B$, то ν дифференцируема в направлении h и $\beta(h, x) = -(B^{-1}h, x)$.

3. Модели суперпространств Фока. Пусть H_s – симметричное и H_a – антисимметричное пространства Фока, соответствующие (гильбертову) пространству H ; в этих пространствах Фока, помимо структуры гильбертова пространства, имеются также структуры алгебры (H_s – это гильбертова сумма симметризованных гильбертовых тензорных произведений комплексификаций H^c пространства H).

Пусть символы ' $\vee$ ' и ' $\wedge$ ' обозначают операции умножения соответственно в H_s и в H_a , и пусть $E = H_a \otimes H_s$ и для $x_j \otimes z_j \in E$ ($j = 1, 2$)

$$(x_1 \otimes z_1) \circ (x_2 \otimes z_2) = (x_1 \wedge x_2) \otimes (z_1 \vee z_2).$$

Тогда E – это “суперсимметричная алгебра Фока” ([1], [2]).

Пусть теперь $\sum H_\Lambda^c$ – гильбертова сумма суперсимметризованных тензорных произведений $H_\Lambda^c \otimes \dots \otimes H_\Lambda^c$. Обозначим, далее, через $\mathcal{F}_\nu(H)$ пополнение предгильбертова пространства, получаемого путем наделения подходящего подпространства (супер) пространства $\mathcal{F}(H)$ гильбертовой нормой $\|\cdot\|$, определяемой равенством $\|f\|^2 = \int_H \|(f(x)\overline{f(x)})\|_\Lambda d\nu$, где ν – некоторая гауссовская супермера на H_Λ и $\|\cdot\|_\Lambda$ – норма в Λ .

ТЕОРЕМА 1. Существует (естественный) изоморфизм (супер) алгебры E_Λ на супералгебру $\sum H_\Lambda^c$, индуцирующий представление (супер) алгебры E в $\sum H_\Lambda^c$. Кроме того, каждое из изоморфных суперпространств E_Λ и $\sum H_\Lambda^c$ изоморфно суперпространству $\mathcal{F}_\nu$ (соответствующий изоморфизм является продолжением изоморфизма Сигала).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналог теоремы 1 справедлив и для тензорного произведения $H_s \otimes K_a$, где H, K – два (различных) гильбертовых пространства.

4. Супердифференциальные операторы. Линейные супердифференциальные операторы определяются как псевдодифференциальные операторы с подходящими символами. Мы рассмотрим здесь только символы $\mathcal{H}(q, p)$ вида $\mathcal{H}(q, r) = \frac{1}{2}\langle p, p \rangle + V(q)$, где $(q, p) \in Q \times P$, причем Q и P – два экземпляра суперпространства над гильбертовым пространством H , наделенного суперскалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть $\mathcal{H}$ – псевдодифференциальный оператор в H_Λ с символом и ν – супермера на H_Λ , логарифмическая производная которой удовлетворяет соотношению $V(q) = \beta'(\cdot, q) + \text{str } \beta(\cdot, q) \otimes \beta(\cdot, q)$ для каждого $q \in Q$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\widehat{\mathcal{H}}_1$ – линейное отображение $\mathcal{F}_\nu(Q)$ в $\mathcal{F}(Q)$, определяемое равенством $\widehat{\mathcal{H}}(\varphi, \nu) = (\widehat{\mathcal{H}}_1 \varphi) \cdot \nu$, то для каждого $\varphi \in \mathcal{F}_\nu(Q)$

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 \varphi(\cdot) - \frac{1}{2} \text{str } \varphi'(\cdot) - \text{str } \varphi' \otimes \beta(\cdot, \cdot).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $V(\cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{H}}_1$ естественно считать супераналогом (бесконечномерной версии) классического оператора Орнштейна–Уленбека.

Университет Кайзершлаутер
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kupsh J. // Rev. Math. Phys. 1990. V. 2. № 4. P. 457–477.
2. Haba Y., Kupsh J. // Forsch. Phys. 1995. V. 45. № 1. P. 41–66.
3. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 476–482.
4. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 3. С. 545–550.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
6. Владимиров В. С., Волович И. В. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1042–1044.